FACULTAD DE ECONOMÍA, U.V.
PRIMER EXAMEN DE ECONOMETRÍA 1
Profesor: Carlos Pitta Arcos. Grupos 401 y 402

Panorama General: El examen consta de 4 problemas, con una ponderación final de 100 puntos (pts). Para facilitarle el cálculo del valor marginal del tiempo, el examen tiene una duración de 100 minutos, es decir, una hora cuarenta minutos. EL EXAMEN DEBE ENTREGARSE JUSTO CUANDO FINALICE EL TIEMPO. SI LO ENTREGA ENTRE 1 Y 10 MINUTOS DESPUÉS, SERÁ PENALIZADO CON 5 PUNTOS. Nadie puede entregar el examen más de 10 minutos después de la hora de penalización.

Lea cuidadosamente cada una de las preguntas. El examen no contiene trampas, sólo se pide que usted recuerde los conceptos más importantes hasta el momento. Sea eficiente en el uso del tiempo. Una buena estrategia es dedicar unos minutos para determinar qué sabe y qué no sabe, evidentemente respondiendo a lo que sabe más primero (con el menor consumo de tiempo posible) y destinar el tiempo final a lo que usted no recuerda tan claramente.

Sea Claro y Ordenado, le ayudará a ganar puntos. Siempre comience un nuevo problema en una nueva hoja. PONGA SU NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS QUE UTILICE. El Profesor NO RESPONDE PREGUNTAS ESPECÍFICAS, sólo en términos generales, en voz alta frente al grupo y sobre la redacción del problema (además recuerde que al preguntar pierde tiempo) Espero las mejores notas, así que **¡¡ Muchísima Suerte ¡¡**

==

Problema 1 (20 pts): Modelo Simple.

Una encuesta de Ingreso Familiar a 10 Familias Representativas ha sido llevada a cabo. A usted se le proporciona la siguiente información, en donde **x** (minúscula) representa al Ingreso Familiar mientras que **y** (minúscula) representa al consumo. NOTE QUE LA INFORMACIÓN SE PROPORCIONA COMO DESVÍOS DE LA MEDIA. Además, usted sabe que los primeros momentos son: Media(x)=0.13 y Media(y)=15.4

n	x	y	e
1	-1.56	-5.40	-0.71
2	-1.56	-3.40	1.29
3	-0.96	-3.40	-0.52
4	-0.36	-1.40	-0.32
5	-0.36	-0.40	0.68
6	0.24	0.60	-0.12
7	0.24	0.60	-0.12
8	0.84	1.60	-0.92
9	1.44	4.60	0.27
10	2.04	6.60	0.47
Σ	**0.00**	**0.00**	**0.00**

1. (5 pts) Calcule el modelo $\mathbf{Y_i = B_1 + B_2 * X_i + e_i.}$ Es decir, encuentre los valores numéricos para B_1 y B_2.
2. (5 pts) Calcule de manera aproximada el R^2 para esta regresión particular.
3. (5 pts) Calcule la DESVIACIÓN ESTÁNDAR para el parámetro B_2.

3. (5 pts) ¿Son los resultados acordes con las teorías clásicas del consumo? ¿Existe alguna crítica que usted pueda hacer a este modelo, basado en los resultados de esta muestra en particular?

Problema 2 (10 pts): Pepe el jugador.

José Riesgoso (Pepe) es un adicto al riesgo irremediable. Habitualmente viaja a las Vegas y le encanta jugar a los dados. A veces le acompaña su amigo Ricardo Matado (Rico), un estadístico muy puntilloso. Se enfrascan en una discusión pues Pepe le dice a Rico que, de acuerdo a su amplísima experiencia, los números 3 y el 4 son los que más salen. Pero Rico no confía en la experiencia empírica, arguye que todos los números tienen la misma probabilidad a priori de ocurrencia por lo que, en promedio, todos deberían salir el mismo número de veces y requiere una demostración muy formal del asunto para creerle a Pepe. Éste sin embargo es un negado para la estadística, así que le pide ayuda a usted:

1. (3 pts) Calcule formalmente el <u>valor esperado y la varianza</u> del experimento aleatorio TIRAR UN DADO. Sea riguroso en emplear las fórmulas correspondientes.
2. (3 pts) Dados los resultados en 1, ¿Comparte Usted la opinión de Pepe o de Rico?
3. (4 pts) Otro observador anónimo de la discusión (usted presume que es matemático y jugador) arguye que, tras estudios minuciosos y muchos dólares perdidos, ha llegado a la conclusión de que la "verdadera" representación para el experimento no es discreta, sino en realidad contínua y de la forma:

   $$\mathbf{f(x) = (1/20)*x^3} \qquad\qquad \mathbf{1 \leq x \leq 3}$$

   Calcule la Esperanza y la varianza de ésta FDP contínua.
   NOTA: requiere usar Cálculo Integral.

===

Problema 3 (40 pts):

1. (10 pts) En el siguiente modelo:

   $$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_i + e_i$$

   Plantee el problema de optimización correspondiente, así como las condiciones de Primer y de Segundo Orden. Defina claramente cual es la <u>condición suficiente</u> para encontrar un Máximo Local y para un Mínimo Local. (6 pts) ¿Se cumple en este caso la condición de Segundo Orden? ¿Qué intuye? (4 pts) NOTA: Basta <u>definir la Matriz Hessiana</u> para ganar los 4 puntos finales.
2. (10 pts) Liste los supuestos del Modelo Lineal Clásico. Explique brevemente cada uno de ellos. (6 pts)¿Qué se asegura si todos ellos se cumplen? (4 pts)
3. (10 pts) Explique: ¿Cómo se forma una distribución χ^2? (2 pts) ¿Y una F de Fisher? (2 pts) ¿Y una t de Student? (2 pts) Explique la idea central detrás del Teorema del Límite Central (4 pts)
4. (10 pts) Explique los criterios para seleccionar entre estimadores. En particular, explique <u>Insesgamiento</u> (2 pts) y <u>Eficiencia</u> (2 pts). ¿Tiene sentido seleccionar aquel estimador que maximice el R^2? (2 pts) Explique el criterio del Error Cuadrático Medio. (4 pts)

===

Problema 4 (30 pts):

Utilizando de nueva cuenta el modelo:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_i + e_i$$

Demuestre (es suficiente que lo demuestre para α_1) que los estimadores basados en el Modelo Lineal Clásico ó MICO son:

1. Lineales. (3 pts)
2. Insesgados. (7 pts)
3. Eficientes. (15 pts) Para ello, calcule primero su varianza en términos de las X´s y de la varianza poblacional desconocida. (5 pts) Después, obtenga un estimador para la varianza poblacional y demuestre que dicho estimador es insesgado. (5 pts) Por último, demuestre el teorema de Gauss-Markov. (5 pts).
4. La (el) Novia (o) que más le ha interesado hasta el momento t_0 le invita finalmente a conocer a sus padres durante una cena. Esta es una ocasión importantísima y usted de ninguna manera quiere pasar vergüenzas. Lamentablemente, el padre de su pareja es un estadístico bastante prominente. En el transcurso de la velada, el estadístico se enfrasca en una férrea defensa de los Estimadores Mínimos Cuadrados Ordinarios (MICO). Él arguye que, si se cumplen todos los supuestos del modelo clásico de regresión lineal, el Teorema de Gauss-Markov garantiza que los estimadores MICO son los Mejores Estimadores Lineales Insesgados (MELI), por lo tanto, son los mejores estimadores posibles. Utilizando su mejor pose de intelectual, su suegro continúa diciendo que incluso utilizando otros métodos de estimación, como Máxima Verosimilitud o el Método de Generalizado de Momentos, en el mejor de los casos sólo podríamos encontrar un estimador que iguale a MELI. Usted, desesperado por decir algo inteligente, recuerda su curso de Econometría.

   ¿Es verdadero o falso el argumento de su suegro? Fundamente su respuesta. (5 pts) PISTA: Pregúntese si existe algo mejor que MELI. En caso afirmativo, el suegro no tiene la razón, y viceversa.

