

MATEMATICA FINANZIARIA

Prof. Andrea Berardi

1999

4. MUTUI E PIANI DI AMMORTAMENTO

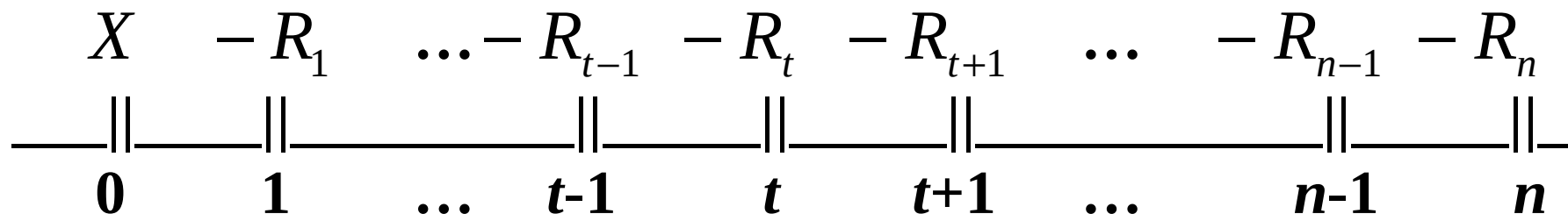
CONTRATTO DI MUTUO

Il contratto di mutuo è un'operazione finanziaria corrispondente ad una particolare tipologia di rendita

℔

Rendita periodica, intera, immediata, temporanea, variabile e posticipata così strutturata:

Incasso al tempo 0 di un importo X e pagamento alle date $1, \dots, t, \dots, n$ di rate di ammontare R_s , $s = 1, \dots, t, \dots, n$, calcolate applicando il tasso di interesse effettivo i



Montante della rendita al tempo t è dato da:

$$W_t = X \cdot (1+i)^t - \sum_{s=1}^t R_s \cdot (1+i)^{t-s}$$

Valore residuo della rendita al tempo t è dato da:

$$V_t = - \sum_{s=t+1}^n R_s \cdot (1+i)^{-(s-t)}$$

La somma del montante e del valore residuo al tempo t fornisce il valore capitale della rendita a quella data:

$$A_t = W_t + V_t$$

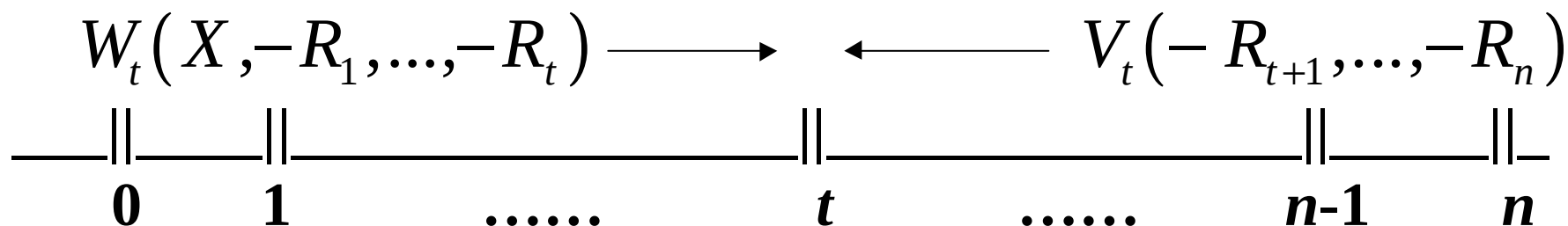
Se la rendita è “equa”, l’importo iniziale X deve essere uguale al valore attuale della rendita calcolato al tasso i

$$X = V_0 = \sum_{s=1}^n R_s \cdot (1+i)^{-s}$$

Questo implica che:

$$A_t = W_t + V_t = 0 \quad , \forall t$$

Il montante della rendita al tempo t è uguale, in valore assoluto, al valore residuo della rendita a quella data



