Sistema parametrico - Soluzione

1. Il sistema può essere anche scritto nella forma matriciale $A\underline{x} = \underline{b}$, con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice A è quadrata (di ordine 3) e quindi:

- se $\boxed{\det A \neq 0}$ $\Rightarrow$ per il *teorema di Cramer*, il sistema ammette *una e una sola* soluzione;

- se $\boxed{\det A = 0}$ $\Rightarrow$ per il *teorema di Rouché-Capelli*, il sistema ammette infinite soluzioni

se e solo se: $r(A) = r(A|\underline{b})$.

Innanzitutto, dobbiamo stabilire per quali valori di a risulta $\det A = 0$.

Utilizzando lo sviluppo di Laplace e considerando, ad esempio, la prima riga, otteniamo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & -a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (-1 + a^2) + (a^2 - 1) = 2(a^2 - 1) = 2(a-1)(a+1)$$

da cui (per la legge di annullamento del prodotto) si ha che $\det A = 0$ quando: $a = 1$; $a = -1$.

- $\boxed{\boldsymbol{a \neq 1;\ a \neq -1}}$

  In questo caso, il sistema ammette un'unica soluzione (supponendo fissato il parametro a), che si ottiene applicando la regola di Cramer.

- $\boxed{\boldsymbol{a = 1}}$

  Sostituendo questo valore di a nelle matrici A e $[A|\underline{b}]$, si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad [A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Poiché per $a = 1$ risulta $\det A = 0$, il rango della matrice A è sicuramente minore di 3. Ma, se consideriamo la sottomatrice di ordine 2 evidenziata nella matrice A, risulta:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{il rango di } A \text{ è 2.}$$

  Per valutare il rango di $[A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, scegliamo lo stesso minore Δ_2 ed

  applichiamo il teorema di Kronecker, osservando che ci sono solo 2 possibilità di orlare Δ_2:

- utilizzando l'ultima riga e la prima colonna di $[A|\underline{b}]$

oppure:

- utilizzando l'ultima riga e l'ultima colonna di $[A|\underline{b}]$.

Ma, nel primo caso, otteniamo ancora la matrice A, il cui determinante (come già sappiamo) è uguale a zero. Pertanto non ci resta che orlare Δ_2 con l'ultima riga e l'ultima colonna di $[A|\underline{b}]$ e valutare il determinante Δ_3 della matrice di ordine 3 ottenuta:

- se $\Delta_3 = 0$, allora $r(A|\underline{b}) = 2$, mentre: - se $\Delta_3 \neq 0$, allora $r(A|\underline{b}) = 3$.

Abbiamo dunque: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ perché la prima colonna è uguale all'ultima.

Risulta quindi $r(A|\underline{b}) = 2 = r(A)$ e dunque, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni (dove n è il numero delle incognite ed r il rango delle matrici completa e incompleta).

Per valutare queste soluzioni, dobbiamo ricondurci a un sistema che abbia come matrice dei coefficienti la matrice corrispondente al minore Δ_2 utilizzato per stabilire il rango di A.

Il nuovo sistema è dunque di due equazioni in due incognite e si ottiene dal sistema di partenza eliminando innanzitutto la terza equazione (i cui coefficienti non fanno parte di Δ_2) e portando poi i termini in x (i cui coefficienti, di nuovo, non fanno parte di Δ_2) al secondo membro di ciascuna equazione, come parte dei termini noti:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 1 - x \\ y - z = 1 - x \end{cases}.$$

Risolvendo infine il sistema ottenuto con la regola di Cramer (il che è possibile perché la matrice dei coefficienti ha il determinante Δ_2 diverso da zero), risulta:

$y = \dfrac{D_1'}{D'}$, $\quad z = \dfrac{D_2'}{D'}$ dove:

$D' = \Delta_2 = -2$

$$D_1' = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1-x & -1 \end{vmatrix} = -(1-x) - (1-x) = -2(1-x), \qquad D_2' = \begin{vmatrix} 1 & 1-x \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = 1 - x - (1-x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{D_1'}{D'} = \dfrac{-2(1-x)}{-2} = 1 - x \\[2ex] z = \dfrac{D_2'}{D'} = \dfrac{0}{-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Ma quest'ultima è solo la soluzione (in funzione del parametro x) del sistema crameriano di due equazioni in due incognite estratto dal sistema di partenza, mentre le infinite soluzioni del sistema assegnato, al variare di x in $\mathbb{R}$, sono:

$$\begin{cases} x = x \\ y = 1 - x \\ z = 0 \end{cases}.$$

- $\boxed{a = -1}$

Sostituendo questo valore di a nelle matrici A e $[A|\underline{b}]$, si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -1 \end{matrix} & -1 \end{bmatrix} \qquad [A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Come nel caso precedente, poiché per $a = -1$ risulta $\det A = 0$, il rango della matrice A è sicuramente minore di 3.

