

MATEMATICA FINANZIARIA

Prof. Andrea Berardi

1999

1. LEGGI E REGIMI FINANZIARI

OPERAZIONE FINANZIARIA ELEMENTARE

Contratto mediante il quale un soggetto dà ad un altro soggetto un certo importo P_x disponibile ad una data x in cambio di un importo M_y disponibile alla data y



Esempio: B.O.T.



OPERAZIONE FINANZIARIA DI INVESTIMENTO

L'elemento fondamentale (noto) della transazione è l'importo P_x ,
mentre l'importo M_y viene determinato dalle condizioni del contratto



x : data di investimento

P_x : capitale investito

y : data di scadenza dell'operazione

M_y : MONTANTE in y del capitale P_x investito in x

$M_y - P_x \equiv I_{x,y}$: INTERESSE

OPERAZIONE FINANZIARIA DI SCONTO

L'elemento fondamentale (noto) della transazione è l'importo M_y ,
mentre l'importo P_x viene determinato dalle condizioni del contratto



y : data nella quale è disponibile il capitale

M_y : capitale disponibile in y

x : data dell'operazione

P_x : VALORE ATTUALE in x del capitale M_y disponibile in y

$M_y - P_x \equiv D_{x,y}$: SCONTO

CAPITALIZZAZIONE E ATTUALIZZAZIONE

$$M_y = f(x, P_x, y)$$

$$P_x = g(x, M_y, y)$$

Dato x :

$f(x, P_x, y)$ **crescente rispetto a P_x**

$f(x, P_x, y)$ **crescente rispetto a y**

$g(x, M_y, y)$ **crescente rispetto a M_y**

$g(x, M_y, y)$ **decrescente rispetto a y**

f e g definiscono il rapporto di scambio tra due importi al variare degli importi stessi e delle date di riferimento, ovvero determinano i prezzi per lo scambio tra risorse finanziarie attuali e future

Condizione di proporzionalità o di indipendenza dall'importo

$$M_y = f(x, P_x, y) = P_x \cdot f(x, 1, y)$$

$$P_x = g(x, M_y, y) = M_y \cdot g(x, 1, y)$$

B

$$f(x, 1, y) \equiv r(x; y)$$

$$g(x, 1, y) = v(x; y)$$

$$r(x; y) = \frac{1}{v(x; y)}$$

$r(x; y)$: determina il montante al tempo y di una unità monetaria di capitale investita al tempo x (numero puro)



$$M_y = P_x \cdot r(x; y)$$

$$r(x; y) = \frac{M_y}{P_x} > 1$$

$r(x; y)$ **FATTORE DI CAPITALIZZAZIONE**

$v(x; y)$: determina il valore attuale al tempo x di una unità monetaria di capitale disponibile al tempo y (numero puro)



$$P_x = M_y \cdot v(x; y)$$

$$v(x; y) = \frac{P_x}{M_y} < 1$$

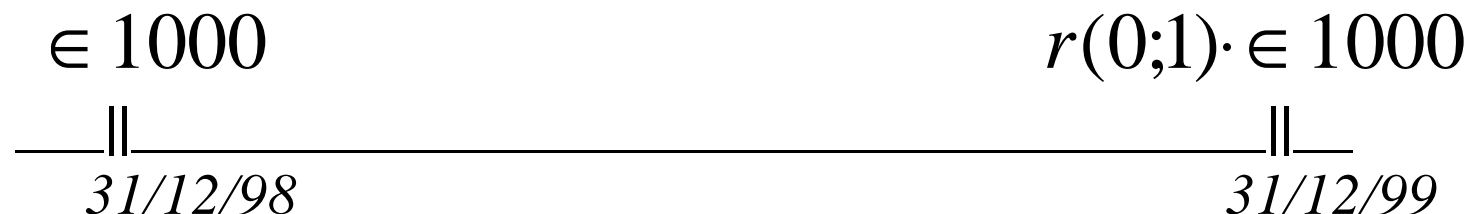
$v(x; y)$ **FATTORE DI ATTUALIZZAZIONE**

Esempio 1: capitalizzazione

Il giorno 31/12/98 (tempo x) l'impiegato Mazzola si reca in banca e chiede allo sportellista Rivera di investire la sua tredicesima di $\hat{\mathbf{I}} 1000$ (P_x) in un BOT che scade il giorno 31/12/99 (tempo y). Rivera calcola che, alla scadenza del BOT, Mazzola riceverà $\hat{\mathbf{I}} 1080$ (M_y).