DEBITO RESIDUO

Il montante della rendita al tempo t rappresenta quindi il debito residuo a quella data $D_t \equiv W_t$



Relazione ricorrente per il calcolo



$$\begin{aligned} D_{t+1} &= X \cdot (1+i)^{t+1} - \sum_{s=1}^{t+1} R_s \cdot (1+i)^{t+1-s} \\ &= X \cdot (1+i)^t \cdot (1+i) - \sum_{s=1}^t R_s \cdot (1+i)^{t-s} \cdot (1+i) - R_{t+1} \\ &= (1+i) \cdot D_t - R_{t+1} \end{aligned}$$

$$\text{RATA} = \text{QUOTA CAPITALE} + \text{QUOTA INTERESSE}$$

Dalla relazione ricorrente si ottiene:

RATA

$$R_t = (D_{t-1} - D_t) + i \cdot D_{t-1}$$



$$C_t = (D_{t-1} - D_t)$$

$$I_t = i \cdot D_{t-1}$$

QUOTA CAPITALE

QUOTA INTERESSE



$$R_t = C_t + I_t$$

PIANO DI AMMORTAMENTO

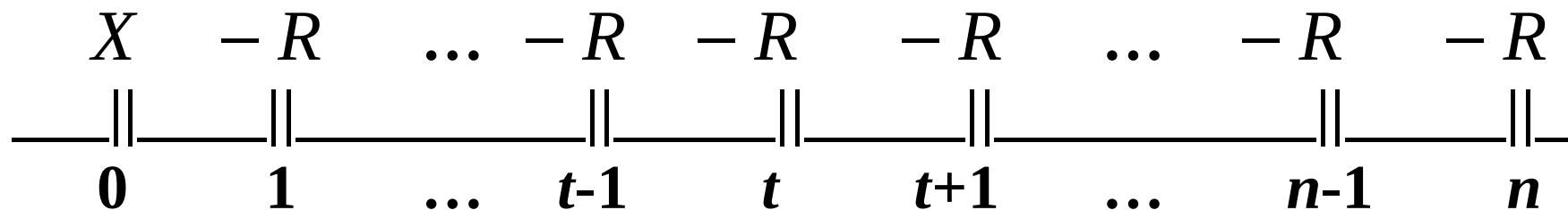
Le variabili:

- **Scadenze:** $s = 1, 2, \dots, t, \dots, n$
- **Rata:** R_s
- **Quota capitale:** C_s
- **Quota interesse:** I_s
- **Debito residuo:** D_s

definiscono il piano di ammortamento, ovvero lo schema che caratterizza lo scambio di un importo X con una rendita ad un certo tasso di interesse effettivo i

AMMORTAMENTO A RATE COSTANTI POSTICIPATE (AMMORTAMENTO FRANCESE)

Operazione di rendita (mutuo) che prevede l'incasso al tempo 0 di un importo X e il pagamento alle scadenze 1, 2,..., t ,..., n di rate costanti di ammontare R



Si applica il tasso di interesse effettivo i

Il debito residuo ad ogni scadenza è dato da:

$$D_0 = X = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$D_1 = D_0 \cdot (1+i) - R = R \cdot a_{\overline{n-1}|i}$$

$$D_2 = D_1 \cdot (1+i) - R = R \cdot a_{\overline{n-2}|i}$$

.....

$$D_t = D_{t-1} \cdot (1+i) - R = R \cdot a_{\overline{n-t}|i}$$

.....