SECCIÓN DE RESPUESTAS

Problema 1:

Lo primero es establecer una estrategia de ataque al problema. Ya que tenemos la información de las medias, podríamos transformar toda la información de que disponemos a variables es niveles en lugar de trabajar con medias, pero eso nos consumirá demasiado tiempo. Una estrategia más económica en tiempo es utilizar directamente las fórmulas que hemos aprendido para el modelo expresado es desvíos de la media. Lo segundo que debemos hacer es completar con algunos cálculos una tabla que contenga toda la información que necesitamos.

N	x	y	xy	x^2	y^2	e	e^2
1	-1.56	-5.40	8.41	2.43	29.16	-0.71	0.504
2	-1.56	-3.40	5.30	2.43	11.56	1.29	1.664
3	-0.96	-3.40	3.26	0.92	11.56	-0.52	0.270
4	-0.36	-1.40	0.50	0.13	1.96	-0.32	0.102
5	-0.36	-0.40	0.14	0.13	0.16	0.68	0.462
6	0.24	0.60	0.15	0.06	0.36	-0.12	0.014
7	0.24	0.60	0.15	0.06	0.36	-0.12	0.014
8	0.84	1.60	1.35	0.71	2.56	-0.92	0.846
9	1.44	4.60	6.63	2.08	21.16	0.27	0.072
10	2.04	6.60	13.48	4.17	43.56	0.47	0.220
Σ	**0.00**	**0.00**	**39.36**	**13.10**	**122.40**	**0.00**	**4.172**

Para 1.1, utilizamos es estimador de B_1 y B_2:

$$\hat{B}_1 = \bar{Y} - \hat{B}_2 * \bar{X} = 15.4 - 3 * 0.13 \cong 15$$

$$\hat{B}_2 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{39.36}{13.10} \cong 3$$

Para 1.2, usamos la fórmula del R^2 en desvíos:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{\hat{B}_2^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{3^2 * 13.1}{122.4} \cong 0.963$$

Para 1.3, utilizamos la fórmula de la Varianza y sacamos raíz cuadrada. Recuerde que SE PIDE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR, NO LA VARIANZA:

$$\sigma(\hat{B}_2) = \sqrt{VAR(\hat{B}_2)} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2 / (n-2)}{\sum x_i^2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{(n-2)\cdot\sum x_i^2}} = \sqrt{\frac{4.1724}{(10-2)\cdot 13.1}} = \sqrt{0.0398129} = 0.199$$

Para 1.4, podemos argüir que el valor estimado de la propensión marginal a consumir está fuera de la realidad. El argumento keynesiano clásico marca un $0 \leq B_2 \leq 1$, por lo que ésta muestra en particular está sobreestimando lo que la teoría económica marca como rango aceptable para B_2. Esto significaría que por cada peso extra que ganamos, consumimos 3 pesos, lo que no es coherente con el sentido común.

Problema 2:
Lo importante aquí es tener claras las fórmulas, porque el resto sale muy mecánicamente.
El evento tirar un dado tiene: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $f(x) = \{{}^1/_6, {}^1/_6, {}^1/_6, {}^1/_6, {}^1/_6, {}^1/_6\}$

Para 2.1, resolvemos: $E(x) = \sum x \bullet f(x) = (1\bullet{}^1/_6 + 2\bullet{}^1/_6 + 3\bullet{}^1/_6 + 4\bullet{}^1/_6 + 5\bullet{}^1/_6 + 6\bullet{}^1/_6) = 3.5$

Y luego calculamos: $VAR(x) = \sum(x-\mu)^2 \bullet f(x) \Rightarrow VAR(x) = \sum(x-E(x))^2 \bullet f(x)$
$= (1-3.5)^2 \bullet{}^1/_6 + (2-3.5)^2 \bullet{}^1/_6 + (3-3.5)^2 \bullet{}^1/_6 + (4-3.5)^2 \bullet{}^1/_6 + (5-3.5)^2 \bullet{}^1/_6 + (6-3.5)^2 \bullet{}^1/_6$
$= {}^1/_6 \bullet(6.25 + 2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25 + 6.25) = (35/12)$

Para 2.2, aunque el valor esperado (3.5) queda en medio de los dos valores que dice pepe, en realidad 3.5 no es un número en la cara del dado, así que nunca saldrá. Rico tiene razón, pues a priori no podemos decir que un dado caiga más que otro, sino que todos tienen la misma probabilidad de ocurrencia, es decir, ${}^1/_6$.

