MATEMATICA FINANZIARIA

Prof. Andrea Berardi

1999

3. RENDITE

RENDITA

Operazione finanziaria composta, caratterizzata da *n*+1 scadenze $(0,1,\ldots,t,\ldots,n-1,n)$ **e da *n*+1 importi da pagare o riscuotere a quelle scadenze** $(R_0, R_1,\ldots, R_t,\ldots, R_{n-1}, R_n)$

R_0	R_1	…	R_{t-1}	R_t	R_{t+1}	...	R_{n-1}	R_n
0	**1**	**…**	***t*-1**	***t***	***t*+1**	**...**	***n*-1**	***n***

Singoli importi $R_0, R_1,\ldots, R_t,\ldots, R_{n-1}, R_n$

ß

<u>RATE</u> della rendita

Se $T = 0$ **Þ** **valore attuale della rendita**

$$V_T = \sum_{s=0}^{n} R_s \cdot v(T;s)$$

Se $T = n$ **Þ** **montante della rendita**

$$W_T = \sum_{s=0}^{n} R_s \cdot r(s;T)$$

Se $0 \le T \le n$ **Þ** **valore capitale della rendita**

$$A_T = \sum_{s=0}^{T} R_s \cdot r(s;T) + \sum_{s=T+1}^{n} R_s \cdot v(T;s)$$

ß

<u>Valore capitale</u> di una rendita è la somma delle rate riportate "finanziariamente" ad una determinata epoca *T*

VALORE ATTUALE DI UNA RENDITA

Valore attuale di una rendita che paga \$1 in ogni periodo per *n* periodi, calcolato utilizzando il tasso effettivo *i*

0	\$1	….	\$1	\$1	\$1	….	\$1	\$1
0	**1**	**….**	***t*-1**	***t***	***t*+1**	**….**	***n*-1**	***n***

$$V_0 = \$1 \cdot \sum_{s=1}^{n} v(0;s) = \$1 \cdot \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s}$$

ß

$$\sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Dimostrazione per *n* = 2:

- $$\sum_{s=1}^{2}(1+i)^{-s} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{2+i}{(1+i)^2}$$

- $$\frac{1-(1+i)^{-2}}{i} = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^2}}{i} = \frac{i^2+2i}{(1+i)^2}\cdot\frac{1}{i}$$

$$= \frac{i\cdot(2+i)}{i\cdot(1+i)^2} = \frac{2+i}{(1+i)^2}$$

ß

In generale, $\forall n$, si ha: $$\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ß

“ *a* figurato *n* al tasso *i* ”

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Valore attuale di un flusso di importi unitari ($1) per *n* periodi unitari a partire dal periodo 1, dato un certo tasso i

<u>Esempio</u>

***n* = 5 anni, periodo unitario 1 anno,** $i = 4\%$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-(1.04)^{-5}}{0.04} = 4.452$$

MONTANTE DI UNA RENDITA

Montante di una rendita che paga $1 in ogni periodo per *n* periodi, calcolato utilizzando il tasso effettivo *i*

0	$1	….	$1	$1	$1	….	$1	$1
0	1	….	*t*-1	*t*	*t*+1	….	*n*-1	*n*

$$W_n = \$1 \cdot \sum_{s=1}^{n} r(s;n) = \$1 \cdot \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{n-s}$$

ß

$$\sum_{s=1}^{n} (1+i)^{n-s} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ß

“ *s* figurato *n* al tasso *i* ”

$$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Montante di un flusso di importi unitari ($1) per *n* periodi unitari a partire dal periodo 1, dato un certo tasso i

<u>Esempio</u>

***n* = 5 anni, periodo unitario 1 anno,** $i = 4\%$

$$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1.04)^5 - 1}{0.04} = 5.416$$

CLASSIFICAZIONE DELLE RENDITE

Periodiche ¨ Non periodiche

Costanti ¨ Variabili

Intere ¨ Frazionate ¨ Continue

Temporanee ¨ Perpetue

Anticipate ¨ Posticipate

Immediate ¨ Differite

PERIODICHE

Intervallo di tempo intercorrente fra due rate consecutive è *sempre uguale* durante l'orizzonte temporale della rendita

