

MATEMATICA FINANZIARIA

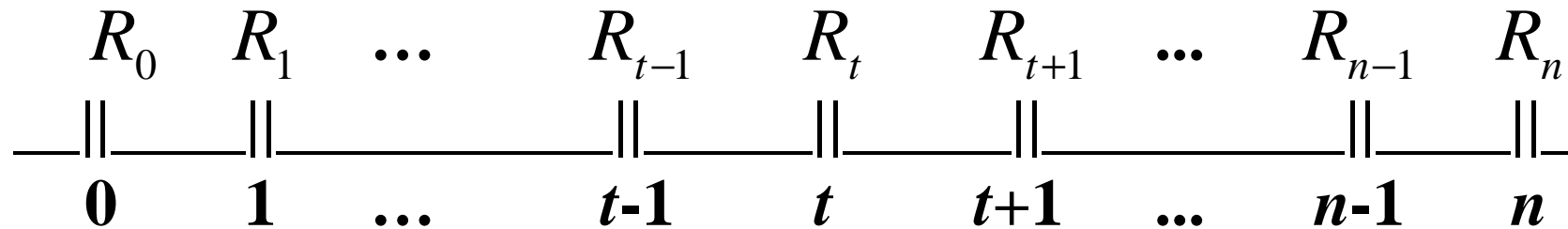
Prof. Andrea Berardi

1999

3. RENDITE

RENDITA

Operazione finanziaria composta, caratterizzata da $n+1$ scadenze $(0, 1, \dots, t, \dots, n-1, n)$ e da $n+1$ importi da pagare o riscuotere a quelle scadenze $(R_0, R_1, \dots, R_t, \dots, R_{n-1}, R_n)$



Singoli importi $R_0, R_1, \dots, R_t, \dots, R_{n-1}, R_n$

β

RATE della rendita

Se $T = 0$ \mathfrak{P} valore attuale della rendita

$$V_T = \sum_{s=0}^n R_s \cdot v(T; s)$$

Se $T = n$ \mathfrak{P} montante della rendita

$$W_T = \sum_{s=0}^n R_s \cdot r(s; T)$$

Se $0 \leq T \leq n$ \mathfrak{P} valore capitale della rendita

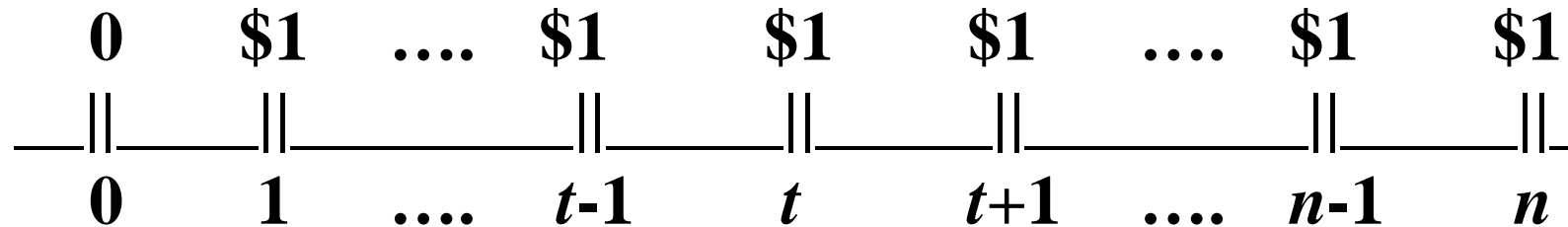
$$A_T = \sum_{s=0}^T R_s \cdot r(s; T) + \sum_{s=T+1}^n R_s \cdot v(T; s)$$

\mathfrak{B}

Valore capitale di una rendita è la somma delle rate riportate “finanziariamente” ad una determinata epoca T

VALORE ATTUALE DI UNA RENDITA

Valore attuale di una rendita che paga \$1 in ogni periodo per n periodi, calcolato utilizzando il tasso effettivo i



$$V_0 = \$1 \cdot \sum_{s=1}^n v(0; s) = \$1 \cdot \sum_{s=1}^n (1+i)^{-s}$$

B

$$\sum_{s=1}^n (1+i)^{-s} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Dimostrazione per $n = 2$:

$$\bullet \sum_{s=1}^2 (1+i)^{-s} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{2+i}{(1+i)^2}$$

$$\bullet \frac{1 - (1+i)^{-2}}{i} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^2}}{i} = \frac{i^2 + 2i}{(1+i)^2} \cdot \frac{1}{i}$$
$$= \frac{i \cdot (2+i)}{i \cdot (1+i)^2} = \frac{2+i}{(1+i)^2}$$

B

In generale, $\forall n$, si ha:
$$\sum_{s=1}^n (1+i)^{-s} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

β

“ a figurato n al tasso i ”

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Valore attuale di un flusso di importi unitari (\$1) per n periodi unitari a partire dal periodo 1, dato un certo tasso i

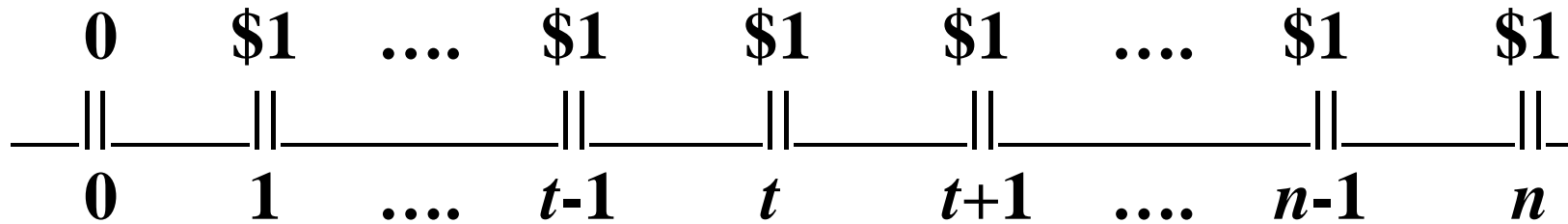
Esempio

$n = 5$ anni, periodo unitario 1 anno, $i = 4\%$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = \frac{1 - (1.04)^{-5}}{0.04} = 4.452$$

MONTANTE DI UNA RENDITA

Montante di una rendita che paga \$1 in ogni periodo per n periodi, calcolato utilizzando il tasso effettivo i



$$W_n = \$1 \cdot \sum_{s=1}^n r(s;n) = \$1 \cdot \sum_{s=1}^n (1+i)^{n-s}$$

B

$$\sum_{s=1}^n (1+i)^{n-s} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

β

“ s figurato n al tasso i ”

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Montante di un flusso di importi unitari (\$1) per n periodi unitari a partire dal periodo 1, dato un certo tasso i

Esempio

$n = 5$ anni, periodo unitario 1 anno, $i = 4\%$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1.04)^5 - 1}{0.04} = 5.416$$

CLASSIFICAZIONE DELLE RENDITE

Periodiche “ **Non periodiche**

Costanti “ **Variabili**

Intere “ **Frazionate** “ **Continue**

Temporanee “ **Perpetue**

Anticipate “ **Posticipate**

Immedieate “ **Differite**

PERIODICHE

Intervallo di tempo intercorrente fra due rate consecutive è *sempre uguale* durante l'orizzonte temporale della rendita

NON-PERIODICHE

Intervallo di tempo intercorrente fra due rate consecutive *varia* durante l'orizzonte temporale della rendita

COSTANTI

Importi delle singole rate sono *tutti uguali*

VARIABILI

Importi delle singole rate sono *variabili*

INTERE

Rate riferite al *periodo unitario* (anno, semestre,...)

