

EQUAZIONI RAZIONALI

◆ Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, la relazione:

$$A(x) = B(x)$$

scritta allo scopo di determinare, se esistono, valori reali per i quali $A(x)$ e $B(x)$ assumono lo stesso valore, si chiama **equazione algebrica nell'incognita x**.

Un numero x_0 è soluzione dell'equazione se

$$A(x_0) = B(x_0)$$

- Equazione **impossibile**: non ha soluzioni
- Equazione **indeterminata**: ha infinite soluzioni
- Equazioni **equivalenti**: hanno lo stesso insieme di soluzioni

• **Principio di addizione**:

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) \pm M(x) = B(x) \pm M(x) \quad \text{dove } M(x) \text{ è un polinomio;}$$

• **Principio di moltiplicazione**:

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) \cdot M(x) = B(x) \cdot M(x) \quad \text{dove } M(x) \neq 0 \text{ è un polinomio.}$$

1. EQUAZIONI ALGEBRICHE DI PRIMO GRADO o LINEARI

◆ Un'equazione algebrica si dice **lineare**, se è riducibile alla forma

$$ax = b \quad \text{con } a, b \text{ numeri qualsiasi}$$

• Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ l'equazione è determinata ed, in questo caso, la **soluzione** o **radice** è

$$x = \frac{b}{a}.$$

- Se $a = 0$ e $b = 0$ l'equazione si dice indeterminata
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'equazione è impossibile
- Se $a \neq 0$ e $b = 0$ l'equazione ha soluzione $x = 0$.

2. EQUAZIONI ALGEBRICHE DI SECONDO GRADO

◆ Un'equazione algebrica si dice di **secondo grado** se, ridotta a forma normale, è del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove a, b, c rappresentano tre numeri reali, con a necessariamente diverso da zero.

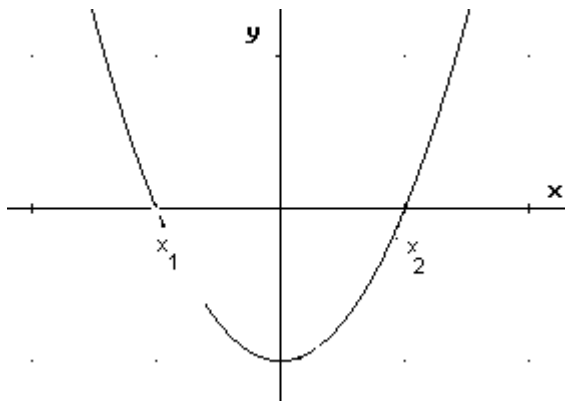
Si hanno i seguenti casi:

- Se: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ le soluzioni sono $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ \vee $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- Se: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ la soluzione è $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Se: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali.

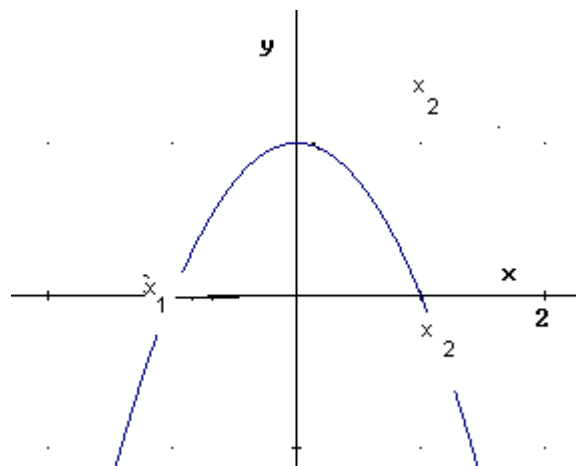
Ad ogni equazione di secondo grado possiamo associare una parabola con asse parallelo all'asse y che ha equazione generica $y = ax^2 + bx + c$. Possiamo approssimativamente disegnare tale parabola: la concavità è data dal segno di a e le intersezioni con l'asse x sono proprio x_1 e x_2 .