Il fattore di capitalizzazione è:

$$r(0;1) = \frac{M_y}{P_x} = \frac{\text{€ } 1080}{\text{€ } 1000} = 1.08$$



Esempio 2: attualizzazione

Il giorno 30/2/00 (tempo y) il geometra Facchetti riceverà un bonus aziendale di $\hat{\mathbf{I}} 5000$ (M_y). Egli chiede al ragioniere Burgnich di poter anticipare l'incasso del bonus al giorno 30/8/99 (tempo x). Il ragioniere calcola che, in questo caso, al geometra spetterebbero $\hat{\mathbf{I}} 4750$ (P_x).

Il fattore di attualizzazione è:

$$v(0;0.5) = \frac{P_x}{M_y} = \frac{\text{€ } 4750}{\text{€ } 5000} = 0.95$$



TASSO DI INTERESSE E TASSO DI SCONTO

$$M_y - P_x \equiv I_{x,y} : \text{INTERESSE}$$

B

$$\frac{I_{x,y}}{P_x} = \frac{M_y}{P_x} - 1$$

B

TASSO DI INTERESSE

$$i(x; y) = r(x; y) - 1$$

Interesse prodotto tra x e y per ogni unità di capitale investito

Esempio 1: capitalizzazione (continua)

Dato un investimento di $\hat{\mathbf{I}} 1000$ (P_x) al tempo x (31/12/98) e un montante di $\hat{\mathbf{I}} 1080$ (M_y) al tempo y (31/12/99), si ha:

fattore di capitalizzazione

$$r(0;1) = \frac{M_y}{P_x} = \frac{\text{€ } 1080}{\text{€ } 1000} = 1.08$$

tasso di interesse

$$i(0;1) = r(0;1) - 1 = 0.08$$

$$M_y - P_x \equiv D_{x,y} : \text{SCONTO}$$

B

$$\frac{D_{x,y}}{M_y} = 1 - \frac{P_x}{M_y}$$

B

TASSO DI SCONTO

$$d(x; y) = 1 - v(x; y)$$

**Sconto su ogni unità di capitale disponibile in y
per effetto dell'anticipazione da y a x**

Esempio 2: attualizzazione (continua)

Dato un pagamento di $\hat{\mathbf{I}} 5000$ (M_y) disponibile al tempo y (30/2/00) e un valore attuale di $\hat{\mathbf{I}} 4750$ (P_x) al tempo x (30/8/99), si ha:

fattore di attualizzazione

$$v(0;0.5) = \frac{P_x}{M_y} = \frac{\text{€ } 4750}{\text{€ } 5000} = 0.95$$

tasso di sconto

$$d(0;0.5) = 1 - v(0;0.5) = 0.05$$

Tasso di interesse \hat{U} Tasso di sconto

$$d(x; y) = \frac{i(x; y)}{1 + i(x; y)} = i(x; y) \cdot v(x; y)$$

$$i(x; y) = \frac{d(x; y)}{1 - d(x; y)} = d(x; y) \cdot r(x; y)$$

Data una delle quattro funzioni $r(x; y)$, $v(x; y)$, $i(x; y)$, $d(x; y)$ è possibile ricavare le altre

B

| | $r(x; y)$ | $v(x; y)$ | $i(x; y)$ | $d(x; y)$ |
|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $r(x; y)$ | | $\frac{1}{r}$ | $r - 1$ | $\frac{r - 1}{r}$ |
| $v(x; y)$ | $\frac{1}{v}$ | | $\frac{1 - v}{v}$ | $1 - v$ |
| $i(x; y)$ | $1 + i$ | $\frac{1}{1 + i}$ | | $\frac{i}{1 + i}$ |
| $d(x; y)$ | $\frac{1}{1 - d}$ | $1 - d$ | $\frac{d}{1 - d}$ | |

TASSO DI INTERESSE PER PERIODO UNITARIO

$$x = t \qquad y = t + 1$$

B

$$i(t; t + 1)$$

In generale:

$$x = t + s \qquad y = t + s + 1$$

B

$$i(t + s; t + s + 1)$$

$$s = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

TASSO DI INTERESSE PER PERIODO UNITARIO COSTANTE

$$x = t \qquad y = t + n$$

B

$$\bar{i}(t; t + n) \equiv i$$

$$\begin{aligned} \bar{i}(t; t + n) &= i(t; t + 1) = i(t + 1; t + 2) = \dots \\ &= i(t + n - 2; t + n - 1) = i(t + n - 1; t + n) = i \end{aligned}$$

REGIME DELL'INTERESSE COMPOSTO (R.I.C.)