FRAZIONATE

Rate riferite a *frazione* del periodo unitario

CONTINUE

Rate riferite a *frazione infinitesimale* del periodo unitario

TEMPORANEE

Numero di rate è *finito*

PERPETUE

Numero di rate è un'*infinità* numerabile

ANTICIPATE

La scadenza di ciascuna rata è riferita all'istante *iniziale* del corrispondente periodo

POSTICIPATE

La scadenza di ciascuna rata è riferita all'istante *finale* del corrispondente periodo

IMMEDIATE

Prima rata è riferita al *primo periodo*

DIFFERITE

Prima rata è riferita ad un periodo *successivo al primo*

FORMULE PER LA VALUTAZIONE DI DIFFERENTI TIPOLOGIE DI RENDITE

A. Rendita costante, periodica, intera, immediata

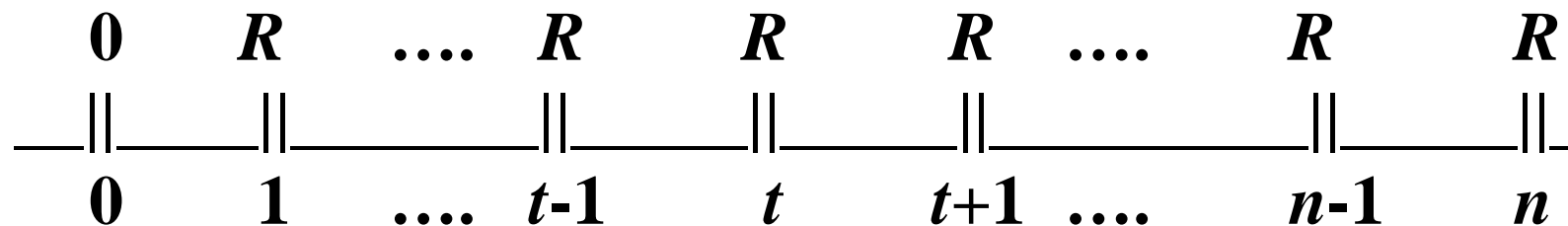
Costante	\mathcal{P}	Stessa rata R
Periodica	\mathcal{P}	Intervallo tra rate sempre uguale
Intera	\mathcal{P}	Riferita al periodo unitario
Immediata	\mathcal{P}	Prima rata riferita al primo periodo

\mathcal{B}

Posticipata	oppure	Anticipata
Temporanea	oppure	Perpetua

A.1. Rendita costante, periodica, intera, immediata posticipata e temporanea

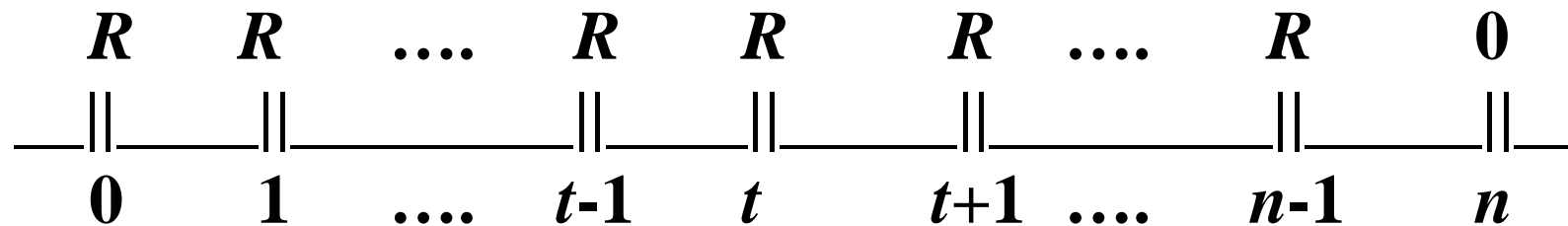
n rate di uguale ammontare R , ognuna riferita all'istante finale della corrispondente scadenza



$$V_0 = \sum_{s=1}^n R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot a_{\overline{n}|i} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

A.2. Rendita costante, periodica, intera, immediata anticipata e temporanea

n rate di uguale ammontare R , ognuna riferita all'istante iniziale della corrispondente scadenza



$$V_0 = \sum_{s=0}^{n-1} R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i} = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

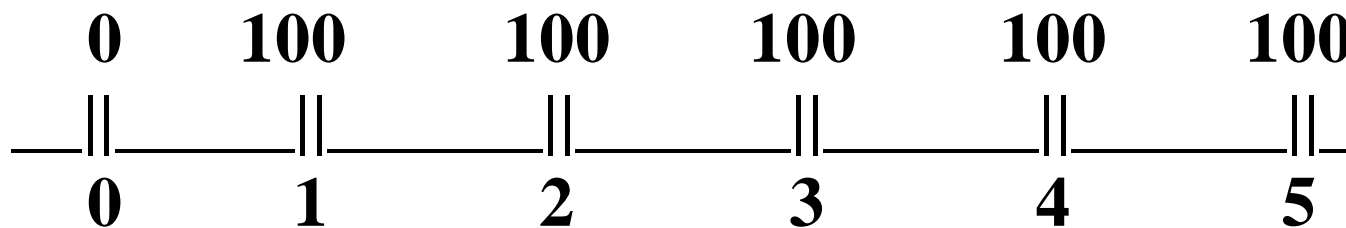
“ a anticipato figurato n al tasso i ”

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i) \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Esempio A.1

**Rendita costante, periodica, intera, immediata
posticipata e temporanea**

**Rendita che inizia oggi, ha durata 5 anni e paga rate annue
costanti posticipate di £ 100 al tasso di interesse effettivo
annuo $i = 10\%$**

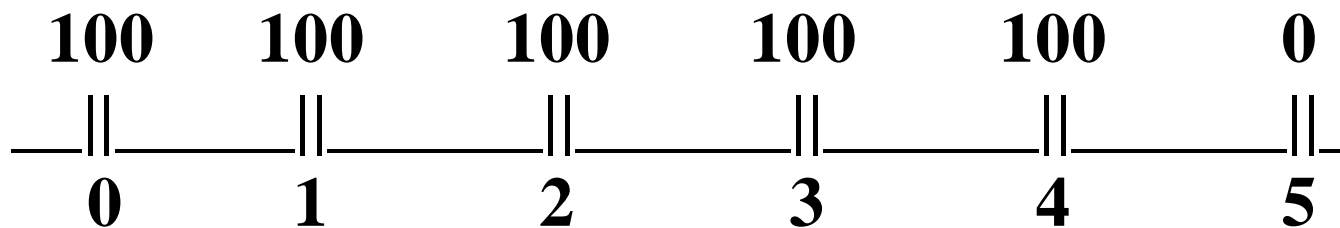


$$V_0 = R \cdot a_{\overline{5}|10\%} = 100 \cdot \frac{1 - (1 + 0.1)^{-5}}{0.1} = 379.08$$