- Se: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

$a > 0$

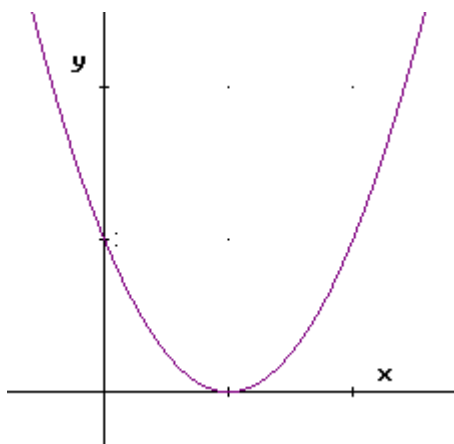


$a < 0$

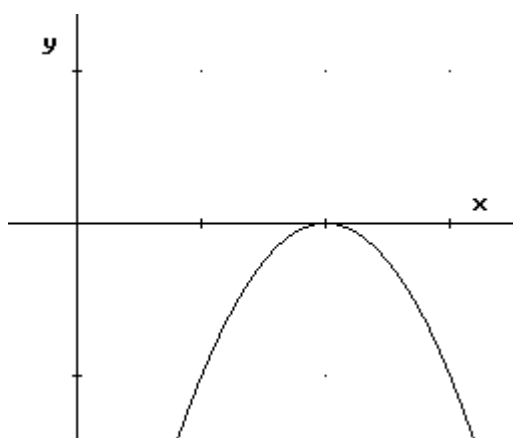


•Se: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$a > 0$

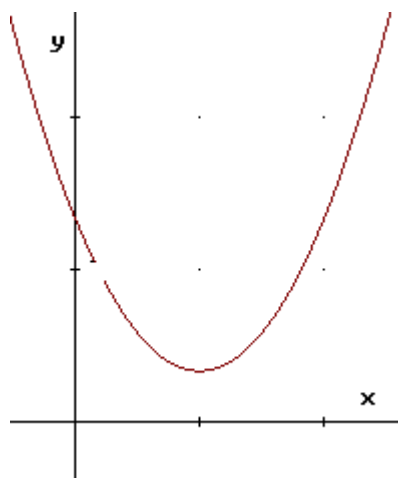


$a < 0$

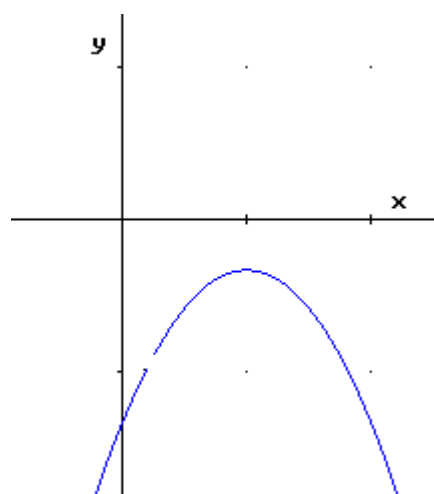


•Se: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$a > 0$



$a < 0$



3. EQUAZIONI BIQUADRATICHE (trinomie)

Sono equazioni della forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Per risolverle basta operare una sostituzione di incognita, ponendo $x^2 = t$, conseguentemente $x^4 = t^2$: con questa sostituzione otteniamo un'equazione $at^2 + bt + c = 0$ di secondo grado in t, che risolviamo normalmente, dopodiché sostituiamo nuovamente per ricavare le soluzioni in x .

EQUAZIONI IRRAZIONALI

◆ Un'equazione a un'incognita si dice **irrazionale** quando l'incognita figura nel radicando di qualche radicale contenuto nell'equazione.

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

I radicali di indice pari sono da considerarsi in senso aritmetico mentre quelli di indice dispari sono radicali algebrici. L'espressione $\sqrt[n]{f(x)}$ per n pari avrà dunque significato solo per $f(x) \geq 0$ e avrà valore sempre positivo o nullo.

Per risolvere questo tipo di equazioni si devono elevare entrambi i membri a una determinata potenza n , e questo è un passaggio che può introdurre soluzioni estranee all'equazione se n è pari.

Infatti:

- Se n è dispari $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n \quad \forall a, b \in \mathfrak{R}$
- Se n è pari $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n \quad \forall a, b \in \mathfrak{R}$ con a e b concordi

EQUAZIONI CONTENENTI UN SOLO RADICALE

A. RADICE DI INDICE DISPARI

E' sufficiente elevare ad n entrambi i membri dell'equazione, senza timore di introdurre alcuna soluzione estranea.

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = [g(x)]^n$$

In questo modo l'equazione data si trasforma in un'equazione razionale equivalente.

