INTEGRALI BIPOLARI PER PROBLEMI DI SORTING .

Silvia Angilella, Massimo Riccardo Costanzo, Salvatore Greco, Benedetto Matarazzo

Dipartimento di Economia e Metodi Quantitativi,
Facoltà di Economia, Università di Catania,
Corso Italia, 55, 95129 Catania, Italy.

EXTENDED ABSTRACT

Sia **A**={ x, y, z … } l'insieme delle azioni con cardinalità |A|=m, descritte mediante un vettore di n criteri **g** $=\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Il problema della classificazione (*sorting)* ([3], [7]) consiste nell'assegnare le m alternative in t predefinite classi ordinate **Cl**$=\{Cl_1, Cl_2, \ldots, Cl_t\}$.

L'assegnazione di un'alternativa $a_h \in$ **A** ad una specifica classe dipende dal confronto della valutazione della stessa sulla base di tutti i criteri con alcune azioni di riferimento che separano le classi decisionali contigue.

Definiamo le classi unioni *upward* e *downward* nel seguente modo:

$$Cl_t^{\geq} = \bigcup_{s \geq t} Cl_s \qquad Cl_t^{\leq} = \bigcup_{s \leq t} Cl_s .$$

In un problema di sorting multicriteriale vengono presi in considerazione due principali aspetti:

1) la forma del modello di aggregazione dei criteri;
2) La metodologia utilizzata per definire i parametri del modello.

Con riferimento alla prima delle principali problematiche del sorting, in letteratura si considerano due principali modelli di aggregazione basati rispettivamente, sulla relazione di surclassamento e sulla funzione di utilità [8].

La funzione di *utilità* assegna un valore reale f(x) ad ogni alternativa $x \in$ **A** ed attribuisce un'alternativa x alla classe $Cl_s^{\geq}$ se $f(x) \geq \varepsilon_s$, dove ε_s, , s=2,…,t, sono t-1 soglie ordinate che soddisfano la seguente condizione:

$$\varepsilon_2 \leq \varepsilon_3 \leq \ldots \leq \varepsilon_t.$$

Una relazione binaria di surclassamento S è definita su **A** nel seguente modo:
xSy significa " x è complessivamente almeno tanto buona quanto y".

Una relazione di surclassamento S su **A**, assegna l' alternativa x alla classe unione *upward* $Cl_s^{\geq}$ se xSp^s, dove p^s, s=2,…,t, sono t-1 profili di riferimento, tali che p^{s+1} domina p^s (cioè p^{s+1}è almeno tanto buono quanto p^s con riferimento a ciascun criterio e c'è almeno un criterio per il quale p^{s+1} è strettamente preferito a p^s), s=2,…,t-1.

Nel presente lavoro si considerano gli integrali bipolari di Choquet e Sugeno ([4] [9]), estensioni di quelli classici ([2], [11]) , per problematiche di sorting .

Definizione capacità bipolare **[9].**

Dato $N=\{1,\dots,n\}$, $P(N)=\{(R,S): R\subseteq N, S\subseteq N \text{ con } R\cap S=\emptyset\}$, si definisce capacità bipolare su N una funzione $\mu: P(N)\to[0,1]\times[0,1]$, tale che

1) Per ogni $(R,S),(T,U)\in P(N)$ tale che $R\supseteq T$ e $S\subseteq U$, con $\mu(R,S)=(r,s)$ e $\mu(T,U)=(t,u)$ con $r\geq t$ e $s\leq u$,
2) $\mu(A,\emptyset)=(r,0)$ e $\mu(\emptyset,B)=(0,s)$, $r,s\in[0,1]$,
3) $\mu(N,\emptyset)=(1,0)$ e $\mu(\emptyset,N)=(0,1)$.

Integrali bipolari di Choquet e di Sugeno **[9].**

Per ogni $x\in R$ si definisce $x^+=\max(x,0)$ la parte positiva e con $x^-=\max(-x,0)$ la parte negativa.