Esempio A.2

**Rendita costante, periodica, intera, immediata
anticipata e temporanea**

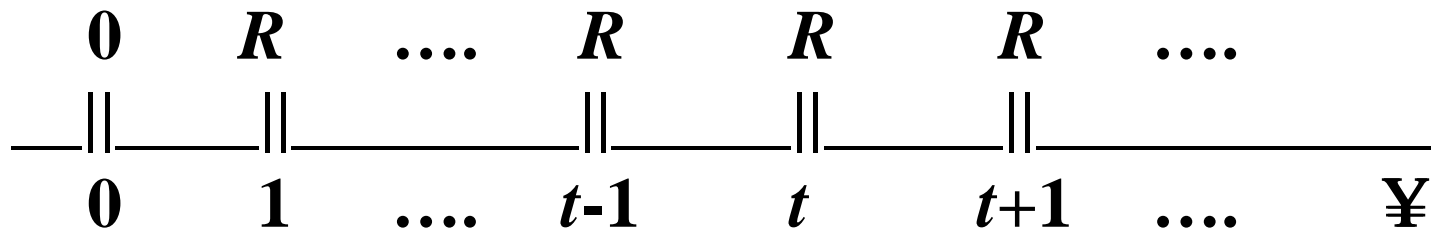
**Rendita che inizia oggi, ha durata 5 anni e paga rate annue
costanti anticipate di £ 100 al tasso di interesse effettivo
annuo $i = 10\%$**



$$V_0 = R \cdot \ddot{a}_{\overline{5}|10\%} = 100 \cdot \frac{1 - (1 + 0.1)^{-5}}{0.1} \cdot 1.1 = 416.99$$

A.3. Rendita costante, periodica, intera, immediata posticipata e perpetua

Infinite rate di uguale ammontare R , ognuna riferita all'istante finale della corrispondente scadenza



$$V_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot a_{\infty|i} = \frac{R}{i}$$

β

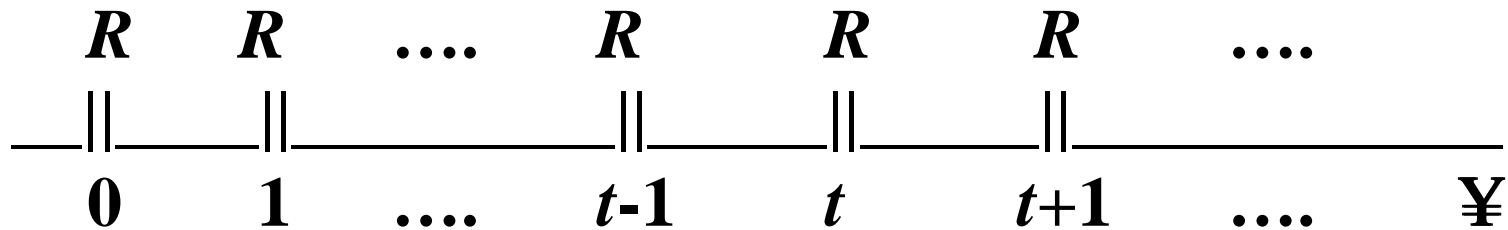
$$a_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n|i} = \frac{1}{i}$$

Dimostrazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-0}{i} = \frac{1}{i}$$

A.4. Rendita costante, periodica, intera, immediata anticipata e perpetua

Infinite rate di uguale ammontare R , ognuna riferita all'istante iniziale della corrispondente scadenza



$$V_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{n-1} R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot \ddot{a}_{\infty|i} = \frac{R}{d}$$

β

$$\ddot{a}_{\infty|i} = (1+i) \cdot a_{\infty|i} = \frac{1+i}{i} = \frac{1}{d}$$

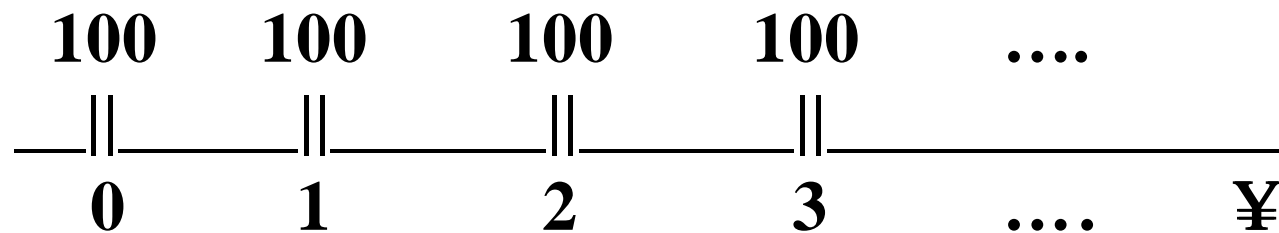
Dimostrazione

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{a}_{n|i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i) = \frac{1-0}{i} \cdot (1+i) \\ &= \frac{1+i}{i} = \frac{1}{d} \end{aligned}$$

Esempio A.4

**Rendita costante, periodica, intera, immediata
anticipata e perpetua**

**Rendita che inizia oggi, ha durata infinita e paga rate annue
costanti anticipate di £ 100 al tasso di interesse effettivo
annuo $i = 10\%$**



$$V_0 = R \cdot \ddot{a}_{\infty|10\%} = \frac{100}{0.1} \cdot 1.1 = \frac{100}{0.0909} = 1100$$

B. Rendita costante, periodica, intera, differita

Costante	Ⓟ	Stessa rata R
Periodica	Ⓟ	Intervallo tra rate sempre uguale
Intera	Ⓟ	Riferita al periodo unitario
Differita	Ⓟ	Prima rata riferita a periodo $k, k > 0$

Ⓟ

Posticipata	oppure	Anticipata
Temporanea	oppure	Perpetua

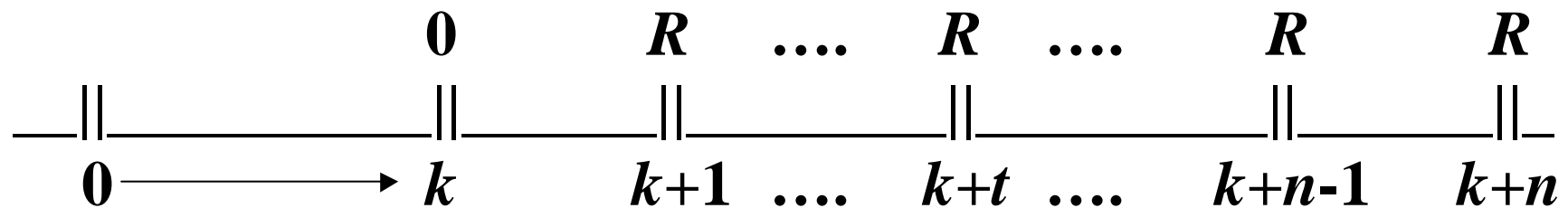
Ⓟ

**Il valore di una rendita differita di k periodi è uguale al
valore della corrispondente rendita immediata
moltiplicata per $(1 + i)^{-k}$**

B.1. Rendita costante, periodica, intera, differita posticipata e temporanea

n rate di uguale ammontare R , ognuna riferita all'istante finale della corrispondente scadenza.