Tempo iniziale t

Capitale investito P_t

Tempo finale $t + n$

Interesse calcolato applicando ogni anno uno stesso tasso di interesse i
al montante M_{t+s} accumulato fino ad allora

$$M_t = P_t$$

$$M_{t+1} = M_t + i \cdot M_t = P_t \cdot (1 + i)$$

$$M_{t+2} = M_{t+1} + i \cdot M_{t+1} = P_t \cdot (1 + i)^2$$

.....

$$M_{t+n} = M_{t+n-1} + i \cdot M_{t+n-1} = P_t \cdot (1 + i)^n$$

Tempo iniziale t

Capitale investito P_t

Tempo finale $t + n$

Interesse calcolato applicando ogni anno un differente tasso di interesse

$i_{t+s,t+s+1}$ al montante M_{t+s} accumulato fino ad allora

$$M_t = P_t$$

$$M_{t+1} = M_t + i_{t,t+1} \cdot M_t = P_t \cdot (1 + i_{t,t+1})$$

$$M_{t+2} = M_{t+1} + i_{t+1,t+2} \cdot M_{t+1} = P_t \cdot \prod_{s=0}^1 (1 + i_{t+s,t+s+1})$$

.....

$$M_{t+n} = M_{t+n-1} + i_{t+n-1,t+n} \cdot M_{t+n-1} = P_t \cdot \prod_{s=0}^{n-1} (1 + i_{t+s,t+s+1})$$

Fattori di capitalizzazione e di attualizzazione nel R.I.C.

Fattore di capitalizzazione, ovvero montante dopo n periodi unitari di una unità monetaria di capitale investita al tempo t

$$r(t; t + n) = (1 + i)^n$$

Fattore di attualizzazione, ovvero valore attuale al tempo t di una unità monetaria di capitale disponibile tra n periodi unitari

$$v(t; t + n) = \frac{1}{(1 + i)^n}$$

Esempio

Tempo iniziale t : 31.12.96

Capitale investito P_t : \$1000

Tempo finale $t + n$: 31.12.99

Tasso di interesse i : 5% annuo

$$M_t = \$1000$$

$$M_{t+1} = \$1000 + 0.05 \cdot \$1000 = \$1000 \cdot 1.05 = \$1050$$

$$M_{t+2} = \$1050 + 0.05 \cdot \$1050 = \$1000 \cdot (1.05)^2 = \$1102.5$$

$$M_{t+3} = \$1102.5 + 0.05 \cdot \$1102.5 = \$1000 \cdot (1.05)^3 = \$1157.6$$

$$r(t; t + 3) = (1.05)^3 = 1.1576$$

$$v(t; t + 3) = (1.05)^{-3} = 0.8638$$

GRAFICI FUNZIONI NEL R.I.C.

Per qualsiasi numero reale positivo $W \in \mathfrak{R}^+$

B

funzione fattore di capitalizzazione

$$r(W) = r(t; t + W) = (1 + i)^W$$

funzione fattore di attualizzazione

$$v(W) = v(t; t + W) = (1 + i)^{-W}$$

funzione tasso di interesse

$$i(W) = i(t; t + W) = (1 + i)^W - 1$$

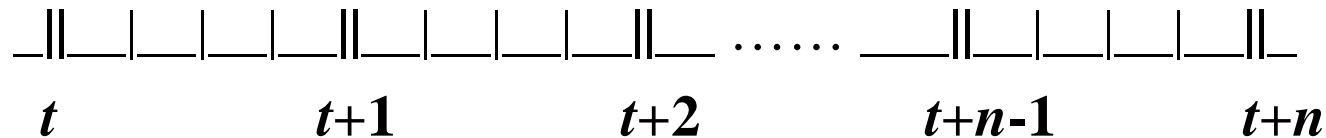
funzione tasso di sconto

$$d(W) = d(t; t + W) = 1 - (1 + i)^{-W}$$

TASSI EQUIVALENTI NEL R.I.C.