Per ogni $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ denotiamo la parte positiva di $\mathbf{x}$ con $\mathbf{x}^+=(x_1^+,\dots,x_n^+)$ e con $\mathbf{x}^-=(x_1^-,\dots,x_n^-)$ la parte negativa di **x.**

Per ogni vettore $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$, si consideri la funzione $\pi: N\to N$ permutazione degli elementi di N tale che $|x_{\pi(1)}|\leq\dots\leq|x_{\pi(n)}|$. Per ogni $i\in N$, definiamo i seguenti insiemi:

- $A^+_{\pi(i)}=\{j\in N: \pi(j)\geq\pi(i) \text{ e } x_{\pi(j)}\geq|x_{\pi(i)}|\}$ e
- $A^-_{\pi(i)}=\{j\in N: \pi(j)\geq\pi(i) \text{ e } -x_{\pi(j)}\geq|x_{\pi(i)}|\}$.

L'integrale bipolare di Choquet di $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ con riferimento alla capacità $\mu(\cdot,\cdot)$ è definito nel seguente modo:

$C^b(\mathbf{x},\mu)=C^+(\mathbf{x},\mu)-C^-(\mathbf{x},\mu)$.

dove $C^+(\mathbf{x},\mu)=\sum_{i\in N}\left(x^+_{\pi(i)}-x^+_{\pi(i-1)}\right)\mu^+\left(A^+_{\pi(i)},A^-_{\pi(i)}\right)$ è l'integrale relativo alla parte positiva e $C^-(\mathbf{x},\mu)=\sum_{i\in N}\left(x^-_{\pi(i)}-x^-_{\pi(i-1)}\right)\mu^-\left(A^+_{\pi(i)},A^-_{\pi(i)}\right)$ è quello relativo alla parte negativa, con $x_{\pi(0)}=0$.

Mentre l' integrale bipolare di Sugeno di $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)\in[-1,1]^n$ con riferimento alla capacità $\mu(\cdot,\cdot)$ è definito nel seguente modo:

$$S^b(\mathbf{a},\mu)=\begin{cases} -S^-(\mathbf{a},\mu) & \text{if } S^+(\mathbf{a},\mu)<S^-(\mathbf{a},\mu) \\ 0 & \text{if } S^+(\mathbf{a},\mu)=S^-(\mathbf{a},\mu) \\ S^+(\mathbf{a},\mu) & \text{if } S^+(\mathbf{a},\mu)>S^-(\mathbf{a},\mu) \end{cases}$$

dove $S^{+}(\mathbf{a},\mu)=\max_{i\in N}\left(\min\left(a^{+}_{\pi(i)},\mu^{+}\left(A^{+}_{\pi(i)},A^{-}_{\pi(i)}\right)\right)\right)$ è l'integrale relativo alla parte positiva e $S^{-}(\mathbf{a},\mu)=\max_{i\in N}\left(\min\left(a^{-}_{\pi(i)},\mu^{-}\left(A^{+}_{\pi(i)},A^{-}_{\pi(i)}\right)\right)\right)$ è quello relativo alla parte negativa.

Rappresentazioni di problemi di sorting con integrali bipolari

I problemi di sorting con funzione d'utilità può essere formulato, secondo l'approccio degli integrali bipolari, nel seguente modo:

$$
\begin{array}{ll}
C^{b}(\mathbf{x},\mu)<\varepsilon_2 & \Rightarrow \mathbf{x} \in Cl_1 \\
\varepsilon_2\leq C^{b}(\mathbf{x},\mu)<\varepsilon_3 & \Rightarrow \mathbf{x} \in Cl_2 \\
. & \\
. & \\
. & \\
C^{b}(\mathbf{x},\mu)\geq\varepsilon_t & \Rightarrow \mathbf{x} \in Cl_t
\end{array}
$$

La classificazione può essere fatta anche mediante una relazione di surclassamento S rispetto ad un'azione di riferimento a_r:

$xSa_r \Leftrightarrow u(x)\geq u(a_r)$ dove : u: $\Re^{n}\rightarrow\Re$ è una funzione d' utilità:

$x\in Cl_r^{\geq} \Leftrightarrow S(x,a_r)\geq 0$.