Prima rata riferita al k -esimo periodo



$$V_0 = (1+i)^{-k} \cdot \sum_{s=1}^n R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot (1+i)^{-k} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

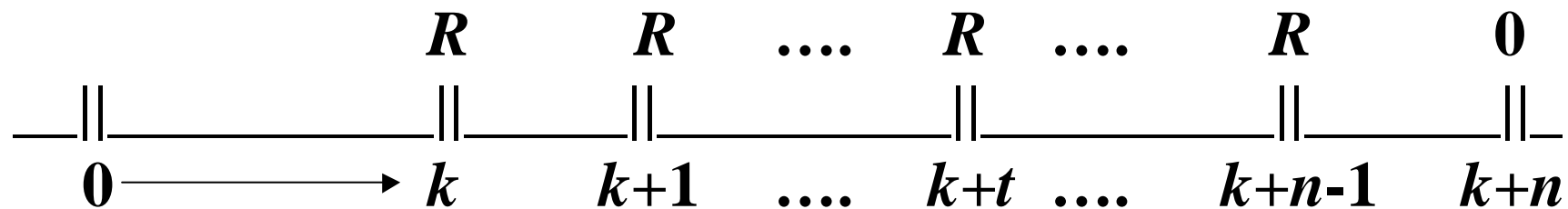
“ a figurato n al tasso i differito k ”

$${}_k/a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-k} \cdot a_{\overline{n}|i}$$

B.2. Rendita costante, periodica, intera, differita anticipata e temporanea

n rate di uguale ammontare R , ognuna riferita all'istante iniziale della corrispondente scadenza

Prima rata riferita al k -esimo periodo



$$V_0 = (1+i)^{-k} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot (1+i)^{-k+1} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

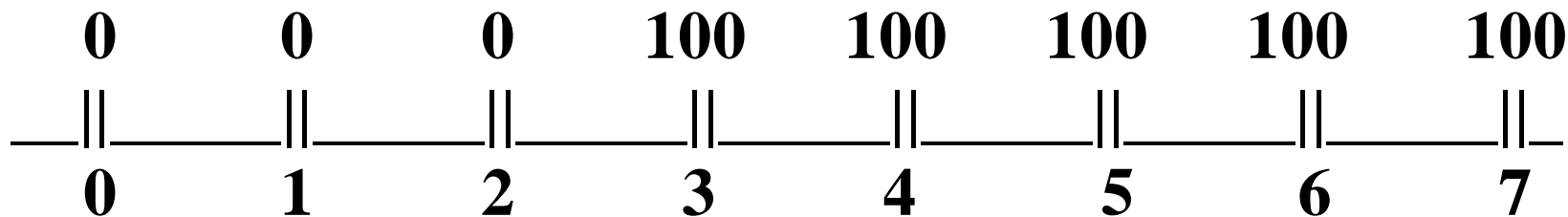
“ a anticipato figurato n al tasso i differito k ”

$${}_{k/} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-k} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

Esempio B.1

**Rendita costante, periodica, intera, differita
posticipata e temporanea**

**Rendita che inizia fra 2 anni, ha durata 5 anni e paga rate
annue costanti posticipate di £ 100 al tasso di interesse
effettivo annuo $i = 10\%$**

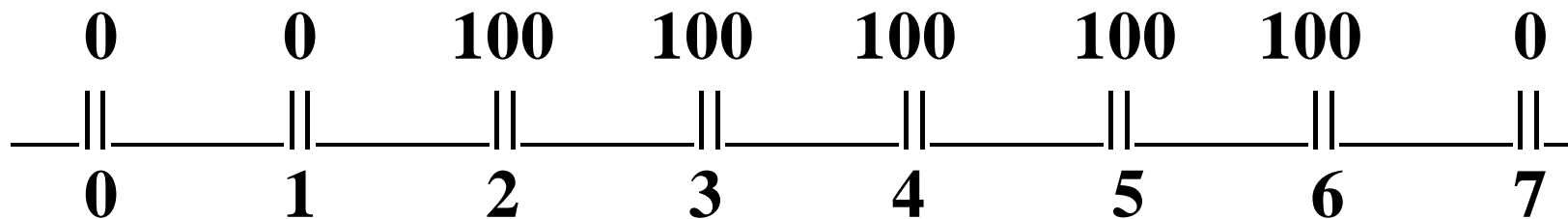


$$V_0 = R \cdot {}_2|a_{\overline{5}|10\%} = 100 \cdot \frac{1 - (1 + 0.1)^{-5}}{0.1} \cdot (1.1)^{-2} = 313.29$$

Esempio B.2

**Rendita costante, periodica, intera, differita
anticipata e temporanea**

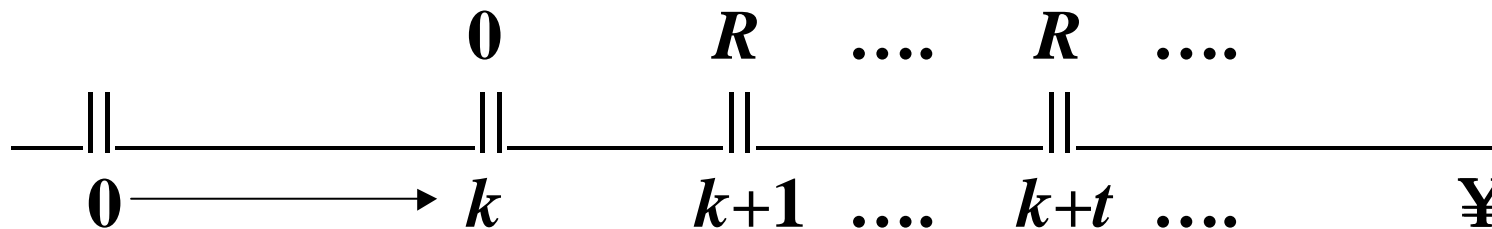
**Rendita che inizia fra 2 anni, ha durata 5 anni e paga rate
annue costanti anticipate di £ 100 al tasso di interesse
effettivo annuo $i = 10\%$**



$$V_0 = R \cdot {}_2| \ddot{a}_{5|10\%} = 100 \cdot \frac{1 - (1 + 0.1)^{-5}}{0.1} \cdot (1.1)^{-2+1} = 344.62$$

B.3. Rendita costante, periodica, intera, differita posticipata e perpetua

**Infinite rate di uguale ammontare R , ognuna riferita
all'istante finale della corrispondente scadenza
Prima rata riferita al k -esimo periodo**

