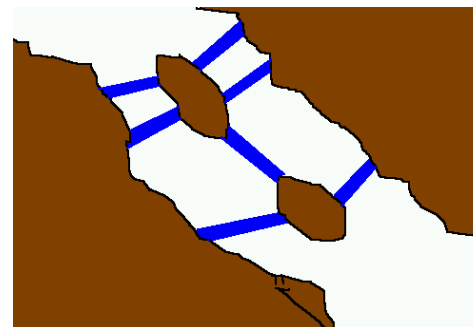


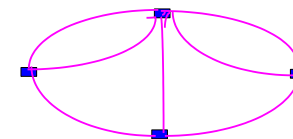
## Strutture topologiche

- *I ponti di Königsberg*
- *Topologia e grafi*
- *Spazi topologici*
- *Funzioni continue*
- *Punti ed insiemi*
- *La topologia della retta reale*

## *I ponti di Königsberg*



Il problema d'Eulero: passare una sola volta su tutti i sette ponti.



## *Topologia e grafi*

Il problema si risolve utilizzando la *teoria dei grafi*.

Si dimostra che, perché esista un cammino (sequenza di archi) passante per tutti i nodi del grafo, occorre e basta che gli archi uscenti da ogni nodo siano sempre in numero pari, salvo che per due nodi dove possono essere dispari..

Dunque, nel caso di Königsberg un cammino simile non esiste.

La *topologia* è la teoria matematica che studia problemi analoghi e problemi legati alla struttura *spaziale* degli insiemi.

Nel caso più generale, si considerano insiemi *plastici*, sicché le loro proprietà non cambiano in conseguenza della loro deformazione plastica. Si perdono quindi le proprietà che si studiano in geometria.

*Esempio:*

trasformare una palla in un disco spesso o in un bicchiere;  
trasformare una ciambella in una tazza;  
ma...

non sono la stessa cosa un bicchiere ed una tazza, perché per fare il manico occorre fare un buco;

non sono la stessa cosa una palla e due palle, perché occorre dividere in due la prima.

In *topologia* ci s'interessa della struttura *globale* degli insiemi, ma anche della struttura *locale*.

*Problema:* Quanto sono vicini due punti?

Se fossero su due palle diverse non si potrebbe andare da uno all'altro restando in una palla.

Se si trovano su una ciambella, si può andare da uno all'altro seguendo due tipi di percorsi secondo i due versi della ciambella.

Se si trovano su una palla, ogni percorso è analogo ad ogni altro.

È sempre possibile *distinguere* due punti?

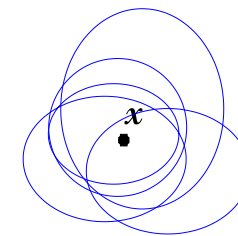
Alcuni gruppi di punti sono *indistinguibili*, nel senso che non si possono separare più di tanto.

Risoluzione dei sensori ottici.

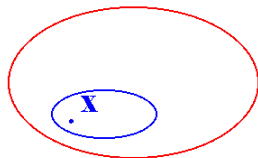
## Spazi topologici

Si dice che un insieme  $X$  ha una *struttura topologica* od una *topologia* se ad ogni elemento di  $X$ , detto *punto*, è associata una famiglia  $\mathcal{N}(x)$  di sottoinsiemi di  $X$ , detti *intorni di  $x$* , che gode delle seguenti proprietà:

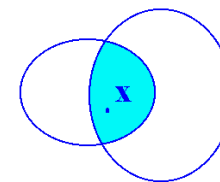
II)  $(\forall V) ((V \in \mathcal{N}(x)) \Rightarrow (x \in V))$ ,  
ovvero *ogni intorno di  $x$  contiene  $x$* ;



I2) Ogni sottoinsieme di  $X$  che contiene un intorno di  $x$  è un intorno di  $x$ ;

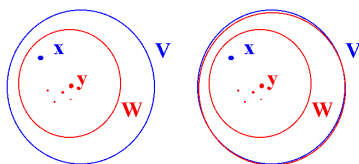


I3) L'intersezione d'un numero finito di intorni di  $x$  è un intorno di  $x$ ;



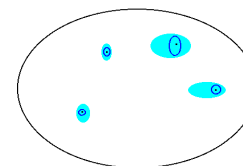
I4) Se  $V \in \mathcal{V}(x)$ , esiste un  $W \in \mathcal{V}(x)$  tale che per ogni  $y \in W$ ,  $W \in \mathcal{V}(y)$

ovvero: ogni intorno contiene un sottoinsieme che è un intorno d'ogni suo punto.



