DISEQUAZIONI RAZIONALI

♦Una **disequazione** è una disuguaglianza fra due espressioni letterali per la quale si ricercano i valori delle lettere che rendono la disuguaglianza vera.

•**Primo principio di equivalenza**:

$A(x) > B(x) \Leftrightarrow A(x) \pm M(x) > B(x) \pm M(x)$ dove $M(x)$ è un polinomio;

$A(x) < B(x) \Leftrightarrow A(x) \pm M(x) < B(x) \pm M(x)$ dove $M(x)$ è un polinomio;

•**Secondo principio di equivalenza**:

$A(x) > B(x) \Leftrightarrow k \cdot A(x) > k \cdot B(x)$ dove $k > 0$ è un numero;

$A(x) < B(x) \Leftrightarrow k \cdot A(x) < k \cdot B(x)$ dove $k > 0$ è un numero;

$A(x) > B(x) \Leftrightarrow h \cdot A(x) < h \cdot B(x)$ dove $h < 0$ è un numero;

$A(x) < B(x) \Leftrightarrow h \cdot A(x) > h \cdot B(x)$ dove $h < 0$ è un numero;

N.B. Attenzione al cambio di verso quando si moltiplicano ambo i membri di una disequazione per un numero negativo!!!!

1. DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Una disequazione razionale di primo grado, o lineare, è sempre riconducibile a uno dei seguenti tipi:

$$ax > b \qquad \text{oppure} \qquad ax < b$$

dove a e b sono numeri qualunque.
Se $a \neq 0$, si può sempre supporre $a > 0$. In questo caso si ha:

$$ax > b \Leftrightarrow x > \frac{b}{a}, \qquad ax < b \Leftrightarrow x < \frac{b}{a}$$

2. <u>DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO.</u>

Una disequazione di secondo grado in x si presenta o è riconducibile alla forma

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{oppure} \qquad ax^2 + bx + c < 0$$

Il modo più semplice per risolvere un’equazione di secondo grado è quello di associarla alla parabola corrispondente e usare un metodo grafico.

ESEMPIO:

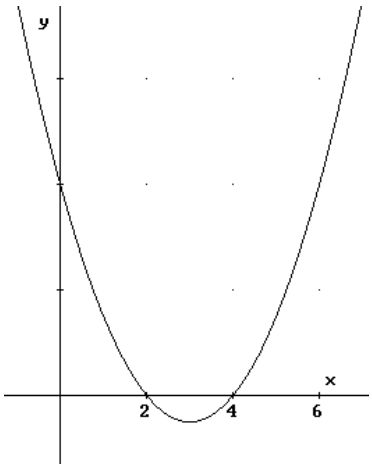
disequazione: $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 > 0$ → parabola associata: $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

Poiché compare il “segno $>$”, risolvere le disequazione significa calcolare le ascisse dei punti della parabola che hanno ordinata positiva ($y > 0$).

Risolvendo l’equazione associata troviamo :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{9 - 16\frac{1}{2}}}{1} = 3 - \sqrt{9-8} = 2 \qquad\qquad x_1 = \frac{3 + \sqrt{9 - 16\frac{1}{2}}}{1} = 3 + \sqrt{9-8} = 4$$

Essendo $a = \frac{1}{2} > 0$ la concavità è rivolta verso l’alto. Possiamo disegnare approssimativamente la parabola.



I punti che hanno ordinata positiva sono quelli che hanno ascissa minore di 2 oppure maggiore di 4 ovvero

$$x < 2 \vee x > 4$$

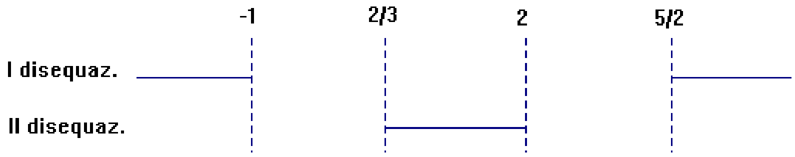
3. SISTEMI DI DISEQUAZIONI

Trovare le **soluzioni comuni** → sovrapporre visivamente gli intervalli → determinare un sottointervallo in cui tutte le disequazioni sono contemporaneamente soddisfatte.