$$D_n = D_{n-1} \cdot (1+i) - R = R \cdot a_{\overline{0}|i} = 0$$



Il calcolo della rata è immediato:

$$R = X / a_{\overline{n}|i}$$

La quota capitale si ottiene dalla relazione ricorrente:

$$\begin{aligned}C_t &= D_{t-1} - D_t = D_{t-1} - D_{t-1} \cdot (1+i) + R \\&= R - i \cdot D_{t-1} = R - i \cdot R \cdot a_{\overline{n-t+1}|i} \\&= R \cdot (1 - i \cdot a_{\overline{n-t+1}|i}) \\&= R \cdot (1+i)^{-(n-t+1)}\end{aligned}$$

mentre la quota interesse si determina per differenza:

$$I_t = R - C_t = R \cdot \left(1 - (1+i)^{-(n-t+1)}\right)$$

Dato il tasso di interesse i , l'importo iniziale X e la durata della rendita n , si calcola la rata costante:

$$R = X / a_{\overline{n}|i}$$

s	C_s	I_s	D_s
0	0	0	X
1	$R \cdot (1+i)^{-n}$	$R - C_1$	$X - C_1$
2	$R \cdot (1+i)^{-(n-1)}$	$R - C_2$	$D_1 - C_2$
....			
t	$R \cdot (1+i)^{-(n-t+1)}$	$R - C_t$	$D_{t-1} - C_t$
....			
n	$R \cdot (1+i)^{-1}$	$R - C_n$	$D_{n-1} - C_n = 0$

In alternativa (metodo equivalente), dato il tasso i , l'importo X e la durata n , si calcola la rata costante:

$$R = X / a_{\overline{n}|i}$$

s	I_s	C_s	D_s
0	0	0	X
1	$i \cdot X$	$R - I_1$	$X - C_1$
2	$i \cdot D_1$	$R - I_2$	$D_1 - C_2$
....			
t	$i \cdot D_{t-1}$	$R - I_t$	$D_{t-1} - C_t$
....			
n	$i \cdot D_{n-1}$	$R - I_n$	$D_{n-1} - C_n = 0$

Esempio (metodo francese)

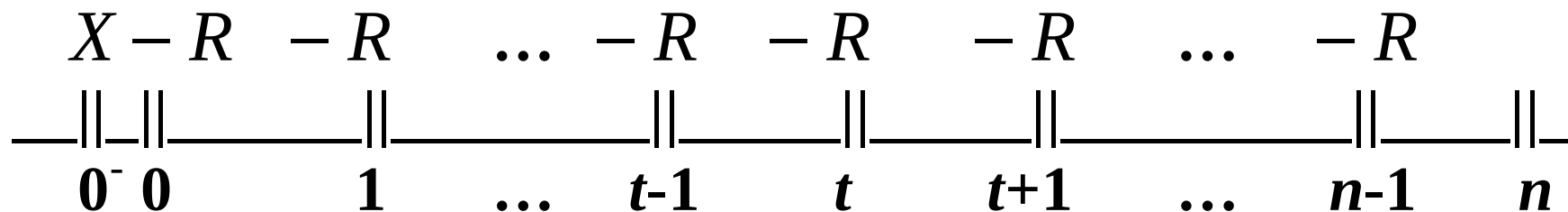
Si determini il piano di ammortamento relativo al rimborso di un debito di £ 100 milioni, effettuato in 5 anni al tasso di interesse del 7% annuo, con rate annue costanti pagate posticipatamente

$$R = X / a_{\overline{n}|i} = 100 / 4.1 = 24.39$$

S	I_s	C_s	D_s
0	0	0	100
1	7	17.39	82.61
2	5.78	18.61	64.00
3	4.48	19.91	44.09
4	3.09	21.30	22.79
5	1.60	22.79	0

AMMORTAMENTO A RATE COSTANTI ANTICIPATE (AMMORTAMENTO TEDESCO)

Operazione di rendita (mutuo) che prevede l'incasso al tempo 0^- di un importo X e il pagamento alle scadenze $0, 1, \dots, t, \dots, n-1$ di rate costanti di ammontare R



Si applica il tasso di interesse effettivo i

Il debito residuo ad ogni scadenza è dato da:

$$D_0 = X = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

$$D_1 = (D_0 - R) \cdot (1+i) = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n-1}|i}$$

$$D_2 = (D_1 - R) \cdot (1+i) = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n-2}|i}$$

.....