n periodi unitari

ogni periodo unitario diviso in m parti uguali



Applicati allo stesso capitale, per lo stesso periodo di tempo e nello stesso regime finanziario, producono lo stesso montante, lo stesso valore attuale, lo stesso interesse e lo stesso sconto

B

$$(1 + i)^n = \left(1 + i_{1/m}\right)^{n \cdot m}$$

Relazione tra tasso per periodo unitario e tasso per frazione di periodo unitario ($1/m$)

$$i = \left(1 + i_{1/m}\right)^m - 1$$

$$i_{1/m} = \left(1 + i\right)^{1/m} - 1$$

Se il periodo unitario è l'anno, allora il sotto-periodo può essere il semestre ($m = 2$), il trimestre ($m = 4$), il mese ($m = 12$),

Esempio

Periodo unitario: 1 anno

Frazione di anno: un trimestre ($m = 4$)

Tempo iniziale t : 31.12.96

Capitale investito P_t : \$1000

Tempo finale $t + n$: 31.12.99

Tasso di interesse i : 5% annuo

$$M_{t+3} = \$1000 \cdot (1.05)^3 = \$1157.6$$

$$i_{1/4} = (1 + 0.05)^{1/4} - 1 = 1.227\%$$

$$M_{t+3} = \$1000 \cdot (1.01227)^{3 \cdot 4} = \$1157.6$$

TASSI NOMINALI E TASSI ISTANTANEI NEL R.I.C.

Periodo unitario è l'anno

Frazione di anno ($1/m$)

Tasso nominale di interesse, rinnovabile m volte nell'anno

$$j(m) = m \cdot i_{1/m}$$

B

legame tra tasso annuo (effettivo) e tasso nominale

$$j(m) = m \cdot \left((1 + i)^{1/m} - 1 \right)$$

Al ridursi della lunghezza del periodo di riferimento, ovvero per $m \rightarrow \infty$, il tasso nominale tende ad un valore costante

$$\lim_{m \rightarrow \infty} j(m) = \lim_{\frac{1}{m} \rightarrow 0} \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{1/m} = \log(1+i)$$

Definiamo:

$$d \equiv \log(1+i)$$

TASSO ISTANTANEO DI INTERESSE

Tasso nominale di sconto, rinnovabile m volte nell'anno

$$r(m) = m \cdot d_{1/m} = m \cdot \left(1 - (1 - d)^{1/m}\right)$$

Al ridursi della lunghezza del periodo di riferimento,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r(m) = \lim_{\frac{1}{m} \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - d)^{1/m}}{1/m} = -\log(1 - d)$$

Definiamo:

$$r \equiv -\log(1 - d)$$

TASSO ISTANTANEO DI SCONTO

Tasso istantaneo di interesse \hat{U} Tasso istantaneo di sconto

$$\begin{aligned} r &= -\log(1-d) = -\log\left(1 - \frac{i}{1+i}\right) \\ &= -\log\left(\frac{1}{1+i}\right) = \log(1+i) = d \end{aligned}$$

B

$$r = d$$

INTENSITA' ISTANTANEA

Esempio

Tasso di interesse annuo $i = 5\%$

Tasso di sconto annuo $d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.05}{1.05} = 4.762\%$

Tasso istantaneo di interesse

$$**d \equiv \log(1+i) = \log(1.05) = 4.879\%**$$

Tasso istantaneo di sconto

$$**r = -\log(1-d) = -\log(0.952381) = 4.879\%**$$

Intensità istantanea

$$**r = d = 4.879\%**$$

Per qualsiasi numero reale positivo $w \in \mathfrak{R}^+$, le funzioni del R.I.C. possono anche essere espresse così:

B

funzione fattore di capitalizzazione

$$r(w) = r(t; t + w) = e^{dw}$$

funzione fattore di attualizzazione

$$v(w) = v(t; t + w) = e^{-dw}$$

funzione tasso di interesse

$$i(w) = i(t; t + w) = e^{dw} - 1$$

funzione tasso di sconto

$$d(w) = d(t; t + w) = 1 - e^{-dw}$$

Esempio

$$W = t$$

$$r(t) = e^{d \cdot t} = e^{t \cdot \log(1+i)} = e^{\log(1+i)^t} = (1+i)^t$$

$$v(t) = e^{-d \cdot t} = e^{-t \cdot \log(1+i)} = e^{\log(1+i)^{-t}} = (1+i)^{-t}$$

$$i(t) = e^{d \cdot t} - 1 = e^{t \cdot \log(1+i)} - 1 = e^{\log(1+i)^t} - 1 = (1+i)^t - 1$$

$$d(t) = 1 - e^{-d \cdot t} = 1 - e^{-t \cdot \log(1+i)} = 1 - e^{-\log(1+i)^t} = 1 - (1+i)^{-t}$$

Se $r(t)$ è una funzione continua e derivabile, con derivata prima continua in tutto il campo di definizione:

$$r(t_0 + \Delta t) \cong r(t_0) + r'(t_0) \cdot \Delta t$$

B

$$I_{t,t+\Delta t} = r(t) \cdot \left(\frac{r'(t)}{r(t)} \right) \cdot \Delta t$$

capitale in t

intervallo di tempo

FORZA DI INTERESSE

$$\mathbf{B}$$

$$d(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}}{r(t)}$$

B

$$I_{t, t+\Delta t} = d(t) \cdot r(t) \cdot \Delta t$$

$d(t)$: coefficiente che misura l'interesse nell'intervallo $[t, t + \mathbf{Dt}]$ in funzione dell'ampiezza dell'intervallo \mathbf{Dt} e del capitale investito all'inizio del periodo $r(t)$

$r(t) = 1$ \mathbf{P} $d(t)$ determina interesse prodotto nell'unità di tempo per ogni unità di capitale investita.

Esempio: R.I.C.

$$r(t) = (1 + i)^t$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(t) &= \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{\partial \log(r(t))}{\partial t} \\ &= \frac{(1 + i)^t \cdot \log(1 + i)}{(1 + i)^t} = \log(1 + i) = \mathbf{d} \end{aligned}$$

**R.I.C.: forza di interesse e intensità istantanea
coincidono**

**Fattore di capitalizzazione $r(t)$ in funzione
della forza di interesse $d(t)$**

$$d(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{\partial \log(r(t))}{\partial t}$$

$$\int_0^t d(s) ds = \int_0^t \frac{\partial \log(r(s))}{\partial s} ds = [\log(r(s))]_0^t$$

$$\int_0^t d(s) ds = \log(r(t)) - \log(r(0)) = \log(r(t))$$

B

$$r(t) = e^{\int_0^t d(s) ds}$$

FORZA DI SCONTO

$$r(t) = \frac{1}{v(t)}$$

$$d(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{-(v'(t)/v^2(t))}{(1/v(t))} = \frac{-v'(t)}{v(t)}$$

FORZA DI SCONTO

B

$$v(t) = e^{-\int_0^t d(s) ds}$$

RENDIMENTO A SCADENZA

$$h(t) \equiv -\frac{1}{t} \cdot \log(v(t)) = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathbf{d}(s) ds$$

In generale, per due date x e y :

$$h(x; y) \equiv -\frac{1}{y-x} \cdot \log(v(x; y)) = \frac{1}{y-x} \cdot \int_x^y \mathbf{d}(x; s) ds$$

B

Media temporale della forza di interesse

Nel R.I.C. il rendimento a scadenza coincide con la forza di interesse (ovvero con l'intensità istantanea, ovvero con il tasso istantaneo di interesse, ovvero con il tasso istantaneo di sconto)