NON-PERIODICHE

Intervallo di tempo intercorrente fra due rate consecutive *varia* durante l'orizzonte temporale della rendita

****

COSTANTI

Importi delle singole rate sono *tutti uguali*

VARIABILI

Importi delle singole rate sono *variabili*

INTERE

Rate riferite al *periodo unitario* (anno, semestre,…)

FRAZIONATE

Rate riferite a *frazione* del periodo unitario

CONTINUE

Rate riferite a *frazione infinitesimale* del periodo unitario

****

TEMPORANEE

Numero di rate è *finito*

PERPETUE

Numero di rate è un'*infinità* numerabile

<u>ANTICIPATE</u>

La scadenza di ciascuna rata è riferita all'istante *iniziale* del corrispondente periodo

<u>POSTICIPATE</u>

La scadenza di ciascuna rata è riferita all'istante *finale* del corrispondente periodo

****

<u>IMMEDIATE</u>

Prima rata è riferita al *primo periodo*

<u>DIFFERITE</u>

Prima rata è riferita ad un periodo *successivo al primo*

FORMULE PER LA VALUTAZIONE DI DIFFERENTI TIPOLOGIE DI RENDITE

A. Rendita costante, periodica, intera, immediata

Costante	**Þ**	**Stessa rata *R***
Periodica	**Þ**	**Intervallo tra rate sempre uguale**
Intera	**Þ**	**Riferita al periodo unitario**
Immediata	**Þ**	**Prima rata riferita al primo periodo**

ß

Posticipata	**oppure**	**Anticipata**
Temporanea	**oppure**	**Perpetua**

A.1. Rendita costante, periodica, intera, immediata posticipata e temporanea

n **rate di uguale ammontare *R*, ognuna riferita all'istante finale della corrispondente scadenza**

0	***R***	**….**	***R***	***R***	***R***	**….**	***R***	***R***
‖	‖		‖	‖	‖		‖	‖
0	**1**	**….**	***t*-1**	***t***	***t*+1**	**….**	***n*-1**	***n***

$$V_0 = \sum_{s=1}^{n} R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot a_{\overline{n|}i} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

A.2. Rendita costante, periodica, intera, immediata anticipata e temporanea

***n* rate di uguale ammontare *R*, ognuna riferita all'istante iniziale della corrispondente scadenza**

R	***R***	**….**	***R***	***R***	***R***	**….**	***R***	**0**
0	**1**	**….**	***t*-1**	***t***	***t*+1**	**….**	***n*-1**	***n***

$$V_0 = \sum_{s=0}^{n-1} R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}i} = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

" *a* anticipato figurato *n* al tasso *i* "

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = (1+i) \cdot a_{\overline{n|}i}$$

Esempio A.1

Rendita costante, periodica, intera, immediata posticipata e temporanea

Rendita che inizia oggi, ha durata 5 anni e paga rate annue costanti posticipate di £ 100 al tasso di interesse effettivo annuo *i* = 10%

0	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

$$V_0 = R \cdot a_{\overline{5}|10\%} = 100 \cdot \frac{1-(1+0.1)^{-5}}{0.1} = 379.08$$

Esempio A.2

Rendita costante, periodica, intera, immediata anticipata e temporanea

Rendita che inizia oggi, ha durata 5 anni e paga rate annue costanti anticipate di £ 100 al tasso di interesse effettivo annuo *i* = 10%

100	**100**	**100**	**100**	**100**	**0**
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

$$V_0 = R \cdot \ddot{a}_{\overline{5}|10\%} = 100 \cdot \frac{1-(1+0.1)^{-5}}{0.1} \cdot 1.1 = 416.99$$

A.3. Rendita costante, periodica, intera, immediata posticipata e perpetua

Infinite rate di uguale ammontare *R*, ognuna riferita all'istante finale della corrispondente scadenza

0	***R***	**….**	***R***	***R***	***R***	**….**	
0	**1**	**….**	***t*-1**	***t***	***t*+1**	**….**	**¥**

$$V_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot a_{\overline{\infty}|i} = \frac{R}{i}$$