Para 3, tenemos que:

$$VAR(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\, dx$$

$$VAR(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

En Este Caso :

$$i)\ E(x) = \int_1^3 x \cdot (\frac{1}{20}x^3)\, dx = \frac{1}{20}\int_1^3 x^4\, dx = \frac{1}{20}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^3 = \left[\frac{1}{20}\frac{1}{5}3^5\right] - \left[\frac{1}{20}\frac{1}{5}1^5\right] = 2.42$$

$$ii)\ E(x^2) = \int_1^3 x^2 \cdot (\frac{1}{20}x^3)\, dx = \frac{1}{20}\int_1^3 x^5\, dx = \frac{1}{20}\left[\frac{1}{6}x^6\right]_1^3 = \left[\frac{1}{20}\frac{1}{6}3^6\right] - \left[\frac{1}{20}\frac{1}{6}1^6\right] = 6.07$$

Por lo tanto, la varianza pedida es: $6.07 - (2.42)^2 = 0.2136$

==

Serie de Problemas Número 3:

3.1

¡Recuerde que se trata de una minimización en dos variables! Por lo tanto, requerimos además del gradiente igual a cero (condición de primer orden) la matriz Hessiana Semidefinida Positiva (condición de segundo orden para la minimización):

$$SEA\ f(x)\ la\ función\ a\ \max imizar.\ El\ \Pr oblema\ \sin\ restricción\ \ es:$$

$$\underset{x}{\text{Máx}}\ \ f(x)$$

$$CONDICION\ \ DE\ \ PRIMER\ ORDEN: \frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) = 0$$

$$CONDICION\ \ DE\ \ SEGUNDO\ ORDEN: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x)(dx)^2 < 0$$

¡¡Recuerde que las condiciones para <u>maximización</u> son exactamente las inversas!! En nuestro Modelo, dado que estamos <u>minimizando con dos variables de decisión</u>, las condiciones tanto de primer como de segundo orden son las siguientes:

$$Y_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_i + e_i$$

$$e_i = Y_i - \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_i$$

$$CPO \ \frac{\partial \sum e_i^{\ 2}}{\partial \hat{\alpha}_0} = 2\sum\left(Y_i - \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_i \right)\cdot -1 = 0 \Rightarrow \sum e_i = 0$$

$$CPO \ \frac{\partial \sum e_i^{\ 2}}{\partial \hat{\alpha}_1} = 2\sum\left(Y_i - \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_i \right)\cdot -X_i = 0 \Rightarrow \sum e_i X_i = 0$$

$$CSO \ \frac{\partial^2 \sum e_i^{\ 2}}{\partial \hat{\alpha}_0^{\ 2}} = -1$$

$$CSO \ \frac{\partial^2 \sum e_i^{\ 2}}{\partial \hat{\alpha}_1^{\ 2}} = -\sum X_i^{\ 2}\left(Y_i - \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_i \right) \Rightarrow -\sum e_i X_i^{\ 2}$$

$$CSO \ \frac{\partial^2 \sum e_i^{\ 2}}{\partial \hat{\alpha}_0 \, \partial \hat{\alpha}_1} = \frac{\partial\left(-2\sum Y_i - \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_i \right)}{\partial \hat{\alpha}_1 \, \partial} = 2\sum X_i$$

Con lo que el Hessiano queda como sigue :

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 2\sum X_i \\ 2\sum X_i & -\sum e_i X_i^{\ 2} \end{bmatrix} \quad en\ donde\ basta\ que: \sum e_i X_i^{\ 2} > \left(2\sum X_i\right)^2$$

Para demostrar que el Hessiano es Positivo Definido, lo que implica un **mínimo**.

<u>RECUERDE QUE un Hessiano es Negativo Definido implica un **máximo, porque maximizar f(x) es idéntico a minimizar -f(x).**</u> Usted no necesitaba demostrar la desigualdad para ganar todos los puntos, bastaba llegar a definir la matriz Hessiana.

==

3.2

¡Esta era demasiado fácil! Dado lo aburrido del asunto, remítase al Gujarati, páginas 58 a la 67 para releer la respuesta correcta.