Un insieme  $X$  dotato d'una struttura topologica, si chiama *spazio topologico*.

In uno spazio topologico, un sottoinsieme di  $X$  si dice *aperto*, se contiene un intorno per ognuno dei suoi punti.



Si può dimostrare che la famiglia degli aperti  $\mathcal{F} = \{A \mid A \text{ è aperto}\}$  di  $X$  gode delle seguenti proprietà:

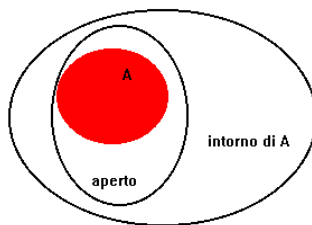
- T1)  $\emptyset, X \in \mathcal{F}$ ;
- T2) l'unione di insiemi aperti è un aperto
- T3) l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto.

*Nota:* Una coppia  $(X, \mathcal{T})$  con gli assiomi T1)..T3) per gli elementi di  $\mathcal{T}$  è uno spazio topologico.

T1)...T3) sono equivalenti agli assiomi I1)...I4).

Gli elementi  $A_i \in \mathcal{F}$  si chiamano *insiemi aperti* o *aperti* della topologia di  $X$ .

Dato un sottoinsieme qualunque  $A$  di  $X$ , si definisce *intorno di  $A$*  qualunque insieme che contiene un aperto che contiene  $A$ . Se  $A = \{x\}$  esso si chiama intorno del punto  $x$ .



Gli elementi  $C_i = C_X A_i$  si chiamano *insiemi chiusi* o *chiusi* di  $X$ .

**Teorema**

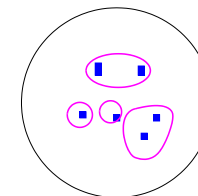
*Per la famiglia di chiusi della topologia valgono le seguenti proprietà:*

- C1)  $\emptyset$  ed  $X$  sono chiusi;
- C2) l'intersezione di chiusi è un chiuso;
- C3) l'unione di un numero finito di chiusi è un chiuso.

*Dimostrazione:* Si basa sulle proprietà di unione, intersezione e differenza fra insiemi.

**Nota:** Il teorema è equivalente agli assiomi della topologia (la dimostrazione di  $T1...T3$  è simmetrica), dunque si possono assumere gli assiomi per i chiusi come base per la topologia e definire gli aperti come complementari.

Intuitivamente si può dire che due punti sono *abbastanza vicini* se esiste un intorno che li contiene entrambi



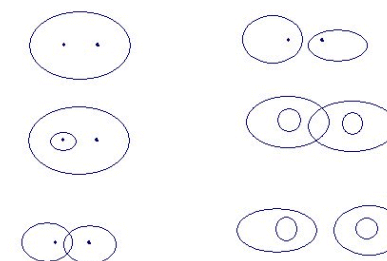
e abbastanza lontani se ne esistono due disgiunti che ne contengono uno solo.

### Esempi:

Dato un insieme  $X$ , si può definire la topologia *banale*, i cui aperti sono  $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, X\}$ , in essa tutti i punti sono *vicini*, nel senso che appartengono al medesimo intorno ( $X$ ).

Se invece si definisce la topologia *discreta*, i cui aperti sono tutti i sottoinsiemi di  $X$ ,  $\mathcal{T}_* = \mathcal{P}(X)$ , risulta che ogni  $x$  è contenuto nell'intorno  $\{x\}$  composto da se stesso, dunque tutti i punti sono *lontani* uno dall'altro.

