

INTEGRALI INDEFINITI

La determinazione di una funzione primitiva è un problema inverso a quello dello studio della derivata di una funzione.

Il nostro problema diviene ora. Data una funzione $y=f(x)$ definita in un intervallo $[a,b]$ vogliamo trovare se esiste una funzione F definita nello stesso intervallo che ammetta la funzione $y=f(x)$ come funzione derivata.

Diamo la seguente definizione.

Se in un intervallo $[a,b]$ una funzione $Y=F(x)$ ammette per funzione derivata $y=f(x)$ allora $Y=F(x)$ è chiamata **funzione primitiva** di $y=f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$.

Esempio n. 1

La funzione $Y = 5x^4$ che ammette come derivata la funzione $y = 20x^3$ è una primitiva della $y = 20x^3$

Sia $y=f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo $[a,b]$ e definiamo con $Y=F(x)$ la sua primitiva in questo intervallo. Per ipotesi abbiamo che: $F'(x)=f(x)$

Se k è una funzione costante qualunque, allora la funzione $G(x)=F(x)+k$ è ancora una funzione primitiva di $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$.

Dimostrazione.

Deriviamo la $G(x)$. Si ha: $G'(x)=F'(x)+0=f(x)$

Consideriamo ora la funzione: $h'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$ da cui deriva che la funzione $h(x)$ è una funzione costante.

Quanto detto ci consente di formulare il seguente teorema.

Se una funzione $f(x)$ ammette una primitiva $F(x)$, essa ne ammette infinite altre che differiscono da questa di una quantità costante arbitraria.

La primitiva generale $F(x)+k$ si chiama integrale indefinito di $f(x)$ e si denota con la scrittura: $\int f(x)dx$ in cui il simbolo \int è detto segno d'integrazione o segno somma, $f(x)$ è detta funzione integranda

Ovvero :

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

In altre parole, per qualsiasi primitiva $F(x)$ di $f(x)$ risulta:

$$DF(x)=f(x) \quad \text{ovvero} \quad D\int f(x)dx = f(x)$$

da cui si deduce che l'integrazione indefinita è l'operazione inversa della derivazione

Proprietà degli integrali indefiniti

- 1) ogni funzione continua in un intervallo ammette sempre primitive;
- 2) se k è una funzione costante qualunque si ha:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx ;$$

- 3) se $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sono n funzione continue allora:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx$$

- 4) combinando la 2 e la 3 ovviamente si ha:

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1 \int f(x)dx + k_2 \int g(x)dx$$

Integrali indefiniti immediati e tabella delle primitive di alcune funzioni di uso frequente (1)

$\int x^n dx =$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\int dx =$	$x + c$
$\int x dx =$	$\frac{1}{2}x^2 + c$
$\int \sqrt{x} dx =$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$	$2\sqrt{x} + c$
$\int \frac{1}{x^2} dx =$	$-\frac{1}{x} + c$
$\int \frac{1}{x} dx =$	$\ln x + c$
$\int e^x dx =$	$e^x + c$
$\int e^{-x} dx =$	$e^{-x} + c$
$\int a^x dx =$	$\frac{1}{\ln a}a^x + c$
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} dx =$	$\sqrt{x^2 + a} + c$

Integrali indefiniti immediati e tabella delle primitive di alcune funzioni di uso frequente (2)

$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$	$-\sqrt{a^2 - x^2} + c$
$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx =$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + c$
$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx =$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx =$	$\ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a} \right + c$
$\int [g(x)]^n g'(x) dx =$	$\frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1} + c$
$\int \frac{1}{g(x)} g'(x) dx =$	$\ln g(x) + c$
$\int a^{g(x)} g'(x) dx =$	$\frac{a^{g(x)}}{\ln a} + c$
$\int e^{g(x)} g'(x) dx =$	$e^{g(x)} + c$
$\int \frac{1}{a^2 - g^2(x)} g'(x) dx =$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+g(x)}{a-g(x)} \right + c$

Metodi di integrazione indefinita.