1) $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 > 0 \\ 3x^2 - 8x + 4 \le 0 \end{cases}$

I disequaz.verificata se : $x < -1$ V $x > \frac{5}{2}$

II disequaz.verificata se: $\frac{2}{3} \le x \le 2$



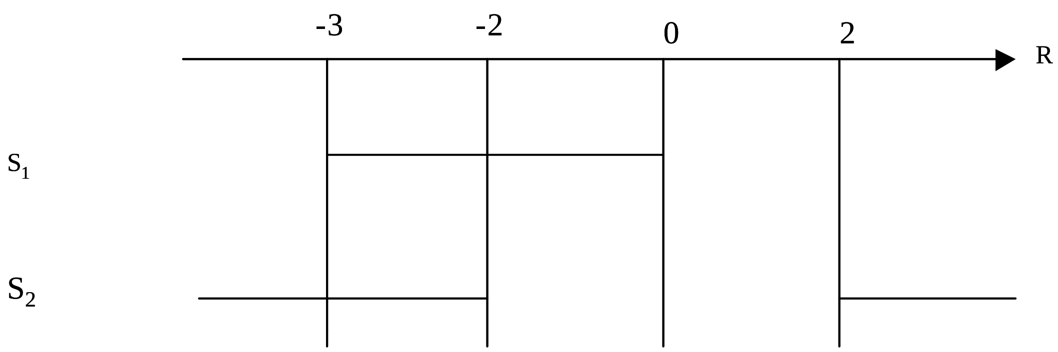
Quindi il sistema non ha soluzione.

2) $\begin{cases} x^2 + 3x \le 0 \\ 3x^2 - 12 > 0 \end{cases}$

Indichiamo con S_1 e S_2 gli insiemi di soluzione, rispettivamente, della prima e della seconda disequazione .Otteniamo:

S_1 : $-3 \le x \le 0$

S_2 : $x < -2 \vee x > 2$



Quindi il sistema ha soluzione: $-3 \le x < -2$.

4. DISEQUAZIONI DI GRADO RICONDUCIBILE AL PRIMO

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

Per risolvere tale disequazione si può adottare la solita formula delle equazione di II grado oppure riconoscere che il trinomio è ottenibile dal prodotto di due binomi:

$$(x-3)(x-2) > 0$$

Il prodotto di due fattori è positivo se e solo se essi sono di segno concorde, la ricerca delle soluzioni si riduce allo studio del segno dei fattori.

		2		3	R
Segno primo fattore	-		+		+
Segno secondo fattore	-		+		+
Segno prodotto	+		-		+

La disequazione di partenza richiedeva un prodotto maggiore di zero, dunque scegliamo, nella riga relativa al segno del prodotto, gli intervalli caratterizzati dal segno +:

$$x < 2 \vee x > 3$$

5. DISEQUAZIONI FRATTE O FRAZIONARIE

Le disequazioni fratte sono disequazioni in cui la variabile x compare al denominatore di una frazione. Esse, pertanto, sono nella forma generica

$$\frac{N(x)}{D(x)} > 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{N(x)}{D(x)} < 0$$

Come il prodotto, anche il quoziente tra due polinomi è positivo se e solo se essi sono di segno concorde, mentre è negativo se e solo se essi sono di segno discorde. Dobbiamo stare attenti, inoltre, a scartare dalle soluzioni quei valori che annullano il denominatore, per i quali la frazione perderebbe di significato.

Risolvere la disequazione: $\frac{x^2 - x + 5}{4x^2 + x - 3} \geq 0$

$N(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 5$

$D(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > \frac{3}{4}$

		-1		3 / 4		5		R
Segno N	+		−		−		+	
Segno D	+		−		+		+	
Segno N / D	+		+		−		+	

Quindi la disequazione è verificata se: $x < -1 \vee -1 < x < \frac{3}{4} \vee x \geq 5$.

6. DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO (MODULO)

RICORDARE :

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & se \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & se \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Analizziamo le disequazioni modulari del tipo:

$$|f(x)| < k \quad \text{oppure} \quad |f(x)| > k$$

♦ $|f(x)| < k$

- $k \leq 0 \quad \Leftrightarrow$ la disequazione non ha soluzione
- $k > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -k < f(x) < k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > -k \\ f(x) < k \end{cases}$

♦ $|f(x)| > k$

- $k \leq 0 \quad \Leftrightarrow$ la disequazione è sempre verificata
- $k > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < -k \ \vee \ f(x) > k$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

DISEQUAZIONI CONTENENTI UN SOLO RADICALE

Le disequazioni si possono presentare in una delle due forme:

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \qquad \text{oppure} \qquad \sqrt[n]{f(x)} > g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono due espressioni reali.

