c) Esercizi di applicazione della definizione di limite nei vari casi (ovvero: come si controlla, tramite la def., la correttezza di un limite assegnato)

- **Verificare, direttamente tramite la definizione di limite, che** $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{2}+5\right)=7$

Si tratterà di impostare la disequazione $\left|\frac{x}{2}+5-7\right|<\varepsilon$

dove ε indica un numero >0 arbitrariamente fissato, poi di risolverla con l'obiettivo di far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di $x_0=4$, privato al più del punto 4".

$$\left|\frac{x}{2}+5-7\right|<\varepsilon; \quad \left|\frac{x}{2}-2\right|<\varepsilon; \quad -\varepsilon<\frac{x}{2}-2<\varepsilon, \quad 2-\varepsilon<\frac{x}{2}<2+\varepsilon; \quad 4-2\varepsilon<x<4+2\varepsilon$$

OK! La disequazione è verificata su tutto un intorno di x_0=4

- **Verificare, direttamente tramite la def. di limite, che** $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=+\infty$

Si tratterà di impostare la disequazione $\frac{1}{x^4}>M$

dove con M si indica un numero >0 arbitrariamente fissato, poi di risolvere la disequazione e far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di x_0=0, privato al più del punto 0.

$$\frac{1}{x^4}>M; \quad x^4<\frac{1}{M},\ x\neq 0; \quad |x|<\sqrt[4]{\frac{1}{M}},\ x\neq 0; \quad -\sqrt[4]{\frac{1}{M}}<x<\sqrt[4]{\frac{1}{M}},\ x\neq 0$$

OK! La disequazione è verificata su tutto un intorno di x_0=0, privato del punto 0.

- **Verificare, direttamente tramite la def. di limite, che** $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x-1}{x}=2$

Si tratta di impostare la disequazione $\left|\frac{2x-1}{x}-2\right|<\varepsilon$

dove con ε si indica un numero positivo arbitrariamente fissato;
occorre poi risolvere la disequazione e far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di $+\infty$.

$$\left|\frac{2x-1}{x}-2\right|<\varepsilon; \quad \left|\frac{2x-1-2x}{x}\right|<\varepsilon; \quad \left|-\frac{1}{x}\right|<\varepsilon; \quad \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon; \quad |x|>\frac{1}{\varepsilon};$$

$x<-\frac{1}{\varepsilon} \ \vee \ x>\frac{1}{\varepsilon}$ **OK! La disequazione è verificata, in particolare, per tutti gli x maggiori di $\frac{1}{\varepsilon}$,**

e l'intervallo $\left(\frac{1}{\varepsilon},+\infty\right)$ costituisce un intorno di $+\infty$.