ß

$$a_{\overline{\infty|}i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n|}i} = \frac{1}{i}$$

<u>Dimostrazione</u>

$$\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n|}i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-0}{i} = \frac{1}{i}$$

A.4. Rendita costante, periodica, intera, immediata anticipata e perpetua

Infinite rate di uguale ammontare *R*, ognuna riferita all'istante iniziale della corrispondente scadenza

R ***R*** **….** ***R*** ***R*** ***R*** **….**

0 **1** **….** ***t*-1** ***t*** ***t*+1** **….** **¥**

$$V_0 = \lim_{n \to \infty} \sum_{s=0}^{n-1} R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{R}{d}$$

ß

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = (1+i)\cdot a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1+i}{i} = \frac{1}{d}$$

Dimostrazione

$$\lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot(1+i) = \frac{1-0}{i}\cdot(1+i)$$

$$= \frac{1+i}{i} = \frac{1}{d}$$

Esempio A.3

Rendita costante, periodica, intera, immediata posticipata e perpetua

Rendita che inizia oggi, ha durata infinita e paga rate annue costanti posticipate di £ 100 al tasso di interesse effettivo annuo *i* = 10%

0 100 100 100 ….

—||———||————||————||——————

0 1 2 3 …. ¥

$$V_0 = R \cdot a_{\overline{\infty}|10\%} = \frac{100}{0.1} = 1000$$

Esempio A.4

Rendita costante, periodica, intera, immediata anticipata e perpetua

Rendita che inizia oggi, ha durata infinita e paga rate annue costanti anticipate di £ 100 al tasso di interesse effettivo annuo *i* = 10%

100	100	100	100	….	
0	1	2	3	….	¥

$$V_0 = R \cdot \ddot{a}_{\overline{\infty|}10\%} = \frac{100}{0.1} \cdot 1.1 = \frac{100}{0.0909} = 1100$$

B. Rendita costante, periodica, intera, differita

Costante Þ **Stessa rata *R***

Periodica Þ **Intervallo tra rate sempre uguale**

Intera Þ **Riferita al periodo unitario**

Differita Þ **Prima rata riferita a periodo *k*, *k*>0**

ß

Posticipata	**oppure**	**Anticipata**
Temporanea	**oppure**	**Perpetua**

ß

Il valore di una rendita differita di k periodi è uguale al valore della corrispondente rendita immediata moltiplicata per $(1+i)^{-k}$

B.1. Rendita costante, periodica, intera, differita posticipata e temporanea

n **rate di uguale ammontare *R*, ognuna riferita all'istante finale della corrispondente scadenza.**

Prima rata riferita al *k*-esimo periodo

	0	***R***	**….**	***R***	**….**	***R***	***R***	
0 $\longrightarrow$	***k***	***k*+1**	**….**	***k*+*t***	**….**	***k*+*n*-1**	***k*+*n***	

$$V_0 = (1+i)^{-k} \cdot \sum_{s=1}^{n} R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot (1+i)^{-k} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

“ *a* figurato *n* al tasso *i* differito *k* ”

$${}_{k/}a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-k} \cdot a_{\overline{n}|i}$$

B.2. Rendita costante, periodica, intera, differita anticipata e temporanea

n **rate di uguale ammontare** ***R*****, ognuna riferita all'istante iniziale della corrispondente scadenza**

Prima rata riferita al ***k*****-esimo periodo**

	R	***R***	**….**	***R***	**….**	***R***	**0**
0 →	***k***	***k*+1**	**….**	***k*+*t***	**….**	***k*+*n*-1**	***k*+*n***

$$V_0 = (1+i)^{-k} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot (1+i)^{-k+1} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

“ *a* anticipato figurato *n* al tasso *i* differito *k* ”

$$_{k/}\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = (1+i)^{-k} \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}\,i}$$

Esempio B.1

Rendita costante, periodica, intera, differita posticipata e temporanea

Rendita che inizia fra 2 anni, ha durata 5 anni e paga rate annue costanti posticipate di £ 100 al tasso di interesse effettivo annuo *i* = 10%