$$D_t = (D_{t-1} - R) \cdot (1+i) = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n-t}|i}$$

.....

$$D_n = (D_{n-1} - R) \cdot (1+i) = R \cdot \ddot{a}_{\overline{0}|i} = 0$$



Il calcolo della rata è immediato:

$$R = X / \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

Dalla relazione ricorrente per il debito residuo

$$D_t = (D_{t-1} - R) \cdot (1 + i)$$

si ricava

$$R = (D_{t-1} - D_t) + d \cdot D_t$$

e quindi la quota capitale

$$C_t = D_{t-1} - D_t$$

e la quota interesse

$$I_t = d \cdot D_t$$

**Al tempo 0, è la quota interesse a venir pagata
anticipatamente**

Dato il tasso di interesse i , l'importo iniziale X e la durata della rendita n , si calcola la rata costante:

$$R = X / \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

s	I_s	C_s	D_s
0	$d \cdot X$	0	X
1	$d \cdot D_1$	$R - I_1$	$D_1 = (X - R) \cdot (1 + i)$
2	$d \cdot D_2$	$R - I_2$	$D_2 = (D_1 - R) \cdot (1 + i)$
....			
t	$d \cdot D_t$	$R - I_t$	$D_t = (D_{t-1} - R) \cdot (1 + i)$
....			
n	$d \cdot D_n$	$R - I_n$	$D_n = (D_{n-1} - R) \cdot (1 + i)$

Esempio (metodo tedesco)

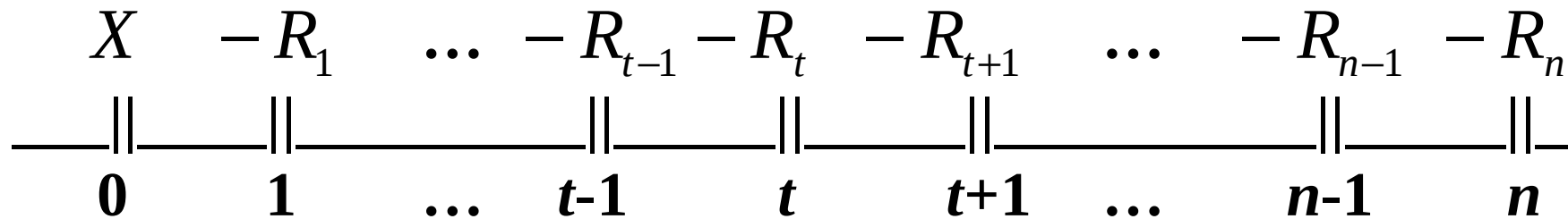
Si determini il piano di ammortamento relativo al rimborso di un debito di £ 100 milioni, effettuato in 5 anni al tasso di interesse del 7% annuo, con rate annue costanti pagate anticipatamente

$$R = X / \ddot{a}_{\overline{n}|i} = 100 / 4.39 = 22.79$$

S	I_s	C_s	D_s
0	6.54	0	100
1	5.40	17.39	82.61
2	4.19	18.61	64.00
3	2.88	19.91	44.09
4	1.49	21.30	22.79
5	0	22.79	0

AMMORTAMENTO A QUOTE CAPITALE COSTANTI (AMMORTAMENTO ITALIANO)

**Operazione di rendita (mutuo) che prevede l'incasso al
tempo 0 di un importo X e il pagamento alle scadenze 1,
2,..., t ,..., n di rate variabili (con quote capitale costanti)
di ammontare $R_s, s = 1, 2, \dots, t, \dots, n$**



Si applica il tasso di interesse effettivo i

Quota capitale costante

$$C = X/n$$

Debito residuo

$$D_t = X - t \cdot C = X \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)$$