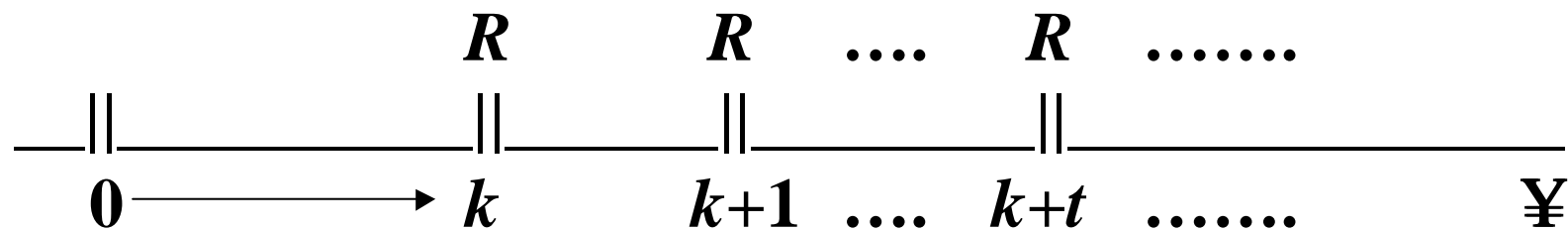


$$V_0 = (1+i)^{-k} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot \frac{1}{i} \cdot (1+i)^{-k}$$

$${}_k/a_{\infty|i} = (1+i)^{-k} \cdot a_{\infty|i}$$

B.4. Rendita costante, periodica, intera, differita anticipata e perpetua

**Infinite rate di uguale ammontare R , ognuna riferita all'istante iniziale della corrispondente scadenza
Prima rata riferita al k -esimo periodo**



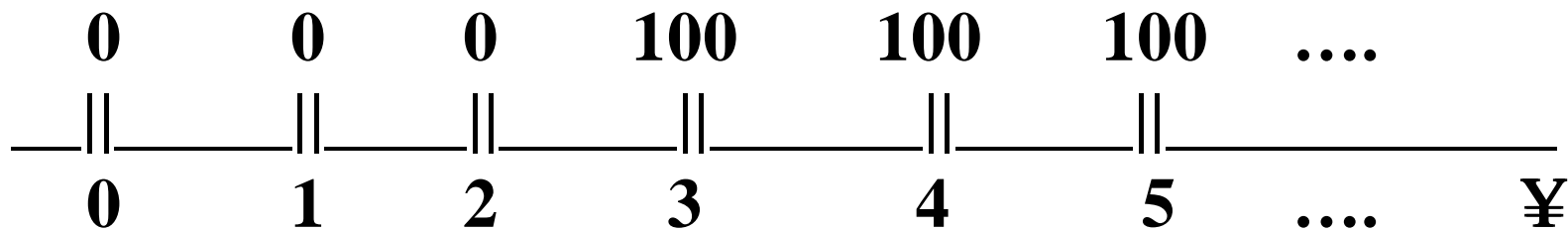
$$V_0 = (1+i)^{-k} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{n-1} R \cdot (1+i)^{-s} = R \cdot \frac{1}{d} \cdot (1+i)^{-k}$$

$${}_{k/} \ddot{a}_{\infty|i} = (1+i)^{-k} \cdot \ddot{a}_{\infty|i}$$

Esempio B.3

**Rendita costante, periodica, intera, differita
posticipata e perpetua**

**Rendita che inizia fra 2 anni, ha durata infinita e paga rate
annue costanti posticipate di £ 100 al tasso di interesse
effettivo annuo $i = 10\%$**

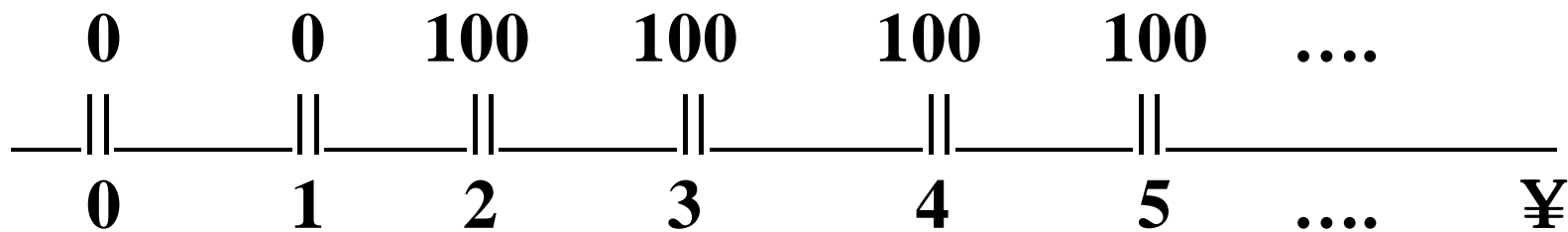


$$V_0 = R \cdot {}_2/a_{\infty|10\%} = \frac{100}{0.1} \cdot (1.1)^{-2} = 826.24$$

Esempio B.4

**Rendita costante, periodica, intera, differita
anticipata e perpetua**

**Rendita che fra 2 anni, ha durata infinita e paga rate annue
costanti anticipate di £ 100 al tasso di interesse effettivo
annuo $i = 10\%$**



$$V_0 = R \cdot \ddot{a}_{\infty|10\%} = \frac{100}{0.1} \cdot (1.1)^{-2+1} = \frac{100}{0.0909} \cdot (1.1)^{-2} = 909.09$$

C. Rendita costante, periodica, frazionata, immediata

Costante	\mathcal{P}	Stessa rata R
Periodica	\mathcal{P}	Intervallo tra rate sempre uguale
Frazionata	\mathcal{P}	Riferita a frazione di periodo unitario
Immediata	\mathcal{P}	Prima rata riferita al primo periodo

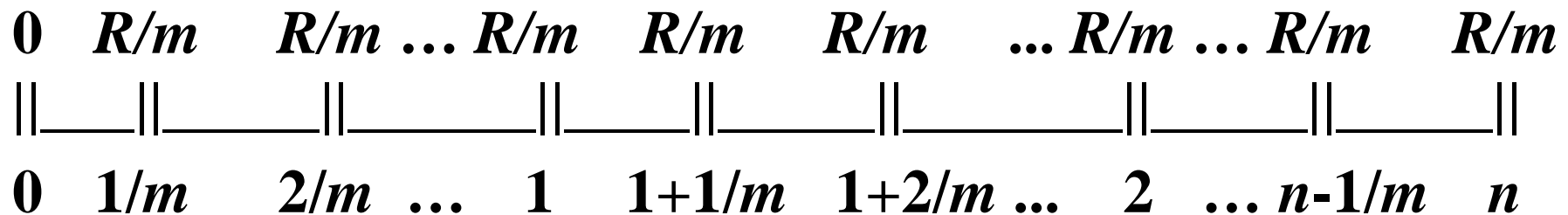
β

Posticipata	oppure	Anticipata
Temporanea	oppure	Perpetua

C.1. Rendita costante, periodica, frazionata, immediata posticipata e temporanea

$n \cdot m$ rate di uguale ammontare R/m , ognuna riferita all'istante finale della corrispondente scadenza.

