

PROBLEMA

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2 \times 4)$$

- **Costruire matrici quadrate contenute in A (possibili solo matrici quadrate 2×2 e 1×1)**
- **Fare i determinanti delle matrici quadrate contenute in A**
- **Questo porta al concetto di minore di una matrice A**

MINORE DI UNA MATRICE

Sia A una matrice di ordine $m \times n$

Scegliendo in modo arbitrario

k sue righe e k sue colonne

si ottiene un matrice quadrata di
ordine $k \times k$

il cui determinante

si chiama minore di ordine k della
matrice A

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Un minore di ordine 3 della matrice A si ottiene per esempio sopprimendo la quarta colonna di A

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

RANGO DI UNA MATRICE

Sia A una matrice di ordine $m \times n$
Molti minori di ordine k possono essere estratti da A

L'ordine massimo dei minori non nulli estraibili dalla matrice A si dice rango di A e si denota con $r(A)$ o $rg(A)$

Si noti che $1 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$

ESEMPIO:

A matrice $(3 \times 4) \Rightarrow r(A) \leq 3$

OSSERVAZIONE

Dire che una matrice A (4×5) ha rango 3 vuol dire che

- **i minori di ordine 4 sono tutti nulli, ossia i determinanti delle matrici 4×4 estraibili da A sono tutti uguali a zero**
- **esiste (almeno) un minore di ordine 3 non nullo, ossia vi è una matrice 3×3 estraibile da A che ha determinante diverso da zero**

OSSERVAZIONE

Se A è una matrice quadrata di ordine n allora

$$r(A) \leq n$$

- Se

$$\det A \neq 0 \Rightarrow r(A) = n$$

- Se

$$\det A = 0 \Rightarrow r(A) < n$$

*ESEMPI DI CALCOLO DEL RANGO
DI UNA MATRICE*

MATRICI DI ORDINE 2×2

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Poichè

$$\det A = 2 \neq 0$$

si ha

$$r(A) = 2$$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = 0$ implica $r(A) < 2$

Segue che

$$r(A) = 1$$

poichè vi è un minore di ordine 1 di A che è diverso da zero

Per esempio il minore

$$\det(a_{11}) = \det(1) = 1 \neq 0$$

**3. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$,
il rango della matrice**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Si ha

$$\mathit{det}A = k$$

Segue che

$$\left\{ \begin{array}{ll} r(A) = 2 & (\mathit{det}A \neq 0) \quad \text{se } k \neq 0 \\ r(A) = 1 & (\mathit{det}A = 0) \quad \text{se } k = 0 \end{array} \right.$$

MATRICI DI ORDINE 2×3

1.
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Si deve avere

$$r(A) \leq 2$$

Tutti i suoi minori di ordine 2 sono

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$r(A) = 2$ poichè esiste un minore di ordine 2 di A che è $\neq 0$

**2. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$,
il rango della matrice**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & k \end{bmatrix}$$

Si deve avere

$$r(A) \leq 2$$

I suoi minori di ordine 2 sono

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & k \end{vmatrix} = k$$

**$r(A) = 2$ per ogni valore di k
poichè esiste sempre un minore
di ordine 2 di A che è $\neq 0$**

**3. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$,
il rango della matrice**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & k + 4 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

Si deve avere

$$r(A) \leq 2$$

I suoi minori di ordine 2 sono

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & k+4 \\ 0 & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & k+4 \\ 1 & k \end{vmatrix} = -(k+4)$$

Quindi

$$\begin{cases} r(A) = 2 & (\det A \neq 0) \text{ se } k \neq -4 \\ r(A) = 1 & (\det A = 0) \text{ se } k = -4 \end{cases}$$

MATRICI DI ORDINE 3×3

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Poichè

$$\det A = 6 \neq 0$$

si ha

$$r(A) = 3$$

2.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det A = 0$ implica $r(A) < 3$

Poichè A ha un minore di ordine 2 diverso da zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

segue che

$$r(A) = 2$$

3.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det A = 0$ implica $r(A) < 3$

A non ha un minore di ordine 2 diverso da zero, quindi $r(A) < 2$

Poichè vi è un minore di ordine 1 diverso da zero, per esempio il minore

$$\det(a_{11}) = \det(1) = 1 \neq 0$$

segue che $r(A) = 1$

ESERCIZIO

Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 + k & 0 & -2 \\ 6 & 2k & -4 \\ -9 & -3k & 6 \end{bmatrix}$$

Risulta

$$r(A) \leq 3$$

- Poichè

$$\det A = 0$$

segue che

$$r(A) \neq 3 \text{ per ogni } k \in \mathbb{R}$$

Quindi per nessun valore di k (ossia mai) risulta $r(A) = 3$

Da sopra si ha che

$$r(A) \leq 2$$

- Tra tutti i possibili minori di ordine 2 di A scegliamo il minore

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2k & -4 \end{vmatrix} = 4k$$

Quindi

$$k \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

- Resta da studiare il caso $k = 0$

- Sostituendo il valore $k = 0$ nella matrice A si ottiene che la matrice diventa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -4 \\ -9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Poichè non vi sono minori di ordine 2 diversi da zero segue che

$$k = 0 \Rightarrow r(A) = 1$$

RIASSUMENDO

- $r(A) = 3$: **mai**
- $r(A) = 2$: **per $k \neq 0$**
- $r(A) = 1$: **per $k = 0$**

Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Si osservi che $r(A) \leq 3$

Poichè tutti i minori di A di ordine 3 (sono quattro) sono nulli, il rango di A non è uguale a 3

Quindi $r(A) \leq 2$

Poichè vi è un minore di ordine 2 di A non nullo, per esempio

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

si ha $r(A) = 2$

Per un risultato che ora vedremo, il numero dei minori di ordine 3 da controllare nell'esercizio precedente può essere ridotto da quattro a due

Teorema di Kronecker:

Se una matrice A (quadrata o rettangolare) ha

un minore M non nullo di ordine r

**tutti nulli i minori di ordine $r+1$ di A
ottenuti "orlando" M con una riga
ed una colonna qualsiasi di A**

allora $r(A) = r$

Si dice che si orla una matrice quadrata quando le si aggiungono una riga ed una colonna precedenti la prima o seguenti l'ultima

Per esempio la matrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

dell'esercizio precedente ha due sole orlate:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$