Esistono poi diversi tipi di spazi, a seconda di come si possono distinguere due punti o due sottoinsiemi:



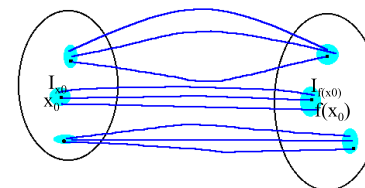
### Funzioni continue

**Definizione locale:**

Dati due spazi topologici  $X$  e  $X'$ , si dice che una funzione  $f: X \rightarrow X'$  è *continua in un punto*  $x_0 \in X$ , se per ogni intorno  $I_{f(x_0)}$  di  $f(x_0) \in f(X)$  esiste un intorno  $I_{x_0}$  di  $x_0 \in X$  tale che

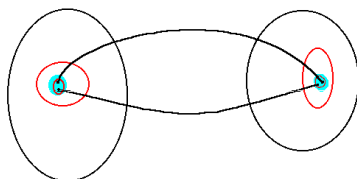
$$(x \in I_{x_0}) \Rightarrow (f(x) \in I_{f(x_0)}).$$

Essa cioè *conserva la struttura degli intorni*.



**Definizione globale:**

Se  $f$  è continua in ogni punto di  $A \subseteq X$ , si dice che  $f$  è *continua in A*.  
Se  $f$  è continua in  $X$ , si dice semplicemente che  $f$  è *continua*.

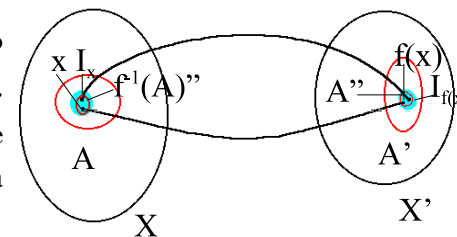


**Teorema**

Se  $f: X \rightarrow X'$  è continua,  $A' \subseteq \text{Im}(f)$  aperto in  $X'$ , allora  $f^{-1}(A') = A$  è aperto in  $X$  e viceversa. Ovvero: una funzione è continua se la controimmagine d'un aperto è un aperto.

**Dimostrazione:**

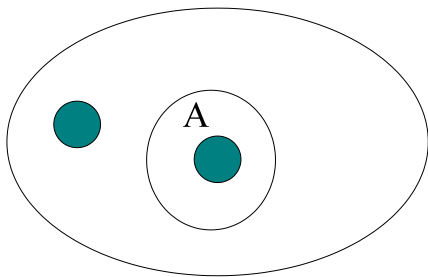
Sia  $x \in A$ , con  $f(x) \in A'$  aperto e sia  $I_{f(x)}$  intorno di  $f(x) \in A'$ . Allora c'è un intorno  $I_x$  tale che per  $x' \in I_x$ ,  $f(x') \in I_{f(x)}$ , ma  $I_x \subseteq A$  e  $A$  è aperto.



Se, viceversa, per ogni  $A'$  aperto  $A = f^{-1}(A')$  è aperto, per ogni  $x \in X$  ed ogni intorno  $I_{f(x)}$  esiste un aperto  $A''$  tale che  $f(x) \in A'' \subseteq I_{f(x)}$ . Dunque  $x \in f^{-1}(A'') \subseteq f^{-1}(I_{f(x)})$ . Ma  $f^{-1}(A'')$  è aperto e quindi  $f^{-1}(I_{f(x)})$  è un intorno di  $x$ .

## Punti ed insiemi

Dato un sottoinsieme  $A$  di  $X$ , si dice che  $x$  è *interno ad  $A$* , se  $A$  è intorno di  $x$ , si dice *esterno* se  $C_X A$  è intorno di  $x$ , dunque se è interno a  $C_X A$ .