m scadenze per periodo unitario



$$V_0 = \sum_{s=1}^{n \cdot m} \frac{R}{m} \cdot \left(1 + i_{1/m}\right)^{-s} = \frac{R}{m} \cdot \frac{1 - \left(1 + i_{1/m}\right)^{-n \cdot m}}{i_{1/m}}$$

B

$$V_0 = R \cdot a_{\overline{n}|i}^{(m)}$$

B

$$a_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{n}|i}$$

B

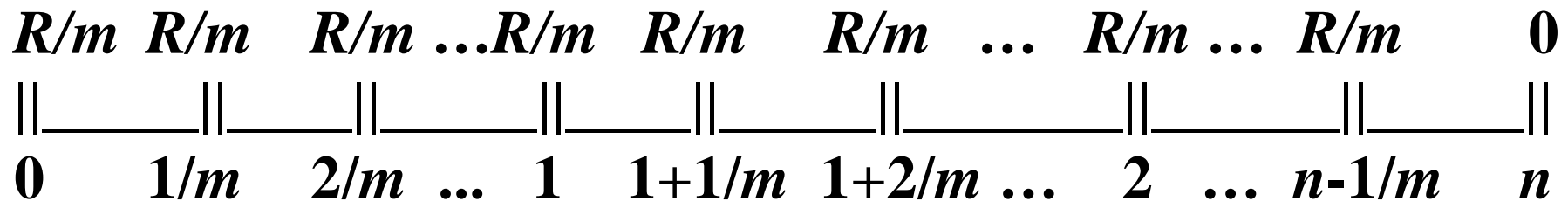
Dimostrazione

B

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n \cdot m} \frac{R}{m} \cdot (1 + i_{1/m})^{-s} &= \frac{R}{m} \cdot \frac{1 - \left(1 + i_{1/m}\right)^{-n \cdot m}}{i_{1/m}} \\
&= R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n \cdot m / m}}{m \cdot i_{1/m}} \\
&= R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \cdot \frac{i}{j(m)} \\
&= R \cdot \frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{n}|i}
\end{aligned}$$

C.2. Rendita costante, periodica, frazionata, immediata anticipata e temporanea

**$n \cdot m$ rate di uguale ammontare R/m , ognuna riferita all'istante iniziale della corrispondente scadenza.
 m scadenze per periodo unitario**



$$V_0 = \sum_{s=0}^{n \cdot m - 1} \frac{R}{m} \cdot \left(1 + i_{\frac{1}{m}}\right)^{-s} = \frac{R}{m} \cdot \frac{1 - \left(1 + i_{\frac{1}{m}}\right)^{-n \cdot m}}{i_{\frac{1}{m}}} \cdot \left(1 + i_{\frac{1}{m}}\right)$$

B

$$V_0 = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)}$$

B

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} = \left(1 + i_{\frac{1}{m}}\right) \cdot \frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{n}|i}$$

B

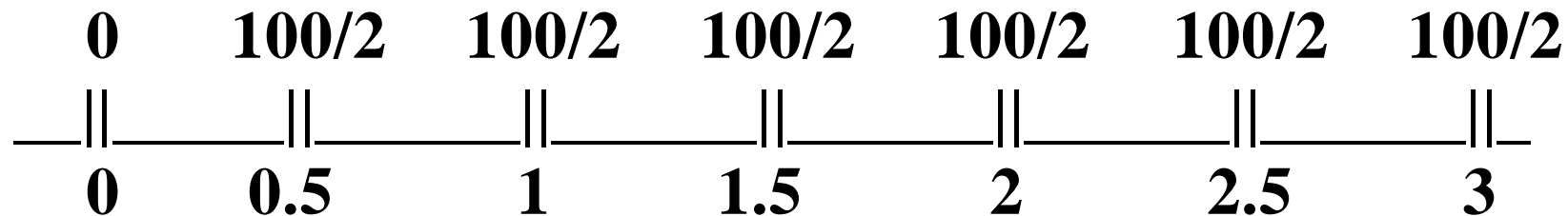
Dimostrazione

(Come sopra)

Esempio C.1

Rendita costante, periodica, frazionata, immediata posticipata e temporanea

Rendita che inizia oggi, ha durata 3 anni e paga rate semestrali costanti posticipate di £ 50 (£ 100 in termini annui) al tasso di interesse effettivo annuo $i = 10\%$

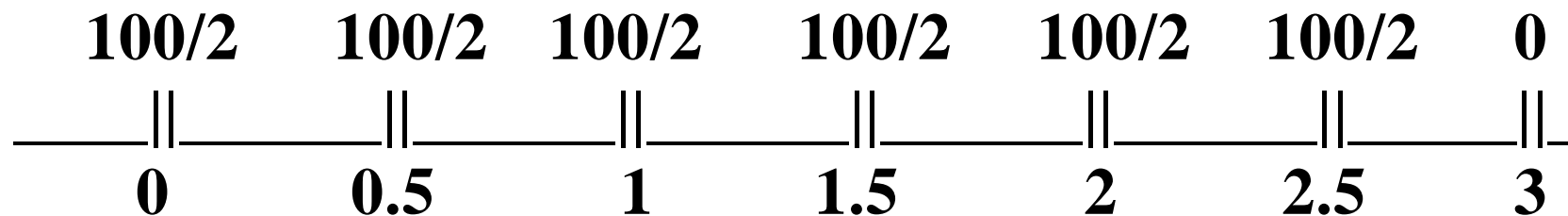


$$V_0 = \frac{100}{2} \cdot \frac{1 - (1 + 0.0488)^{-3 \cdot 2}}{0.0488} = \frac{100 \cdot 0.1}{0.0976} \cdot \frac{1 - (1 + 0.1)^{-3}}{0.1} = 254.75$$

Esempio C.2

Rendita costante, periodica, frazionata, immediata anticipata e temporanea

Rendita che inizia oggi, ha durata 3 anni e paga rate semestrali costanti anticipate di £ 50 (£ 100 in termini annui) al tasso di interesse effettivo annuo $i = 10\%$



$$V_0 = \frac{100}{2} \cdot \frac{1 - (1 + 0.0488)^{-3 \cdot 2}}{0.0488} \cdot (1.0488) = 267.19$$

B

$$a_{\infty|i}^{(m)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n|i}^{(m)} = \frac{1}{j(m)}$$

B

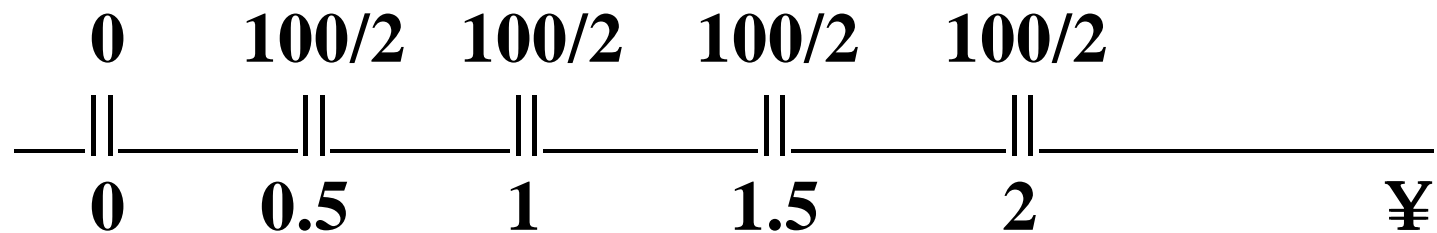
Dimostrazione

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n|i}^{(m)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{j(m)} \cdot a_{n|i} = \frac{i}{j(m)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n|i} \\ &= \frac{i}{j(m)} \cdot \frac{1}{i} = \frac{1}{j(m)} \end{aligned}$$