A. RADICE DI INDICE PARI

- $$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < [g(x)]^n \end{cases}$$

→ il radicando $f(x)$ deve essere maggiore o uguale a zero perché il radicale abbia significato (*realtà del radicale*);

→ $g(x)$ deve essere necessariamente non negativa: la disequazione non avrebbe senso se $g(x)$ fosse negativa, a seguito della non negatività del primo membro

Fatto ciò è possibile elevare in tutta tranquillità ambo i membri alla n

- $$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^n \end{cases}$$

→ Se $g(x)$ è negativa e il radicale ha senso, la disequazione è banalmente verificata perché il I membro è positivo o nullo;

→ Se $g(x)$ è non negativa possiamo elevare ambo i membri alla n.

Nel secondo sistema la condizione di realtà del radicale è "inglobata" nella seconda disequazione.

B. RADICE DI INDICE DISPARI

Quando n è dispari "fila tutto liscio"!!! Non vi sono né condizioni da porre sui radicandi, né attenzioni da prestare all'atto di elevare alla n.
La soluzione della disequazione si trova semplicemente elevando a n ambo i membri.

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

1. **DISEQUAZIONI DEL TIPO $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ oppure $\log_a f(x) < \log_a g(x)$**

   Basta confrontare opportunamente gli argomenti tenendo conto della condizione di realtà .

- $0 < a < 1$ **:** $\underline{\log_a f(x) > \log_a g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

- $a > 1$ **:** $\underline{\log_a f(x) > \log_a g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

- $0 < a < 1$ **:** $\underline{\log_a f(x) < \log_a g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

- $a > 1$ **:** $\underline{\log_a f(x) < \log_a g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

Le prime due disequazioni sono le condizioni di realtà dei logaritmi, mentre la terza è il confronto tra gli argomenti : in essa si inverte o meno il verso a seconda che la base sia compresa tra zero e uno oppure maggiore di uno.

2. DISEQUAZIONI DEL TIPO $\log_a f(x) > c$ oppure $\log_a f(x) < c$

Scriviamo c sotto forma di logaritmo in base a: $c = \log_a a^c$.
Quindi

- $\log_a f(x) > c \iff \log_a f(x) > \log_a a^c$
- $\log_a f(x) < c \iff \log_a f(x) < \log_a a^c$

Da cui

- $0 < a < 1$: $\underline{\log_a f(x) > \log_a a^c} \iff \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^c \end{cases}$
- $a > 1$: $\underline{\log_a f(x) > \log_a a^c} \iff \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^c \end{cases}$
- $0 < a < 1$: $\underline{\log_a f(x) < \log_a a^c} \iff \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^c \end{cases}$
- $a > 1$: $\underline{\log_a f(x) < \log_a a^c} \iff \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^c \end{cases}$

3. DISEQUAZIONI DEL TIPO $f(\log_a x)>c$ oppure $f(\log_a x)<c$

In tali casi, dopo aver posto la condizione di esistenza $x > 0$, si opera la sostituzione $t = \log_a x$, si risolve la disequazione in t e poi si ritorna alla variabile x.

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

1. DISEQUAZIONI DEL TIPO $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ oppure $a^{f(x)} < a^{g(x)}$

Basta confrontare, opportunamente, gli esponenti.

- $0 < a < 1$: $\underline{a^{f(x)} > a^{g(x)}} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
- $a > 1$: $\underline{a^{f(x)} > a^{g(x)}} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- $0 < a < 1$: $\underline{a^{f(x)} < a^{g(x)}} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- $a > 1$: $\underline{a^{f(x)} < a^{g(x)}} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

2. DISEQUAZIONI DEL TIPO $a^{f(x)} > b^{g(x)}$ oppure $a^{f/x)} < a^{g(x)}$

Si ricorre ai logaritmi per abbassare gli esponenti

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \log a^{f(x)} > \log b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\log a > g(x)\log b$$

3. DISEQUAZIONI DEL TIPO $f(a^x) > c$ oppure $f(a^x) < c$

Si opera la sostituzione $t = a^x$, si risolve la disequazione in t e poi si ritorna alla variabile x.