Quota interesse

$$I_t = i \cdot D_{t-1} = i \cdot X \cdot \left(1 - \frac{t-1}{n}\right)$$

Rata

$$R_t = C + I_t = X \cdot \left(\frac{1 + i \cdot (n - t + 1)}{n}\right)$$

Dato il tasso di interesse i , l'importo iniziale X e la durata n , si calcola la quota capitale costante:

$$C = X/n$$

s	I_s	R_s	D_s
0	0	0	X
1	$i \cdot X$	$C + I_1$	$X \cdot ((n-1)/n)$
2	$i \cdot D_1$	$C + I_2$	$X \cdot ((n-2)/n)$
....			
t	$i \cdot D_{t-1}$	$C + I_t$	$X \cdot ((n-t)/n)$
....			
n	$i \cdot D_{n-1}$	$C + I_n$	$X \cdot ((n-n)/n) = 0$

Esempio (metodo italiano)

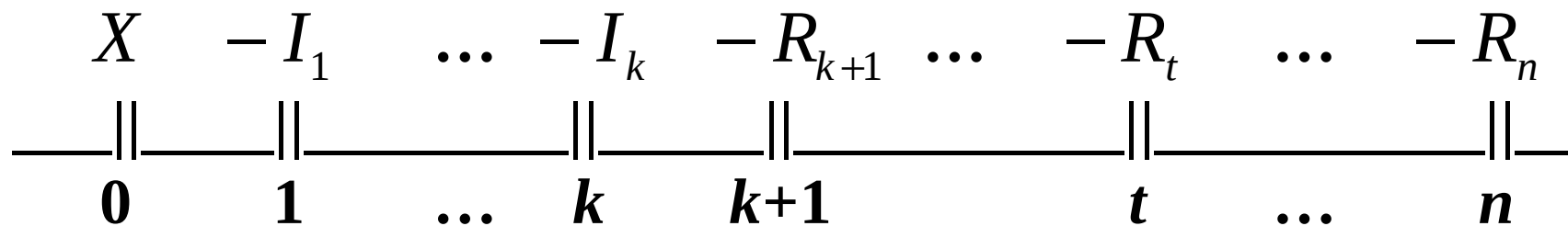
Si determini il piano di ammortamento relativo al rimborso di un debito di £ 100 milioni, effettuato in 5 anni al tasso di interesse del 7% annuo, con quote capitale annue costanti posticipate

$$C = X/n = 100/5 = 20$$

S	I_s	R_s	D_s
0	0	0	100
1	7	27	80
2	5.6	25.6	60
3	4.2	24.2	40
4	2.8	22.8	20
5	1.4	21.4	0

PIANI CON PREAMMORTAMENTO

Operazione di rendita (mutuo) che prevede l'incasso al tempo 0 di un importo X e il pagamento alle scadenze $k+1, \dots, t, \dots, n$ di rate variabili (con quote capitale costanti) di ammontare $R_s, s = k+1, \dots, t, \dots, n$. Le rate corrisposte durante il periodo di pre-ammortamento $(1, \dots, k)$ sono costituite dalla sola quota interesse



Si applica il tasso di interesse effettivo i

Dato il tasso i , l'importo X , la durata n e un periodo di preammortamento k , si ha la quota capitale costante:

$$C = X / (n - k)$$

s	I_s	R_s	D_s
0	0	0	X
1	$i \cdot X$	I_1	X
.....			
k	$i \cdot X$	I_k	X
$k+1$	$i \cdot X$	$C + I_{k+1}$	$X \cdot ((n - (k + 1)) / (n - k))$
.....			
t	$i \cdot D_{t-1}$	$C + I_t$	$X \cdot ((n - t) / (n - k))$
.....			
n	$i \cdot D_{n-1}$	$C + I_n$	$X \cdot ((n - n) / (n - k)) = 0$

Esempio (metodo italiano con preammortamento)