0	**0**	**0**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

$$V_0 = R \cdot {}_{2/}a_{\overline{5}|10\%} = 100 \cdot \frac{1-(1+0.1)^{-5}}{0.1} \cdot (1.1)^{-2} = 313.29$$

Esempio B.2

Rendita costante, periodica, intera, differita anticipata e temporanea

Rendita che inizia fra 2 anni, ha durata 5 anni e paga rate annue costanti anticipate di £ 100 al tasso di interesse effettivo annuo *i* = 10%

0	**0**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**0**
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

$$V_0 = R \cdot {}_{2/}\ddot{a}_{\overline{5}|10\%} = 100 \cdot \frac{1-\left(1+0.1\right)^{-5}}{0.1} \cdot (1.1)^{-2+1} = 344.62$$

B.3. Rendita costante, periodica, intera, differita posticipata e perpetua

Infinite rate di uguale ammontare *R*, ognuna riferita all'istante finale della corrispondente scadenza
Prima rata riferita al *k*-esimo periodo

	0	***R***	**….**	***R***	**….**		
0 →	***k***	***k*+1**	**….**	***k*+*t***	**….**		**¥**

$$V_0 = (1+i)^{-k} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot \frac{1}{i} \cdot (1+i)^{-k}$$

$${}_{k/}a_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-k} \cdot a_{\overline{\infty}|i}$$

B.4. Rendita costante, periodica, intera, differita anticipata e perpetua

Infinite rate di uguale ammontare *R*, ognuna riferita all'istante iniziale della corrispondente scadenza
Prima rata riferita al *k*-esimo periodo

R ***R*** **….** ***R*** **…….**

0 ***k*** ***k*+1** **….** ***k*+*t*** **…….** **¥**

$$V_0 = (1+i)^{-k} \cdot \lim_{n\to\infty}\sum_{s=0}^{n-1} R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot \frac{1}{d} \cdot (1+i)^{-k}$$

$$_{k/}\ddot{a}_{\overline{\infty|}\, i} = (1+i)^{-k} \cdot \ddot{a}_{\overline{\infty|}\, i}$$

Esempio B.3

Rendita costante, periodica, intera, differita posticipata e perpetua

Rendita che inizia fra 2 anni, ha durata infinita e paga rate annue costanti posticipate di £ 100 al tasso di interesse effettivo annuo *i* = 10%

0	**0**	**0**	**100**	**100**	**100**	**….**	
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**….**	**¥**

$$V_0 = R \cdot {}_{2/}a_{\overline{\infty}|10\%} = \frac{100}{0.1} \cdot (1.1)^{-2} = 826.24$$

Esempio B.4

Rendita costante, periodica, intera, differita anticipata e perpetua

Rendita che fra 2 anni, ha durata infinita e paga rate annue costanti anticipate di £ 100 al tasso di interesse effettivo annuo *i* = 10%

0	**0**	**100**	**100**	**100**	**100**	**….**	
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**….**	**¥**

$$V_0 = R \cdot \ddot{a}_{\overline{\infty}|10\%} = \frac{100}{0.1} \cdot (1.1)^{-2+1} = \frac{100}{0.0909} \cdot (1.1)^{-2} = 909.09$$

C. Rendita costante, periodica, frazionata, immediata

Costante Þ Stessa rata *R*

Periodica Þ Intervallo tra rate sempre uguale

Frazionata Þ Riferita a frazione di periodo unitario

Immediata Þ Prima rata riferita al primo periodo

ß

Posticipata	**oppure**	**Anticipata**
Temporanea	**oppure**	**Perpetua**

C.1. Rendita costante, periodica, frazionata, immediata posticipata e temporanea

$n \times m$ rate di uguale ammontare *R/m*, ognuna riferita all'istante finale della corrispondente scadenza.