Non esiste un metodo generale che consenta di determinare l'integrale indefinito di qualsiasi funzione continua, ecco perché nella pratica si adoperano particolari artifici che servono a ricondurre gli integrali dati ad altri già noti o più facilmente calcolabili. Esistono tre principali metodi, quello per scomposizione per sostituzione e per parti.

Integrazione per scomposizione.

Consiste nello scomporre la funzione che si vuole integrare nella somma algebrica di funzioni, di ciascuna delle quali si conosca l'integrale indefinito ovvero è di più facile calcolo.

Esempio n. 2

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x}{1+x} dx$$

Questo non è ovviamente un integrale immediato.

Facciamo alcuni passaggi. Aggiungiamo e sottraiamo 1 al numeratore. Otteniamo:

$$\int \frac{x+1-1}{1+x} dx = \int \frac{x+1}{1+x} dx - \int \frac{1}{1+x} dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x} dx = x - \ln|1+x| + c$$

Integrazione per sostituzione o cambiamento di variabile

Avviene molte volte che il calcolo dell'integrale si semplifichi allorché si modifichi la variabile d'integrazione. Supponiamo di avere il seguente integrale:

$\int f(x)dx$ (*). Il metodo per sostituzione opera in questo modo. Si fissa la sostituzione della variabile x con un'altra funzione cioè: $x = g(t)$, si calcola il differenziale della x in questo modo $dx = g'(t)dt$ ovvero $f'(x)dx = g'(t)dt$ dopo di che nella (*) si sostituiscono alla x a dx le espressioni così trovate. Calcolato quindi l'integrale in t si sostituisce alla fine a t il valore originario della funzione.

Esempio n. 3

Risolvere il seguente integrale:

$$\int \frac{e^x dx}{1 + \sqrt{e^x}}$$

Semplifichiamo il tutto ponendo $\sqrt{e^x} = t$ da cui $e^x = t^2$ e $e^x dx = 2t dt$ per cui il nostro integrale diviene:

$$\int \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int \frac{t dt}{1+t} = 2 \int \frac{t}{1+t} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{1+t} = 2t - 2 \ln(t+1) + c$$

Infine sostituendo alla t il valore originario otteniamo che:

$$\int \frac{e^x dx}{1 + \sqrt{e^x}} = 2\sqrt{e^x} - 2 \ln(\sqrt{e^x} + 1) + c$$

Integrazione per parti

La regola dell'integrazione per parti dice che se abbiamo un integrale indefinito nella forma:

$$\int f(x)g'(x)dx$$

allora la risoluzione può essere fornita dalla seguente espressione:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Esempio n. 4

Calcolare l'integrale: $\int \ln x dx$

Poniamo: $f(x) = \ln x$ e $g'(x) = 1$

Riscriviamo l'integrale, per la formula risolutiva sarà:

$$\int \ln x \cdot 1 dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} x dx = \ln x \cdot x - \int dx = \ln x \cdot x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

INTEGRALI DEFINITI

Sia $y=f(x)$ una funzione continua definita nell'intervallo $[a,b]$ e ivi positiva.

Rappresentiamo il tutto graficamente:

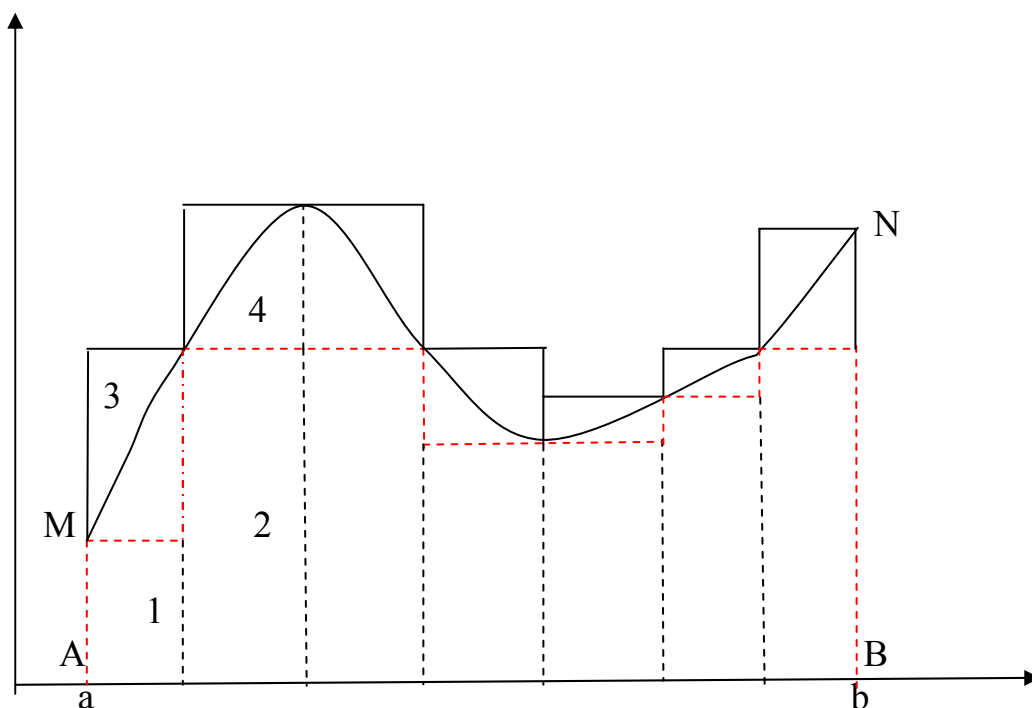


Figura 1. Integrali definiti

Consideriamo il quadrilatero di estremi $ABMN$ delimitato dalla funzione $y=f(x)$, dall'asse delle x e dalle parallele AM e BN . Definiamo tale quadrilatero Trapezoide.

Dividiamo l'intervallo di definizione $[a,b]$ in n parti uguali e definiamo $h=(b-a)/n$ l'ampiezza di ciascuna di queste n parti (base di ogni rettangolo).

Definiamo con m_i il valore minimo che la funzione $f(x)$ assume nell' i -esimo intervallino. Sarà $m_1 \cdot h$ l'area del rettangolo che indicheremo con 1, $m_2 \cdot h$ l'area del rettangolo che indicheremo con 2, etc.

Definiamo la successione $s_n = m_1 \cdot h + m_2 \cdot h + \dots + m_n \cdot h$ la somma delle aree dei rettangoli che hanno come base l'ampiezza degli intervallini e per altezza le ordinate

m_i . Andremo così ad individuare l'area all'interno della Figura 1 (risulta essere la porzione di piano racchiusa entro la linea rossa tratteggiata).

Definiamo invece con M_i il valore massimo che la funzione $y=f(x)$ assume nell'*i*-esimo intervallino. Sarà $M_1 \cdot h$ l'area del rettangolo che indicheremo con 3, $M_2 \cdot h$ l'area del rettangolo che indicheremo con 4, etc.

Definiamo la successione $S_n = M_1 \cdot h + M_2 \cdot h + \dots + M_n \cdot h$ la somma delle aree dei rettangoli che hanno come base l'ampiezza degli intervallini e per altezza le ordinate M_i .

L'insieme dei primi rettangoli costituisce una figura che si chiama **plurittangolo inscritto** nel trapezoide, l'insieme dei secondi rettangoli si chiama **plurittangolo circoscritto** che contiene il trapezoide.

Possiamo ora dare la seguente definizione.

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$ le due successioni s_n e S_n sono convergenti¹ e convergono verso lo stesso numero, cioè: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Tale limite comune alle due successione prende il nome di integrale definito e si indica come: $\int_a^b f(x)dx$ con a e b che si chiamano estremi dell'integrale, a estremo inferiore e b estremo superiore. In particolare quindi risulta che:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

NOTA:

L'integrale pertanto non è altro che l'area del trapezoide $ABMN$ che avevano rappresentato in figura. E' il limite comune delle due successioni s_n e S_n ed è quindi un numero.