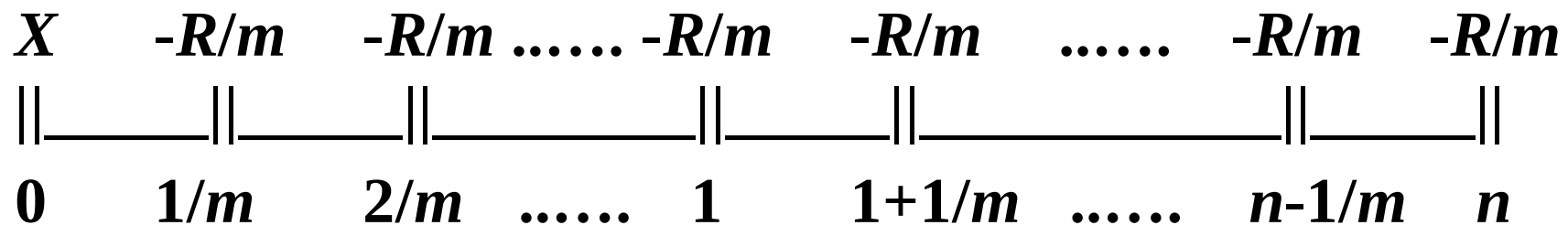
Si determini il piano di ammortamento relativo al rimborso di un debito di £ 100 milioni, effettuato in 8 anni al tasso di interesse del 7% annuo, con quote capitale annue costanti posticipate, e un periodo di preammortamento di 3 anni

$$C = X / (n - k) = 100 / (8 - 3) = 20$$

S	I_s	R_s	D_s
0	0	0	100
1	7	7	100
2	7	7	100
3	7	7	100
4	7	27	80
5	5.6	25.6	60
6	4.2	24.2	40
7	2.8	22.8	20
8	1.4	21.4	0

PIANI DI AMMORTAMENTO CON PERIODICITA' FRAZIONATA

Operazione di rendita (mutuo) che prevede l'incasso al tempo 0 di un importo X e il pagamento alle scadenze (frazione d'anno) $1/m, 2/m, \dots, n$ di rate costanti posticipate (es. “metodo francese”) di ammontare R/m



Si applica il tasso di interesse effettivo i ,
ovvero il tasso di interesse periodale $i_{1/m}$

Dato il tasso i , l'importo X , la durata n e la frazione di periodo $1/m$, si calcola il tasso periodale $i_{1/m}$, il tasso nominale $j(m)$ e la rata R :

$$R = X / a_{\overline{n}|i}^{(m)} = X / \left(\frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{n}|i} \right)$$

S	I_s	C_s	D_s
0	0	0	X
$1/m$	$i_{1/m} \cdot X$	$R/m - I_{1/m}$	$X - C_{1/m}$
$2/m$	$i_{1/m} \cdot D_{1/m}$	$R/m - I_{2/m}$	$D_{1/m} - C_{2/m}$
....			
n	$i_{1/m} \cdot D_{n-(1/m)}$	$R - I_n$	$D_{n-(1/m)} - C_n = 0$

Esempio (metodo francese con periodicità frazionata)

Si determini il piano di ammortamento relativo al rimborso di un debito di £ 100 milioni, effettuato in 3 anni al tasso di interesse del 7% annuo, con rate semestrali costanti posticipate

$$R = X / \left(\frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{n}|i} \right) = 100 / \left(\frac{0.07}{0.0688} \cdot 2.624 \right) = 37.46$$

S	I_s	C_s	D_s
0	0	0	100
0.5	3.44	15.29	84.71
1	2.91	15.82	68.89
1.5	2.37	16.36	52.53
2	1.81	16.92	35.61
2.5	1.23	17.50	18.11
3	0.62	18.11	0

LEASING FINANZIARIO

Intermediario finanziario (locatore) acquista bene presso produttore e lo cede in locazione per un periodo di durata n al soggetto che ne richiede l'uso (locatario), contro il pagamento di canoni periodici

Alla scadenza, il locatario può:

- **rinnovare l'operazione**
- **restituire il bene**
- **riscattare il bene ad un prezzo prefissato**

Elementi del leasing

X : costo del bene

L : canone annuo

n : durata operazione (anni)