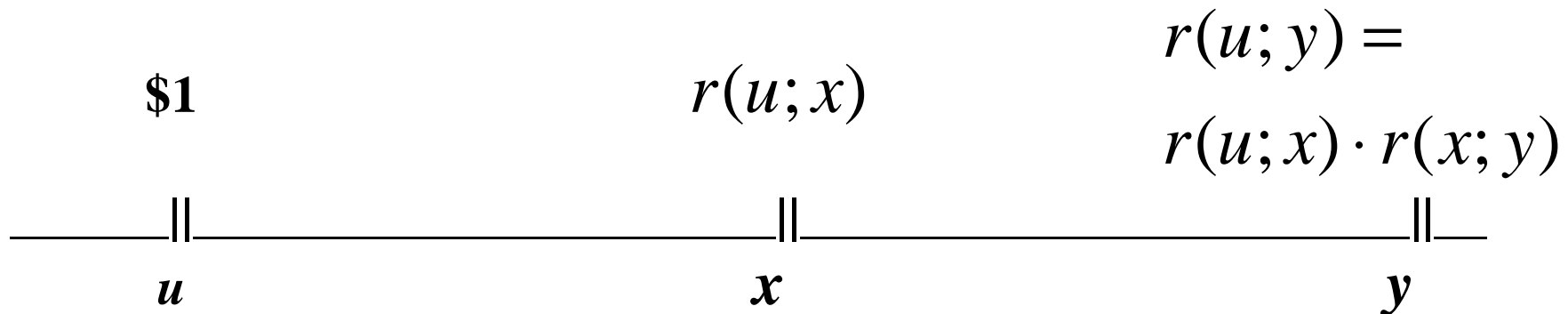
B

$$\begin{aligned}h(x; y) &\equiv -\frac{1}{y-x} \cdot \log(v(x; y)) \\ &= -\frac{1}{y-x} \cdot \log\left(e^{-\int_x^y \mathbf{d} \cdot ds}\right) = \frac{1}{y-x} \cdot \int_x^y \mathbf{d} \cdot ds \\ &= \frac{1}{y-x} \cdot \mathbf{d}(y-x) = \mathbf{d}\end{aligned}$$

SCINDIBILITA' E UNIFORMITA'

SCINDIBILITA'

Il montante prodotto dall'investimento di un capitale unitario tra due date u e y non muta se ad una qualsiasi data intermedia x si disinveste il montante maturato fino ad allora e lo si reinveste immediatamente per il periodo $[x, y]$.



Esempio: R.I.C.

$$r(u; y) = r(u; x) \cdot r(x; y)$$

$$(1 + i)^{y-u} = (1 + i)^{x-u} \cdot (1 + i)^{y-x}$$

B

Le leggi finanziarie del R.I.C. (fattore di capitalizzazione e fattore di attualizzazione) sono scindibili

B

$$v(u; y) = v(u; x) \cdot v(x; y)$$

$$(1 + i)^{-(y-u)} = (1 + i)^{-(x-u)} \cdot (1 + i)^{-(y-x)}$$

Esempio

Tempo iniziale u : 31.12.96

Capitale investito P_u : \$1000 **Tasso di interesse i : 5% annuo**

Tempo finale y : 31.12.99

Tempo intermedio x : 31.12.98

Disinvestimento al tempo intermedio x ($x-u=2$ anni) e reinvestimento del montante maturato fino ad allora per il periodo compreso tra x e la data di scadenza dell'operazione y ($y-x=1$ anno)

Montante senza “interruzione”

$$P_u \cdot (1+i)^{y-u} = \$1000 \cdot (1.05)^3 = \$1157.6$$

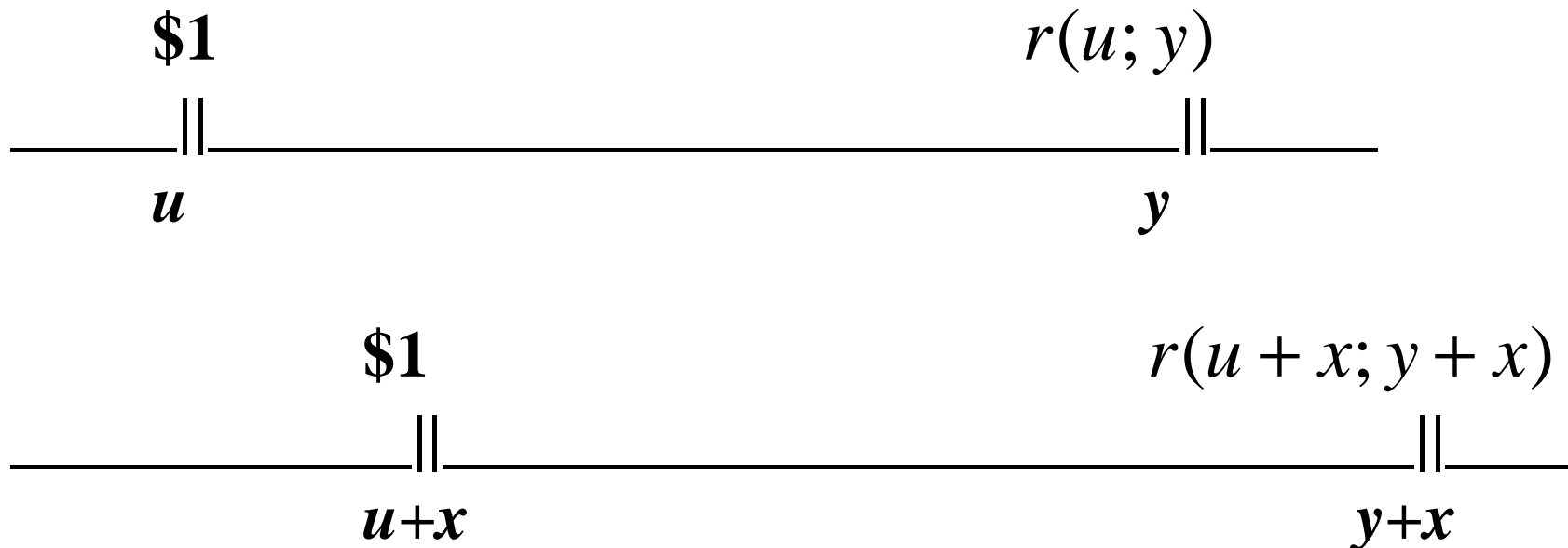
Montante con disinvestimento e reinvestimento