Esempio C.3

Rendita costante, periodica, frazionata, immediata posticipata e perpetua

Rendita che inizia oggi, ha durata infinita e paga rate semestrali costanti posticipate di £ 50 (£ 100 in termini annui) al tasso di interesse effettivo annuo $i = 10\%$

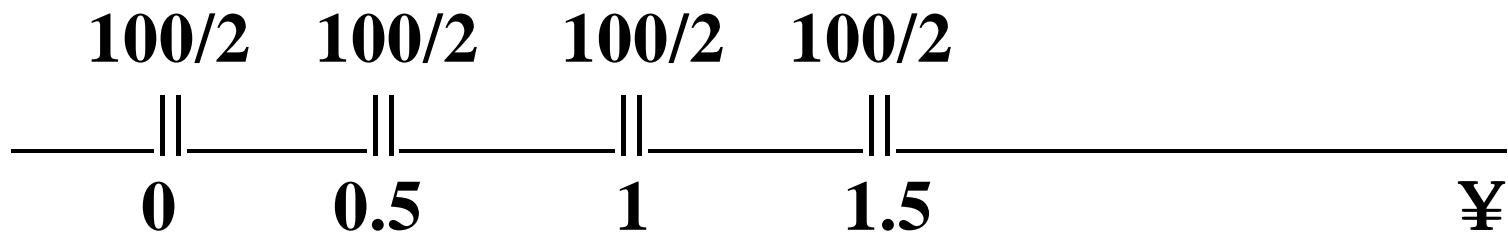


$$V_0 = \frac{100}{0.0976} = 1024.40$$

Esempio C.4

Rendita costante, periodica, frazionata, immediata posticipata e perpetua

Rendita che inizia oggi, ha durata infinita e paga rate semestrali costanti anticipate di £ 50 (£ 100 in termini annui) al tasso di interesse effettivo annuo $i = 10\%$



$$V_0 = \frac{100}{0.0976} \cdot (1 + 0.0488) = 1074.40$$

D. Rendita costante, periodica, continua, immediata, temporanea

Costante	\mathbb{P}	Stessa rata R
Periodica	\mathbb{P}	Intervallo tra rate sempre uguale
Continua	\mathbb{P}	Riferita a frazione infinitesimale di periodo unitario
Immediata	\mathbb{P}	Prima rata riferita al primo periodo
Temporanea	\mathbb{P}	Numero di rate finito

\mathbb{B}

Posticipata = Anticipata

β

Rendite continue caso limite delle rendite frazionate quando il numero m delle rate corrisposte nel periodo unitario tende a diventare infinito

$$V_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{n \cdot m} \frac{R}{m} \cdot \left(1 + i \frac{1}{m}\right)^{-s} = R \cdot \bar{a}_{n|i}$$

$$\bar{a}_{n|i} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n|i}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{n|i}^{(m)} = \frac{i}{d} \cdot a_{n|i}$$

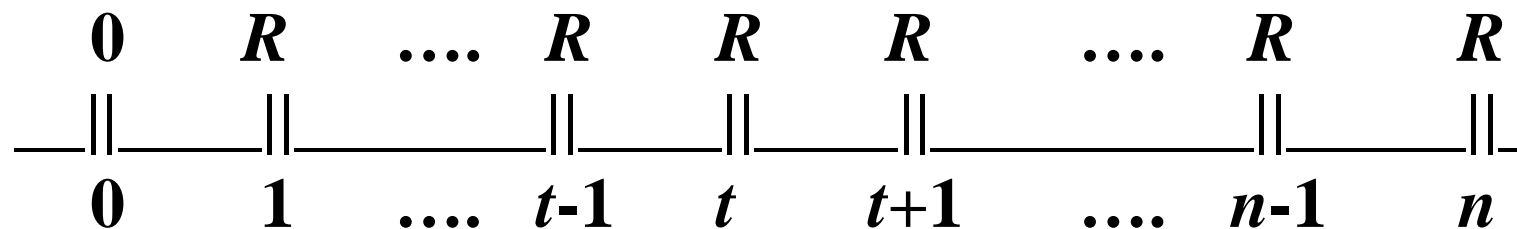
Rendita costante, periodica, temporanea, immediata

	Posticipata	Anticipata
Intera	$a_{\overline{n} i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$	$\ddot{a}_{\overline{n} i} = (1 + i) \cdot a_{\overline{n} i}$
Frazionata	$a_{\overline{n} i}^{(m)} = \frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{n} i}$	$\ddot{a}_{\overline{n} i}^{(m)} = (1 + i_{1/m}) \cdot \frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{n} i}$
Continua	$==$	$\bar{a}_{\overline{n} i} = \frac{i}{d} \cdot a_{\overline{n} i}$

PROBLEMI INVERSI

Dato valore attuale di una rendita, determinare rata R oppure numero di rate n oppure tasso di interesse i

Si considera il problema per il caso di una rendita costante, periodica, intera, immediata, posticipata e temporanea



Valore attuale

$$V_0 = R \cdot a_{\overline{n}|i} = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Rata

$$R = \frac{V_0}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{V_0 \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Numero rate

$$n = \frac{-\log\left(1 - \frac{V_0 \cdot i}{R}\right)}{\log(1 + i)}$$

RICERCA DEL TASSO DI INTERESSE (OVVERO, RICERCA DEL T.I.R.)

Problema:

dati V_0 , R , n , determinare i nell'espressione

$$V_0 = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

β

$$i = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{(V_0/R)}$$

β

$$y(i) = z(i)$$

METODO ITERATIVO

1. Si fissa un valore iniziale i_0 e si calcolano le due funzioni $y(i)$ e $z(i)$ in corrispondenza di tale tasso

Se $z(i_0) > y(i_0)$, allora $z(i_0) = y(i_1)$ con $i_1 > i_0$

2. Si calcolano le funzioni $y(i)$ e $z(i)$ per il tasso i_1

Se $z(i_1) > y(i_1)$, allora $z(i_1) = y(i_2)$ con $i_2 > i_1$

3. Si calcolano le funzioni $y(i)$ e $z(i)$ per il tasso i_2

Se $z(i_2) > y(i_2)$, allora $z(i_2) = y(i_3)$ con $i_3 > i_2$

E così via fino all' h -esima iterazione, tale per cui il tasso i_h soddisfa l'uguaglianza fra le due funzioni:

$$z(i_h) \cong y(i_h)$$

Il tasso i_h è il tasso cercato, ovvero il T.I.R. dell'operazione considerata

β

Condizione necessaria e sufficiente affinché la rendita abbia un T.I.R. positivo è che la somma delle rate (incassi futuri) sia maggiore del valore attuale (prezzo)

Condizione sufficiente affinché esista un unico T.I.R. positivo è che gli importi relativi alla rendita cambino segno una sola volta (esborso iniziale negativo e rate positive)

Esempio

Rendita periodica, intera, immediata, posticipata di durata 3 anni, rata costante \$50 e valore attuale \$125

Qual è il tasso di interesse (il T.I.R.) della rendita?