***m* scadenze per periodo unitario**

0	***R/m***	***R/m***	**…**	***R/m***	***R/m***	***R/m***	**...**	***R/m***	**…**	***R/m***	***R/m***
0	**1/*m***	**2/*m***	**…**	**1**	**1+1/*m***	**1+2/*m***	**...**	**2**	**…**	***n*-1/*m***	***n***

$$V_0 = \sum_{s=1}^{n \cdot m} \frac{R}{m} \cdot \left(1 + i_{1/m}\right)^{-s} = \frac{R}{m} \cdot \frac{1 - \left(1 + i_{1/m}\right)^{-n \cdot m}}{i_{1/m}}$$

ß

$$V_0 = R \cdot a_{\overline{n|}i}^{(m)}$$

ß

$$a_{\overline{n|}i}^{(m)} = \frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{n|}i}$$

ß

Dimostrazione

ß

$$\sum_{s=1}^{n\cdot m}\frac{R}{m}\cdot\left(1+i_{1/m}\right)^{-s}=\frac{R}{m}\cdot\frac{1-\left(1+i_{1/m}\right)^{-n\cdot m}}{i_{1/m}}$$

$$=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n\cdot m/m}}{m\cdot i_{1/m}}$$

$$=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot\frac{i}{j(m)}$$

$$=R\cdot\frac{i}{j(m)}\cdot a_{\overline{n|}\,i}$$

C.2. Rendita costante, periodica, frazionata, immediata anticipata e temporanea

$n \times m$ rate di uguale ammontare R/m, ognuna riferita all'istante iniziale della corrispondente scadenza.
m scadenze per periodo unitario

R/m	R/m	R/m …	R/m	R/m	R/m …	R/m …	R/m	0
0	$1/m$	$2/m$ …	1	$1+1/m$	$1+2/m$ …	2 …	$n-1/m$	n

$$V_0 = \sum_{s=0}^{n\cdot m-1} \frac{R}{m} \cdot \left(1+i_{1/m}\right)^{-s} = \frac{R}{m} \cdot \frac{1-\left(1+i_{1/m}\right)^{-n\cdot m}}{i_{1/m}} \cdot \left(1+i_{1/m}\right)$$

ß

$$V_0 = R \cdot \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}i}$$

ß

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}i} = (1+i_{1/m}) \cdot \frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{n|}i}$$

ß

Dimostrazione

(Come sopra)

Esempio C.1

Rendita costante, periodica, frazionata, immediata posticipata e temporanea

Rendita che inizia oggi, ha durata 3 anni e paga rate semestrali costanti posticipate di £ 50 (£ 100 in termini annui) al tasso di interesse effettivo annuo *i* = 10%

0	100/2	100/2	100/2	100/2	100/2	100/2
0	0.5	1	1.5	2	2.5	3

$$V_0 = \frac{100}{2} \cdot \frac{1-(1+0.0488)^{-3\cdot 2}}{0.0488} = \frac{100 \cdot 0.1}{0.0976} \cdot \frac{1-(1+0.1)^{-3}}{0.1} = 254.75$$

Esempio C.2

Rendita costante, periodica, frazionata, immediata anticipata e temporanea

Rendita che inizia oggi, ha durata 3 anni e paga rate semestrali costanti anticipate di £ 50 (£ 100 in termini annui) al tasso di interesse effettivo annuo *i* = 10%

100/2	100/2	100/2	100/2	100/2	100/2	0
0	0.5	1	1.5	2	2.5	3

$$V_0 = \frac{100}{2} \cdot \frac{1-(1+0.0488)^{-3\cdot 2}}{0.0488} \cdot (1.0488) = 267.19$$

C.3. Rendita costante, periodica, frazionata, immediata posticipata e perpetua

Infinite rate di uguale ammontare *R/m*, ognuna riferita all'istante finale della corrispondente scadenza.
***m* scadenze per periodo unitario**

0 *R/m* *R/m* ... *R/m* *R/m* *R/m* …. *R/m* …
||______||______||_______||______||______||________||_________
0 1/*m* 2/*m* ... 1 1+1/*m* 1+2/*m* …. 2 … ¥

$$V_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n\cdot m} \frac{R}{m}\cdot(1+i_{1/m})^{-s} = \frac{R}{j(m)}$$