$$P_u \cdot (1+i)^{x-u} \cdot (1+i)^{y-x} = \$1000 \cdot (1.05)^2 \cdot (1.05)^1 = \$1157.6$$

UNIFORMITA'

Il montante prodotto dall'investimento di un capitale unitario tra due date u e y non muta se entrambe le date vengono traslate di un uguale intervallo temporale x .

$$r(u; y) = r(u + x; y + x)$$



REGIME DELL'INTERESSE SEMPLICE (R.I.S.)

Tempo iniziale t

Capitale investito P_t

Tempo finale $t + n$

**Interesse calcolato applicando ogni anno una maggiorazione costante
proporzionale al capitale investito P_t**

$$M_t = P_t$$

$$M_{t+1} = M_t + i \cdot P_t = P_t \cdot (1 + i)$$

$$M_{t+2} = M_{t+1} + i \cdot P_t = P_t \cdot (1 + 2 \cdot i)$$

.....

$$M_{t+n} = M_{t+n-1} + i \cdot P_t = P_t \cdot (1 + n \cdot i)$$

Fattori di capitalizzazione e di attualizzazione nel R.I.S.

Fattore di capitalizzazione, ovvero montante dopo n periodi unitari di una unità monetaria di capitale investita al tempo t

$$r(t; t + n) = 1 + n \cdot i$$

Fattore di attualizzazione, ovvero valore attuale al tempo t di una unità monetaria di capitale disponibile tra n periodi unitari

$$v(t; t + n) = \frac{1}{1 + n \cdot i}$$

Esempio

Tempo iniziale t : 31.12.96

Capitale investito P_t : \$1000

Tempo finale $t + n$: 31.12.99

Tasso di interesse i : 5% annuo

$$M_t = \$1000$$

$$M_{t+1} = \$1000 + 0.05 \cdot \$1000 = \$1000 \cdot 1.05 = \$1050$$

$$M_{t+2} = \$1050 + 0.05 \cdot \$1000 = \$1000 \cdot (1.10) = \$1100$$

$$M_{t+3} = \$1100 + 0.05 \cdot \$1000 = \$1000 \cdot (1.15) = \$1150$$

$$r(t; t + 3) = (1 + 3 \cdot 0.05) = 1.15$$

$$v(t; t + 3) = (1 + 3 \cdot 0.05)^{-1} = 0.87$$

GRAFICI FUNZIONI NEL R.I.S.

Per qualsiasi numero reale positivo $W \in \mathfrak{R}^+$

B

funzione fattore di capitalizzazione

$$r(W) = r(t; t + W) = 1 + W \cdot i$$

funzione fattore di attualizzazione

$$v(W) = v(t; t + W) = (1 + W \cdot i)^{-1}$$

funzione tasso di interesse

$$i(W) = i(t; t + W) = W \cdot i$$

funzione tasso di sconto

$$d(W) = d(t; t + W) = 1 - (1 + W \cdot i)^{-1}$$

TASSI EQUIVALENTI E TASSI NOMINALI NEL R.I.S.