Applicazione del metodo iterativo

1. Scelta del valore iniziale $i_0 = 8\%$

$$z(8\%) = 0.08247 > y(8\%) = 0.08$$

$$z(8\%) = y(8.247\%) \text{ e quindi } i_1 = 8.247\%$$

2. Calcolo delle funzioni al tasso $i_1 = 8.247\%$

$$z(8.247\%) = 0.08463 > y(8.247\%) = 0.08247$$

$$z(8.247\%) = y(8.463\%) \text{ e quindi } i_2 = 8.463\%$$

..... e così via

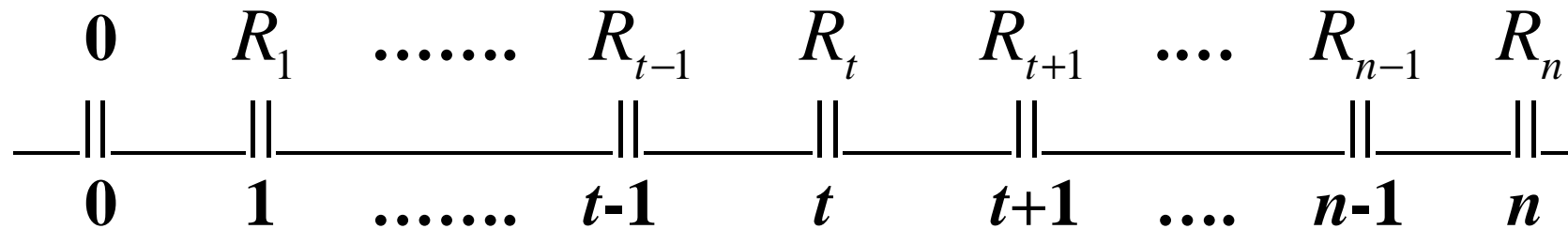
40. Calcolo delle funzioni al tasso $i_{40} = 9.70\%$

$$z(9.70\%) = 0.097 = y(9.70\%)$$

Iterazione	$y(i)$	$z(i)$	Differenza
1	0.08000	0.08247	0.00247
2	0.08247	0.08463	0.00216
3	0.08463	0.08652	0.00189
.....
.....
39	0.09699	0.09700	0.00001
40	0.09700	0.09700	0

INDICI TEMPORALI E INDICI DI VARIABILITA'

Si consideri una rendita variabile, periodica, intera, immediata, posticipata e temporanea (per esempio, un titolo obbligazionario con cedole annuali)



L'orizzonte temporale di questa rendita è $[0, n]$

Il tempo alla scadenza della rendita è n

Scadenza media aritmetica

$$\bar{t} = \frac{\sum_{s=1}^n s \cdot R_s}{\sum_{s=1}^n R_s}$$

**Media aritmetica ponderata delle scadenze s ,
con pesi pari agli importi futuri R_s**

β

Indipendente dal tasso di interesse

Esempio

Scadenza media aritmetica di un titolo obbligazionario (rendita variabile, periodica, frazionata, immediata, posticipata e temporanea) con scadenza 3 anni, cedola semestrale \$5 e valore nominale \$100

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{\sum_{s=0.5}^3 s \cdot R_s}{\sum_{s=0.5}^3 R_s} = \frac{0.5 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 1.5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2.5 \cdot 5 + 3 \cdot 105}{5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 105} \\ &= \frac{352.5}{130} = 2.71\end{aligned}$$

Durata media finanziaria (duration)

$$D = \frac{\sum_{s=1}^n s \cdot R_s \cdot (1+i)^{-s}}{\sum_{s=1}^n R_s \cdot (1+i)^{-s}}$$

**Media aritmetica ponderata delle scadenze s ,
con pesi uguali al valore attuale percentuale degli
importi futuri R_s**

β

Funzione del tasso di interesse

Esempio

Duration (durata media finanziaria) di un titolo obbligazionario (rendita variabile, periodica, frazionata, immediata, posticipata e temporanea) con scadenza 3 anni, cedola semestrale \$5, valore nominale \$100 e T.I.R. 7%

$$D = \frac{\left(0.5 \cdot 5 \cdot (1.07)^{-0.5} + 1 \cdot 5 \cdot (1.07)^{-1} + 1.5 \cdot 5 \cdot (1.07)^{-1.5} \right. \\ \left. + 2 \cdot 5 \cdot (1.07)^{-2} + 2.5 \cdot 5 \cdot (1.07)^{-2.5} + 3 \cdot 105 \cdot (1.07)^{-3} \right)}{\left(5 \cdot (1.07)^{-0.5} + 5 \cdot (1.07)^{-1} + 5 \cdot (1.07)^{-1.5} \right. \\ \left. + 5 \cdot (1.07)^{-2} + 5 \cdot (1.07)^{-2.5} + 105 \cdot (1.07)^{-3} \right)} \\ = \frac{290.29}{108.32} = 2.68$$

La duration rappresenta anche un indice di variabilità del valore di una rendita, in quanto funzione della derivata del valore attuale rispetto al tasso di interesse

$$\begin{aligned}
 V_0' &\equiv \frac{dV_0}{di} = -\frac{1}{1+i} \cdot \sum_{s=1}^n s \cdot R_s \cdot (1+i)^{-s} \\
 &= -\frac{1}{1+i} \cdot D \cdot \sum_{s=1}^n R_s \cdot (1+i)^{-s} = -\frac{1}{1+i} \cdot D \cdot V_0
 \end{aligned}$$

B

$$D = -\frac{V_0'}{V_0} \cdot (1+i)$$

Elasticità del valore attuale rispetto al tasso di interesse

Duration modificata

$$DM = \frac{1}{1+i} \cdot D = -\frac{V'_0}{V_0}$$

Duration modificata misura la variazione percentuale del valore attuale della rendita (V_0) al variare del tasso di interesse i

$$DM = -\frac{V'_0}{V_0} = -\frac{dV_0}{di} \cdot \frac{1}{V_0}$$

Esempio

Qual è la variazione percentuale del prezzo di un titolo obbligazionario (rendita variabile, periodica, frazionata, immediata, posticipata e temporanea) con scadenza 3 anni, cedola semestrale \$5, valore nominale \$100 e T.I.R. 7%, se il T.I.R. scende al 5%

Duration di questo titolo è 2.68 (esempio precedente)

$$DM = \frac{1}{1+i} \cdot D = \frac{1}{1.07} \cdot 2.68 = 2.50$$

$$\frac{dV_0}{V_0} = -DM \cdot di = -2.50 \cdot (-0.02) = 0.05 = +5\%$$