ß

$$a_{\overline{\infty|}i}^{(m)} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n|}i}^{(m)} = \frac{1}{j(m)}$$

ß

Dimostrazione

$$\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n|}i}^{(m)} = \lim_{n\to\infty} \frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{n|}i} = \frac{i}{j(m)} \cdot \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n|}i}$$

$$= \frac{i}{j(m)} \cdot \frac{1}{i} = \frac{1}{j(m)}$$

C.4. Rendita costante, periodica, frazionata, immediata anticipata e perpetua

Infinite rate di uguale ammontare *R/m*, ognuna riferita all'istante iniziale della corrispondente scadenza.
***m* scadenze per periodo unitario**

R/m	***R/m***	***R/m***	**….**	***R/m***	***R/m***	***R/m***	**….**	***R/m***	**….**	
0	**1/*m***	**2/*m***	**….**	**1**	**1+1/*m***	**1+2/*m***	**….**	**2**	**….**	**¥**

$$V_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=0}^{n\cdot m-1} \frac{R}{m} \cdot (1+i_{1/m})^{-s} = \frac{R}{j(m)} \cdot (1+i_{1/m})$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i} = (1+i_{1/m}) \cdot \frac{1}{j(m)}$$

Esempio C.3

Rendita costante, periodica, frazionata, immediata posticipata e perpetua

Rendita che inizia oggi, ha durata infinita e paga rate semestrali costanti posticipate di £ 50 (£ 100 in termini annui) al tasso di interesse effettivo annuo *i* = 10%

0	**100/2**	**100/2**	**100/2**	**100/2**	
0	**0.5**	**1**	**1.5**	**2**	**¥**

$$V_0 = \frac{100}{0.0976} = 1024.40$$

Esempio C.4

Rendita costante, periodica, frazionata, immediata posticipata e perpetua

Rendita che inizia oggi, ha durata infinita e paga rate semestrali costanti anticipate di £ 50 (£ 100 in termini annui) al tasso di interesse effettivo annuo *i* = 10%

100/2	100/2	100/2	100/2	
0	0.5	1	1.5	¥

$$V_0 = \frac{100}{0.0976} \cdot (1 + 0.0488) = 1074.40$$

D. Rendita costante, periodica, continua, immediata, temporanea

Costante	**Þ**	**Stessa rata *R***
Periodica	**Þ**	**Intervallo tra rate sempre uguale**
Continua	**Þ**	**Riferita a frazione infinitesimale di periodo unitario**
Immediata	**Þ**	**Prima rata riferita al primo periodo**
Temporanea	**Þ**	**Numero di rate finito**

ß

Posticipata = Anticipata

ß

Rendite continue caso limite delle rendite frazionate quando il numero *m* delle rate corrisposte nel periodo unitario tende a diventare infinito

$$V_0 = \lim_{m \to \infty} \sum_{s=1}^{n \cdot m} \frac{R}{m} \cdot (1 + i_{1/m})^{-s} = R \cdot \bar{a}_{\overline{n|}i}$$

$$\bar{a}_{\overline{n|}i} = \lim_{m \to \infty} a_{\overline{n|}i}^{(m)} = \lim_{m \to \infty} \ddot{a}_{\overline{n|}i}^{(m)} = \frac{i}{d} \cdot a_{\overline{n|}i}$$

Rendita costante, periodica, temporanea, immediata

	Posticipata	**Anticipata**
Intera	$a_{\overline{n}\|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$\ddot{a}_{\overline{n}\|i} = (1+i)\cdot a_{\overline{n}\|i}$
Frazionata	$a^{(m)}_{\overline{n}\|i} = \dfrac{i}{j(m)}\cdot a_{\overline{n}\|i}$	$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\|i} = (1+i_{1/m})\cdot\dfrac{i}{j(m)}\cdot a_{\overline{n}\|i}$
Continua	==	$\bar{a}_{\overline{n}\|i} = \dfrac{i}{d}\cdot a_{\overline{n}\|i}$

PROBLEMI INVERSI

Dato valore attuale di una rendita, determinare rata *R* oppure numero di rate *n* oppure tasso di interesse *i*