==

3.3
Ji-Cuadrado. Sean { Z_1, Z_2, … Z_n } variables aleatorias Normales.

$Z = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$ Distribuye **Ji-Cuadrado con k grados de libertad.**

F de Fisher. Si Z_1 y Z_2 son dos **Ji-Cuadrado** con k_1 y k_2 grados de libertad, respectivamente, la variable:

$F = \dfrac{Z_1 / k_1}{Z_2 / k_2}$ Distribuye F con k1 y k2 grados de Libertad.

t de Student. Si Z1 es Variable Normal y Z2 es **Ji-Cuadrado** con k grados de libertad.

$t = \dfrac{Z_1}{\sqrt{\dfrac{Z_2}{k}}} = \dfrac{Z_1 \sqrt{k}}{\sqrt{Z_2}}$ Distribuye **t de Student** con k Grados de Libertad.

Teorema del Límite Central. Sean { Z_1, Z_2, … Z_n } variables aleatorias con Media = μ y Varianza = σ^2. Si el tamaño de la muestra n aumenta, entonces X (la media aritmética):

$\underset{n\to\infty}{\bar{X}} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ La intuición es que si estamos promediando variables aleatorias, no importa cuan diferentes sean entre sí, a medida que sumamos un número cada vez más grande el promedio de ellas se asemejará cada vez más a una normal, hasta convertirse en una normal cuando el número de variables sumadas es lo suficientemente grande.

==

3.4
Como vinos repetidamente, un estimador es insesgado si su valor esperado es igual al verdadero valor poblacional, es decir, si:

$$E(\hat{B}) = B$$

Por otra parte, es eficiente si tiene **varianza mínima** dentro de todos los estimadores insesgados. El utilizar el máximo R^2 como criterio de selección de estimadores es una mala idea ya que, para cada muestra en particular, nuestro problema de optimización garantiza minimizar el error estándar, lo que significa maximizar el R^2.

El mejor criterio de decisión, en todo caso, es el criterio del mínimo error cuadrático medio. Definido como:

$$ECM = VAR(\hat{B}) + SESGO^2$$

$$ECM = E\left[\hat{B} - E(\hat{B})\right]^2 + E\left[E(\hat{B}) - B\right]^2$$

Implica un *trade-off* entre varianza y sesgo. En el caso de los estimadores insesgados, el segundo miembro del ECM es cero y sólo nos preocupa minimizar la varianza del estimador para encontrar el MELI.

==

Las respuestas de 4.1, 4.2 y 4.3 son bastante complejas en cálculo y notación, por lo que no se reproducen aquí, aunque se refieren directamente a las notas de clase, o remítase al apéndice 3A del Gujarati.

4.4
El argumento de su suegro es **Falso**. Aun cuando las condiciones de **Gauss-Markov** se cumplan, recordemos que nos movemos en la rama de los **estimadores lineales**. Hasta el momento, nada garantiza que, dentro de los **estimadores no lineales** exista un mejor estimador. En la segunda mitad del curso demostraremos que agregando el supuesto de distribución normal de los errores, los estimadores **MICO** alcanzan la **cota de Cramer-Rao**. Éste fortísimo resultado implicará que son **MEI**, es decir, los **Mejores Estimadores Insesgados,** que es un concepto de estimador más fuerte que **MELI** porque abarca tanto a los estimadores lineales como a los no lineales.

¿Existe algo mejor aun que **MEI**? ¡**MEI** es tan poderoso que yo siempre me conformaría con encontrarlo! Sin embargo, recordemos que aun nos movemos dentro de los estimadores insesgados. Pero justamente eso es lo que queremos, ¿O no? Recordemos que aun podría existir un estimador sesgado, pero con varianza tan pequeña que compense al sesgo. La mejor manera de solucionar este *trade-off* entre varianza y sesgo, y de paso encontrar el **Mejor Estimador**, es utilizar el criterio del **Mínimo Error Cuadrático Medio**. Éste sería el *first-best,* o el "mejor de los mejores".

Dado que existen infinitos estimadores, en la práctica hallar **MELI** será suficiente, pero siendo rigurosos, no debemos olvidar que siempre existe algo mejor.