TASSI EQUIVALENTI

**Relazione tra tasso per periodo unitario e
tasso per frazione di periodo unitario ($1/m$)**

$$i_{1/m} = \frac{i}{m} \qquad i = m \cdot i_{1/m}$$

TASSI NOMINALI

Tasso nominale di interesse, rinnovabile m volte nell'anno

$$j(m) = m \cdot i_{1/m} = i$$

FORZA DI INTERESSE E RENDIMENTO A SCADENZA NEL R.I.S.

FORZA DI INTERESSE

$$d(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{i}{(1+t \cdot i)}$$

RENDIMENTO A SCADENZA

$$h(t) \equiv -\frac{1}{t} \cdot \log(v(t)) = \frac{1}{t} \cdot \log(1+t \cdot i)$$

NON-SCINDIBILITA'

Nel R.I.S., il montante prodotto dall'investimento di un capitale unitario tra due date u e y è diverso da quello che si ottiene se ad una qualsiasi data intermedia x si disinveste il montante maturato fino ad allora e lo si reinveste immediatamente per il periodo $[x, y]$.

$$r(u; y) \neq r(u; x) \cdot r(x; y)$$

$$(1 + i \cdot (y - u)) \neq (1 + i \cdot (x - u)) \cdot (1 + i \cdot (y - x))$$

B

Le leggi finanziarie del R.I.S. (fattore di capitalizzazione e fattore di attualizzazione) non sono scindibili

Esempio

Tempo iniziale u : 31.12.96

Capitale investito P_u : \$1000 Tasso di interesse i : 5% annuo

Tempo finale y : 31.12.99

Tempo intermedio x : 31.12.98

Disinvestimento al tempo intermedio x ($x-u=2$ anni) e reinvestimento del montante maturato fino ad allora per il periodo compreso tra x e la data di scadenza dell'operazione y ($y-x=1$ anno)

Montante senza “interruzione”

$$P_u \cdot (1 + i \cdot (y - u)) = \$1000 \cdot (1.15) = \$1150$$

Montante con disinvestimento e reinvestimento

$$P_u \cdot (1 + i \cdot (x - u)) \cdot (1 + i \cdot (y - x)) = \$1000 \cdot 1.10 \cdot 1.05 = \$1155$$

REGIME DELLO SCONTO COMMERCIALE (R.S.C.)

**Fattore di attualizzazione funzione del tasso di sconto
secondo una relazione lineare:**

$$v(t; t + n) = 1 - n \cdot d$$

Vincolo rilevante per l'applicabilità del R.S.C.:

$$n < \frac{1}{d}$$

GRAFICI FUNZIONI NEL R.S.C.

Per qualsiasi numero reale positivo $w \in \mathfrak{R}^+$

B

funzione fattore di capitalizzazione

$$r(w) = r(t; t + w) = (1 - w \cdot d)^{-1}$$

funzione fattore di attualizzazione

$$v(w) = v(t; t + w) = 1 - w \cdot d$$

funzione tasso di interesse

$$i(w) = i(t; t + w) = (1 - w \cdot d)^{-1} - 1$$

funzione tasso di sconto

$$d(w) = d(t; t + w) = w \cdot d$$

FORZA DI INTERESSE E RENDIMENTO A SCADENZA NEL R.S.C.

FORZA DI INTERESSE

$$d(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{d}{(1-t \cdot d)}$$

RENDIMENTO A SCADENZA

$$h(t) \equiv -\frac{1}{t} \cdot \log(v(t)) = -\frac{1}{t} \cdot \log(1-t \cdot d)$$

NON-SCINDIBILITA'

Nel R.S.C., il montante prodotto dall'investimento di un capitale unitario tra due date u e y è diverso da quello che si ottiene se ad una qualsiasi data intermedia x si disinveste il montante maturato fino ad allora e lo si reinveste immediatamente per il periodo $[x, y]$.

$$r(u; y) \neq r(u; x) \cdot r(x; y)$$

$$(1 - d \cdot (y - u))^{-1} \neq (1 - d \cdot (x - u))^{-1} \cdot (1 - d \cdot (y - x))^{-1}$$

B

Le leggi finanziarie del R.S.C. (fattore di capitalizzazione e fattore di attualizzazione) non sono scindibili