¹ Una successione di n termini si dice convergente se il limite della stessa per $n \rightarrow \infty$ è finito, divergente invece, quando tale limite è infinito.

Proprietà dell'integrale definito

Sia $a < b$ per definizione.

$$1) \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx ;$$

$$2) \int_a^a f(x)dx = 0 ;$$

Siano a, b, c tre punti dell'intervallo di definizione della $f(x)$ con $a < c < b$

$$3) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ;$$

Siano $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$

$$4) \int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx$$

Se k è una costante allora:

$$5) \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$6) \int_a^b f(x)dx = (b - a)f(x_1)$$

Questa ultima proprietà prende il nome di **teorema della media**.

L'integrale della funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a, b]$ è sempre uguale all'ampiezza dell'intervallo, moltiplicata per il valore che la funzione integranda assume in un conveniente punto x_1 dell'intervallo $[a, b]$.

Relazione tra integrale indefinito e finito di una funzione

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e sia x un punto variabile di tale intervallo. Consideriamo la funzione: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ che definiamo funzione integrale.

Nota:

abbiamo indicato con t la variabile di integrazione della funzione integranda per distinguerla dalla variabile x dell'intervallo (estremo superiore dell'intervallo).

Tale integrale è sicuramente funzione dell'estremo superiore x , cioè ad ogni valore della x dell'intervallo $[a, b]$ corrisponde uno ed un solo valore per l'integrale.

Teorema di Torricelli.

Se la funzione integranda $f(x)$ è continua, esiste la derivata della funzione integrale $F(x)$ e questa sarà uguale al valore che la funzione integranda assume nello stesso punto, cioè: $F'(x) = f(x)$

Dimostrazione.

Consideriamo l'incremento della $F(x)$ dal punto x al punto $x+h$. Si ha:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \quad (*)$$

Per le proprietà viste in precedenza:

$$\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Sostituendo questa espressione nella (*) avremo:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Applichiamo a questo integrale il teorema della media con x_1 conveniente punto interno all'intervallo $[x, x+h]$, sarà:

$$F(x+h) - F(x) = (x+h-x)f(x_1)$$

da cui:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x_1)$$

Calcoliamo ora il limite per h tendente a 0 dell'espressione su indicata, sarà:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_1)$$

Se tenuto fisso x , si fa tendere h a 0 , il valore x_1 compreso tra x e $x+h$ tende a x , per cui:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_1) = f(x)$$

perciò:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x) \quad \text{c.v.d.}$$

Conseguenza:

Il teorema che abbiamo descritto ci consente di calcolare così l'integrale finito di una funzione per mezzo dell'integrale indefinito stesso evitando in tal modo il calcolo del limite della successione s_n o S_n .

Infatti, sia $l(x)$ una qualunque primitiva di $f(x)$. Sarà $l'(x) = f(x)$ per il teorema precedente, così come sempre per il teorema precedente $F'(x) = f(x)$. Le due funzioni $F(x)$ e $l(x)$ entrambe primitive differiscono per una costante k per cui: $l(x) = F(x) + k$ ovvero $l(x) = \int_a^x f(t)dt + k$ (**).

Se poniamo $x=a$ l'integrale (**) diviene:

$$l(a) = \int_a^a f(t)dt + k = k$$

per cui:

$$l(x) = \int_a^x f(t)dt + l(a)$$

da cui:

$$\int_a^x f(t)dt = l(x) - l(a)$$

e per $x=b$ avremo:

$$\int_a^b f(t)dt = l(b) - l(a)$$

Definizione:

data una qualunque primitiva $l(x)$ della funzione integranda $f(x)$, l'integrale tra a e b della $f(x)$ è dato dalla differenza tra i valori che la $l(x)$ assume nei due estremi a e b .

La differenza:

$$l(b) - l(a) = [l(x)]_a^b$$

per cui:

$$\int_a^b f(t)dt = [l(x)]_a^b$$

Le formule risolutive degli integrali finiti sono analoghe a quanto visto per gli integrali finiti.