P : prezzo di riscatto del bene

i : tasso di interesse effettivo applicato

Canoni costanti posticipati senza possibilità di riscatto

$$X = L \cdot a_{\overline{n}|i} \quad \text{ovvero} \quad L = \frac{X}{a_{\overline{n}|i}}$$

Canoni costanti posticipati con possibilità di riscatto

$$X - P \cdot (1+i)^{-n} = L \cdot a_{\overline{n}|i}$$

ovvero

$$L = \frac{X - P \cdot (1+i)^{-n}}{a_{\overline{n}|i}}$$

Canoni costanti posticipati con possibilità di riscatto e con corresponsione anticipata (all'atto della stipulazione del contratto) di k canoni

$$X - P \cdot (1+i)^{-n} - k \cdot L = L \cdot a_{\overline{n-k}|i}$$

ovvero

$$L = \frac{X - P \cdot (1+i)^{-n}}{k + a_{\overline{n-k}|i}}$$

Essendo k i canoni corrisposti alla stipulazione del contratto, residuano $n-k$ canoni, dei quali il primo viene pagato alla fine del primo periodo e l'ultimo in $n-k$

Esempio leasing 1

Contratto di leasing composto dai seguenti elementi

Costo del bene $X = 100$ milioni

Durata operazione $n = 2.5$ anni

Pagamento canoni trimestrale $m = 4$

Canoni costanti posticipati

2 canoni corrisposti alla stipulazione $k = 2$

Tasso di interesse effettivo annuo $i = 8.2432\%$

Prezzo di riscatto del bene nullo $P = 0$

¶

Si determini il piano di ammortamento

Numero rate trimestrali $n \cdot m - k$	8
Tasso di interesse trimestrale $i_{1/m}$	2%
$a_{\overline{n \cdot m - k} i_{1/m}}$	7.3255
$\frac{L}{m} = \frac{X - P \cdot (1 + i_{1/m})^{-n \cdot m}}{k + a_{\overline{n \cdot m - k} i_{1/m}}}$	10.7233
Canoni alla stipulazione $k \cdot \frac{L}{m}$	21.4466

s	I_s	C_s	D_s
0	0	0	78.5534
1	1.5711	9.1522	69.4011
2	1.3880	9.3353	60.0659
3	1.2013	9.5220	50.5439
4	1.0109	9.7124	40.8314
5	0.8166	9.9067	30.9248
6	0.6185	10.1048	20.8200
7	0.4164	10.3069	10.5130
8	0.2103	10.5130	0

Esempio leasing 2

Contratto di leasing composto dai seguenti elementi

Costo del bene $X = 100$ milioni

Durata operazione $n = 2.5$ anni

Pagamento canoni trimestrale $m = 4$

Canoni costanti posticipati

2 canoni corrisposti alla stipulazione $k = 2$

Tasso di interesse effettivo annuo $i = 8.2432\%$

Prezzo di riscatto del bene $P = 30$ milioni

¶

Si determini il piano di ammortamento

Numero rate trimestrali $n \cdot m - k$	8
Tasso di interesse trimestrale $i_{1/m}$	2%
$a_{\overline{n \cdot m - k} i_{1/m}}$	7.3255
$\frac{L}{m} = \frac{X - P \cdot (1 + i_{1/m})^{-n \cdot m}}{k + a_{\overline{n \cdot m - k} i_{1/m}}}$	8.0843
Canoni alla stipulazione $k \cdot \frac{L}{m}$	16.1685

s	I_s	C_s	D_s
0	0	0	83.8315
1	1.6766	6.4076	77.4239
2	1.5485	6.5358	70.8881
3	1.4178	6.6665	64.2216
4	1.2844	6.7998	57.4218
5	1.1484	6.9358	50.4860
6	1.0097	7.0745	43.4114
7	0.8682	7.2160	36.1954
8	0.7239	7.3603	28.8351
9	0	0	29.4118
10	0	0	30