Ma, se consideriamo la sottomatrice di ordine 2 evidenziata nella matrice A, risulta:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{il rango di } A \text{ è 2.}$$

Per valutare il rango di $[A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$, scegliamo lo stesso minore Δ_2 ed applichiamo il teorema di Kronecker, osservando che ci sono solo 2 possibilità di orlare Δ_2:

- utilizzando l'ultima riga e la terza colonna di $[A|\underline{b}]$

oppure:

- utilizzando l'ultima riga e l'ultima colonna di $[A|\underline{b}]$.

Ma, nel primo caso otteniamo ancora la matrice A il cui determinante (come già sappiamo) è uguale a zero. Pertanto non ci resta che orlare Δ_2 con l'ultima riga e l'ultima colonna di $[A|\underline{b}]$ e valutare il determinante Δ_3 della matrice di ordine 3 ottenuta:

- se $\Delta_3 = 0$, allora $r(A|\underline{b}) = 2$, mentre: - se $\Delta_3 \neq 0$, allora $r(A|\underline{b}) = 3$.

Abbiamo dunque: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ perché la prima colonna è uguale all'ultima.

Risulta quindi $r(A|\underline{b}) = 2 = r(A)$ e dunque, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni (dove n è il numero delle incognite ed r il rango delle matrici completa e incompleta).

Ancora una volta, per valutare queste soluzioni, dobbiamo ricondurci a un sistema che abbia come matrice dei coefficienti la matrice corrispondente al minore Δ_2 utilizzato per determinare il rango di A.

Il nuovo sistema è dunque di due equazioni in due incognite e si ottiene dal sistema di partenza eliminando innanzitutto la terza equazione (i cui coefficienti non fanno parte di Δ_2) e portando poi i termini in z (i cui coefficienti, di nuovo, non fanno parte di Δ_2) al secondo membro di ciascuna equazione, come parte dei termini noti:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x + y = 1 - z \\ -x + y = -1 - z \end{cases}.$$

Risolvendo infine il sistema ottenuto con la regola di Cramer (il che è possibile perché la matrice dei coefficienti ha il determinante Δ_2 diverso da zero), risulta:

$$x = \frac{D_1'}{D'}, \qquad y = \frac{D_2'}{D'} \qquad \text{dove:}$$

$$D' = \Delta_2 = 2$$

$$D_1' = \begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ -1-z & 1 \end{vmatrix} = (1-z) - (-1-z) = 2, \qquad D_2' = \begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ -1 & -1-z \end{vmatrix} = -1 - z + 1 - z = -2z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{D_1'}{D'} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y = \dfrac{D_2'}{D'} = \dfrac{-2z}{2} = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -z \end{cases}.$$

Ma quest'ultima è solo la soluzione (in funzione del parametro x) del sistema crameriano di due equazioni in due incognite estratto dal sistema di partenza, mentre le infinite soluzioni del sistema assegnato, al variare di x in $\mathbb{R}$, sono:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -z \\ z = z \end{cases}.$$

Riassumendo i risultati trovati, si ha:

Valori di a		**Soluzioni**
$a \neq \pm 1$	$\Rightarrow$	Una e una sola soluzione
$a = 1$	$\Rightarrow$	Infinite (∞^1) soluzioni: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ (1-x) \\ 0 \end{bmatrix}$ con $x \in \mathbb{R}$
$a = -1$	$\Rightarrow$	Infinite (∞^1) soluzioni: $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ (-z) \\ z \end{bmatrix}$ con $z \in \mathbb{R}$

2. Se $a = 2$, il sistema assegnato ammette una e una sola soluzione, che si ottiene applicando la regola di Cramer.

Per $a = 2$, la matrice A diventa: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ed il vettore dei termini noti: $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Pertanto, si ha: $x = \dfrac{D_1}{D}, \quad y = \dfrac{D_2}{D}, \quad z = \dfrac{D_3}{D}$

dove: $D = \det A = 6$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$