Allora,
$xSy \Leftrightarrow C^{b}(g_1(x_1),\ldots,g_n(x_n);\mu)\geq C^{b}(g_1(y_1),\ldots,g_n(y_n);\mu)$,
dove $C^{b}(\mathbf{x},\mu)=C^{+}(\mathbf{x},\mu)-C^{-}(\mathbf{x},\mu)$ è l'integrali bipolare di Choquet.

Con l'integrale bipolare di Sugeno e' possibile generalizzare la procedura di sortine anche con riferimento ad azioni con valutazioni ordinali.
In un problema di sorting, sia con un metodo di surclassamento che con una funzione d'utilità gli integrali bipolari di Choquet e di Sugeno per loro stessa definizione richiedono la normalizzazione delle valutazioni relative ai singoli criteri. In questo caso è possibile utilizzare un approccio empirico proposto in [1], dove si stimano le funzioni d'utilità mediante un algoritmo computazionale basato su alcune azioni di riferimento e sulle informazioni date dal decisore su dei sottoinsiemi di criteri.

Conclusioni

Il vantaggio degli integrali bipolari di Sugeno e di Choquet consiste esplicitamente nel prendere in considerazione i valori maggiori e minori rispetto ad un livello neutrale di riferimento per ciascun criterio.
Più precisamente, l'estensione degli integrali di Sugeno e di Choquet proposta in [9] definisce il peso attribuito ad un dato insieme di valutazioni anche in funzione dell'insieme delle valutazioni simmetriche [6], [10].
Infatti, nella recente letteratura [5] viene sottolineato come sia interessante da un punto di vista decisionale e in particolare finanziario, oltre a considerare l'aspetto classico di confronto tra singole alternative, anche l'esistenza di un livello neutrale per ogni criterio, rispetto al quale poter classificare un'azione come *attrattiva* o *repulsiva*.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] S. Angilella, S. Greco, F. Lamantia, B. Matarazzo Assessing non-additive utility for multicriteria decision aid, in Atti del Ventiteesimo Convegno A.M.A.S.E.S, Rende, Settembre 1999.

[2]G. Choquet, Theory of capacities, Ann. L ' Institut Fourier *5* (1953/54) 131-295

[3]M. R. Costanzo, S. Greco, B. Matarazzo, "*C*hoquet and Sipos integral for Aggregation of interactive criteria in Sorting problem", in Atti del Venticinquesimo Convegno A.M.A.S.E.S., Firenze, Settembre 2001,

[4]M. Grabisch, ch. Labreuche, "The Sipos integral for the aggregation of interacting bipolar criteria", IPMU, 2000 .

[5]M. Grabisch, Ch. Labreuche, J.-C. Vansnick, "On the extension of Pseudo-Boolean Functions for the Aggregation of interacting Criteria", submitted to EJOR, 2002.

[6]M. Grabisch, S. Greco, B. Matarazzo, R. Slowinski. Representation of the symmetric Sugeno integral by decision rules. In: Proc. 6th Eurofuse, Varenna, Italy, September 2002.

[7]S. Greco, B. Matarazzo, R. Slowinski, "The axiomatic approch to multicriteria sorting" in Atti del Ventiquattresimo Convegno A.M.A.S.E.S., Padenghe sul Garda, 6-9 Settembre 2000, 359-366

[8]S. Greco, B. Matarazzo, R. Slowinski Axiomatizazion of utility, outranking and decision-rule preference models for multiple-criteria classification problems under partial inconsistency with the dominance principle submitted to Control and Cybernetics, 2002.

[9]S. Greco, B. Matarazzo, R. Slowinski "Sugeno and Choquet bipolar integrals", In: Proc. 6th Eurofuse, Varenna, Italy, September 2002.

[10]J. Sipos, "Integral with respect to a pre-measure", Math. Slovaca, 2 141-155, 1979

[11]M. Sugeno, "Theory of fuzzy integrals and its applications", Ph.D. thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo Japan, 1974.