Se si indicano rispettivamente con  $\mathcal{I}(A)$  ed  $\mathcal{E}(A)$  gli insiemi aperti dei punti interni ed esterni di  $A$ , si definisce *frontiera* di  $A$  l'insieme

$$\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(C_X A) = C_X(\mathcal{I}(A) \cup \mathcal{E}(A))$$

composto da punti che non sono né interni né esterni ad  $A$ , chiuso. Dato un insieme  $A$ , esso definisce quindi una partizione dello spazio  $X$ :

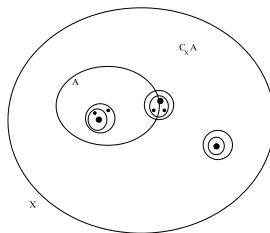
$$X = \mathcal{I}(A) \cup \mathcal{F}(A) \cup \mathcal{E}(A)$$

### Definizione

Dato un sottoinsieme  $A$  di  $X$ ,  $x$  è un *punto d'accumulazione* per  $A$ , se in ogni intorno di  $x$  cade almeno un punto di  $A$  *diverso* da  $x$ . Un punto d'accumulazione può essere *interno*, se  $A$  è intorno di  $x$ , od appartenere alla *frontiera* di  $A$ , se è punto d'accumulazione anche di  $C_X A$ .

L'insieme dei punti d'accumulazione per  $A$  si chiama *derivato* di  $A$ ,  $\mathcal{D}(A)$ , e contiene la sua frontiera (ma può non coincidere con essa).

Risulta  $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(C_X A) = \mathcal{F}(A)$



### Teorema


*Un insieme è chiuso se e solo se contiene l'insieme dei suoi punti d'accumulazione e quindi la sua frontiera.*

### Di conseguenza:

un insieme è aperto se *non* contiene alcun punto di frontiera, è dotato cioè solo di punti interni, cioè coincide col proprio interno.

## La topologia della retta reale

Si chiama *segmento* o *intervallo* la porzione di retta contenuta fra due punti.



A horizontal line segment with two tick marks labeled 'A' and 'B' below it. Below the segment is the set notation  $\{ p \mid A \leq p \leq B \}$ .

$$\{ p \mid A \leq p \leq B \}$$

A seconda che i punti  $A$  e  $B$  ne facciano parte o no, si chiama *chiuso*, *aperto*, *chiuso a sinistra e aperto a destra*, *aperto a sinistra e chiuso a destra*.

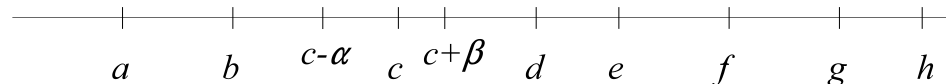
$$[A, B] = \{ x \mid x \geq A \text{ e } x \leq B \} \text{ chiuso}$$

$$(A, B) = \{ x \mid x > A \text{ e } x < B \} \text{ aperto}$$

$$[A, B) = \{ x \mid x \geq A \text{ e } x < B \} \text{ chiuso a sinistra aperto a destra}$$

$$(A, B] = \{ x \mid x > A \text{ e } x \leq B \} \text{ aperto a sinistra chiuso a destra}$$

Fissato un punto sulla retta, si può definire *intorno di un punto* un qualunque sottoinsieme che contiene un intervallo aperto che contiene il punto. Ne risulta la *topologia della retta*. Gli aperti di questa topologia sono i *pluriintervalli aperti*.



Sono aperti sulla retta:  $(a, b)$ ,  $(c, d)$ ,  $(e, f)$ ,  $(c - \alpha, c + \beta)$ , ed anche  $(a, b) \cup (c, d)$ ,  $(a, b) \cup (e, f) \cup (g, h)$ , ecc.

Perché  $A$  sia un intorno di  $x$ , basta che sia  $x \in (a, b) \subseteq A$

Si considerano *aperti* della topologia di  $\mathbb{R}$  i *pluriintervalli*, cioè le unioni di intervalli *aperti*. Sono intorni di un punto gli intervalli che contengono un intervallo aperto che lo contiene.

Tutti i reali sono *punti d'accumulazione*; viceversa, considerando numeri reali positivi o negativi, di modulo sempre più grande, si conviene dire che essi fanno parte di intorni di  $+\infty$  e  $-\infty$ .

$+\infty$  e  $-\infty$  sono punti d'accumulazione per i reali, e vengono aggiunti ad essi. Si aggiungono quindi agli altri intervalli anche

$(a, +\infty)$ ,  $[a, +\infty)$  sempre aperti a destra

e  $(-\infty, a)$ ,  $(-\infty, a]$  sempre aperti a sinistra.