B. RADICE DI INDICE PARI

Si procede ancora elevando a n entrambi i membri, ma questa volta bisogna porre alcune condizioni (disequazioni), che danno vita, perciò a un sistema misto.

→ il radicando $f(x)$ deve essere maggiore o uguale a zero perché il radicale abbia significato (*realtà del radicale*);

→ $g(x)$ deve essere necessariamente non negativa, poiché il radicale aritmetico $\sqrt[n]{f(x)}$ è sicuramente maggiore o uguale a zero (*concordanza dei segni*).

Si tratta di impostare il sistema misto:

$$\begin{cases} f(x) = [g(x)]^n \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Possiamo fare a meno di scrivere la condizione di realtà se notiamo che, per n pari, si ha automaticamente

$$f(x) = [g(x)]^n \geq 0$$

In definitiva:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = [g(x)]^n \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO (MODULO)

RICORDARE :

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Analizzeremo le equazioni modulari del tipo:

$$|f(x)| = k$$

- ◆ $k < 0 \Leftrightarrow$ l'equazione non ha soluzione
- ◆ $k = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
- ◆ $k > 0 \Leftrightarrow f(x) = -k \vee f(x) = k$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Ricordiamo la definizione che abbiamo dato nella prima lezione di logaritmo:

♦ Il **logaritmo** di un numero positivo b nella base $a > 0, a \neq 1$ (ovvero $\log_a b$) è l'esponente che bisogna dare alla base a per ottenere b .

♦ Si chiama **equazione logaritmica** ogni equazione in cui compare il logaritmo dell'incognita, o di qualche espressione contenente l'incognita.

1. EQUAZIONI DEL TIPO $\log_a x = c$

$$\bullet \log_a x = c \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 & (C.E.) \\ x = a^c & (definizione) \end{cases}$$

2. EQUAZIONI DEL TIPO $\log_a f(x) = c$

$$\bullet \log_a f(x) = c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 & (C.E.) \\ f(x) = a^c & (definizione) \end{cases}$$

3. EQUAZIONI DEL TIPO $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

$$\bullet \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 & (C.E.) \\ g(x) > 0 & (C.E.) \\ f(x) = g(x) & (uguaglio argomenti) \end{cases}$$

4. EQUAZIONI DEL TIPO $f(\log_a x) = c$

- $f(\log_a x) = c \rightarrow$ pongo la C.E. $x > 0 \rightarrow$ opero la sostituzione $\log_a x = t \rightarrow$ risolvo la conseguente equazione in $t \rightarrow$ torno a sostituire

EQUAZIONI ESPONENZIALI

◆ Si chiama **equazione esponenziale** ogni equazione in cui l'incognita compare all'esponente di una o più potenze

1. EQUAZIONI DEL TIPO $a^x = c$

Affinché ci sia una soluzione dell'equazione deve accadere che:

1. $a > 0, a \neq 1$ per definizione di esponenziale;
2. $c > 0$ poiché a^x risulta sempre positivo.

$$\bullet \quad a^x = c \Leftrightarrow \underset{\substack{\text{applico} \\ \text{logaritmi}}}{\log_a a^x} = \log_a c \Leftrightarrow \underset{\substack{\text{proprietà} \\ \text{logaritmi}}}{x \cdot \log_a a} = \log_a c \Leftrightarrow x = \log_a c$$

N.B. $a \neq 1, c=1 \Rightarrow a^x = 1$ ammette come soluzione $x=0$ poiché $a^0 = 1$.

N.B. Ci sono casi in cui, prima di risolvere l'equazione esponenziale è necessario porre le condizioni d'esistenza.

2. EQUAZIONI DEL TIPO $a^{f(x)} = c$

$$\bullet \quad a^{f(x)} = c \Leftrightarrow \underset{\substack{\text{applico} \\ \text{logaritmi}}}{\log_a a^{f(x)}} = \log_a c \Leftrightarrow \underset{\substack{\text{proprietà} \\ \text{logaritmi}}}{f(x) \cdot \log_a a} = \log_a c \Leftrightarrow f(x) = \log_a c$$

3. EQUAZIONI DEL TIPO $f(a^x) = c$

- $f(a^x) = c \rightarrow$ pongo $a^x = t \rightarrow$ risolvo l'equazione in $t \rightarrow$ torno all'equazione in x

4. EQUAZIONI DEL TIPO $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

$$\bullet \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$