Si considera il problema per il caso di una rendita costante, periodica, intera, immediata, posticipata e temporanea

0	R	**….**	R	R	R	**….**	R	R
0	**1**	**….**	$t-1$	t	$t+1$	**….**	$n-1$	n

Valore attuale

$$V_0 = R \cdot a_{\overline{n|}\,i} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Rata

$$R = \frac{V_0}{a_{\overline{n|}\,i}} = \frac{V_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Numero rate

$$n = \frac{-\log\left(1-\frac{V_0 \cdot i}{R}\right)}{\log(1+i)}$$

RICERCA DEL TASSO DI INTERESSE (OVVERO, RICERCA DEL T.I.R.)

Problema:

dati V_0 , R , n , determinare i nell'espressione

$$V_0 = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ß

$$i = \frac{1-(1+i)^{-n}}{(V_0/R)}$$

ß

$$y(i) = z(i)$$

METODO ITERATIVO

1. **Si fissa un valore iniziale i_0 e si calcolano le due funzioni $y(i)$ e $z(i)$ in corrispondenza di tale tasso**

   Se $z(i_0) > y(i_0)$, allora $z(i_0) = y(i_1)$ con $i_1 > i_0$

2. **Si calcolano le funzioni $y(i)$ e $z(i)$ per il tasso i_1**

   Se $z(i_1) > y(i_1)$, allora $z(i_1) = y(i_2)$ con $i_2 > i_1$

3. **Si calcolano le funzioni $y(i)$ e $z(i)$ per il tasso i_2**

   Se $z(i_2) > y(i_2)$, allora $z(i_2) = y(i_3)$ con $i_3 > i_2$

E così via fino all'*h*-esima iterazione, tale per cui il tasso i_h soddisfa l'uguaglianza fra le due funzioni:

$$z(i_h) \cong y(i_h)$$

Il tasso i_h è il tasso cercato, ovvero il T.I.R. dell'operazione considerata

ß

Condizione necessaria e sufficiente affinché la rendita abbia un T.I.R. positivo è che la somma delle rate (incassi futuri) sia maggiore del valore attuale (prezzo)

Condizione sufficiente affinché esista un unico T.I.R. positivo è che gli importi relativi alla rendita cambino segno una sola volta (esborso iniziale negativo e rate positive)

Esempio

Rendita periodica, intera, immediata, posticipata di durata 3 anni, rata costante \$50 e valore attuale \$125

Qual è il tasso di interesse (il T.I.R.) della rendita?

Applicazione del metodo iterativo

1. Scelta del valore iniziale $i_0 = 8\%$

$$z(8\%) = 0.08247 > y(8\%) = 0.08$$

$z(8\%) = y(8.247\%)$ **e quindi** $i_1 = 8.247\%$

2. Calcolo delle funzioni al tasso $i_1 = 8.247\%$

$$z(8.247\%) = 0.08463 > y(8.247\%) = 0.08247$$

$z(8.247\%) = y(8.463\%)$ **e quindi** $i_2 = 8.463\%$

…… e così via ……

40. Calcolo delle funzioni al tasso $i_{40} = 9.70\%$

$$z(9.70\%) = 0.097 = y(9.70\%)$$

Iterazione	$y(i)$	$z(i)$	Differenza
1	**0.08000**	**0.08247**	**0.00247**
2	**0.08247**	**0.08463**	**0.00216**
3	**0.08463**	**0.08652**	**0.00189**
……….	**……….**	**……….**	**……….**
……….	**……….**	**……….**	**……….**
39	**0.09699**	**0.09700**	**0.00001**
40	**0.09700**	**0.09700**	**0**

INDICI TEMPORALI E INDICI DI VARIABILITA’

Si consideri una rendita variabile, periodica, intera, immediata, posticipata e temporanea (per esempio, un titolo obbligazionario con cedole annuali)

0	R_1	**…….**	R_{t-1}	R_t	R_{t+1}	**….**	R_{n-1}	R_n
0	**1**	**…….**	***t*-1**	***t***	***t*+1**	**….**	***n*-1**	***n***

L’orizzonte temporale di questa rendita è [0 , *n*]

Il tempo alla scadenza della rendita è *n*

Scadenza media aritmetica

$$\bar{t} = \frac{\sum_{s=1}^{n} s \cdot R_s}{\sum_{s=1}^{n} R_s}$$

Media aritmetica ponderata delle scadenze *s* ,
con pesi pari agli importi futuri R_s

ß

Indipendente dal tasso di interesse

Esempio

Scadenza media aritmetica di un titolo obbligazionario (rendita variabile, periodica, frazionata, immediata, posticipata e temporanea) con scadenza 3 anni, cedola semestrale \$5 e valore nominale \$100

$$\bar{t} = \frac{\sum_{s=0.5}^{3} s \cdot R_s}{\sum_{s=0.5}^{3} R_s} = \frac{0.5 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 1.5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2.5 \cdot 5 + 3 \cdot 105}{5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 105}$$

$$= \frac{352.5}{130} = 2.71$$

Durata media finanziaria (duration)

$$D = \frac{\sum_{s=1}^{n} s \cdot R_s \cdot (1+i)^{-s}}{\sum_{s=1}^{n} R_s \cdot (1+i)^{-s}}$$

Media aritmetica ponderata delle scadenze *s* ,
con pesi uguali al valore attuale percentuale degli importi futuri R_s

ß

Funzione del tasso di interesse

Esempio

Duration (durata media finanziaria) di un titolo obbligazionario (rendita variabile, periodica, frazionata, immediata, posticipata e temporanea) con scadenza 3 anni, cedola semestrale \$5, valore nominale \$100 e T.I.R. 7%

$$D=\frac{\begin{pmatrix}0.5\cdot 5\cdot (1.07)^{-0.5}+1\cdot 5\cdot (1.07)^{-1}+1.5\cdot 5\cdot (1.07)^{-1.5}\\ +2\cdot 5\cdot (1.07)^{-2}+2.5\cdot 5\cdot (1.07)^{-2.5}+3\cdot 105\cdot (1.07)^{-3}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}5\cdot (1.07)^{-0.5}+5\cdot (1.07)^{-1}+5\cdot (1.07)^{-1.5}\\ +5\cdot (1.07)^{-2}+5\cdot (1.07)^{-2.5}+105\cdot (1.07)^{-3}\end{pmatrix}}$$

$$=\frac{290.29}{108.32}=2.68$$

La duration rappresenta anche un indice di variabilità del valore di una rendita, in quanto funzione della derivata del valore attuale rispetto al tasso di interesse

$$V_0' \equiv \frac{dV_0}{di} = -\frac{1}{1+i} \cdot \sum_{s=1}^{n} s \cdot R_s \cdot (1+i)^{-s}$$

$$= -\frac{1}{1+i} \cdot D \cdot \sum_{s=1}^{n} R_s \cdot (1+i)^{-s} = -\frac{1}{1+i} \cdot D \cdot V_0$$

ß

$$D = -\frac{V_0'}{V_0} \cdot (1+i)$$

Elasticità del valore attuale rispetto al tasso di interesse

Duration modificata

$$DM = \frac{1}{1+i} \cdot D = -\frac{V_0'}{V_0}$$

Duration modificata misura la variazione percentuale del valore attuale della rendita (V_0) al variare del tasso di interesse i

$$DM = -\frac{V_0'}{V_0} = -\frac{dV_0}{di} \cdot \frac{1}{V_0}$$

Esempio

Qual è la variazione percentuale del prezzo di un titolo obbligazionario (rendita variabile, periodica, frazionata, immediata, posticipata e temporanea) con scadenza 3 anni, cedola semestrale \$5, valore nominale \$100 e T.I.R. 7%, se il T.I.R. scende al 5%

Duration di questo titolo è 2.68 (esempio precedente)

$$DM = \frac{1}{1+i} \cdot D = \frac{1}{1.07} \cdot 2.68 = 2.50$$

$$\frac{dV_0}{V_0} = -DM \cdot di = -2.50 \cdot (-0.02) = 0.05 = +5\%$$