Punti interni e punti esterni ad un insieme; punti “di frontiera” per un insieme.

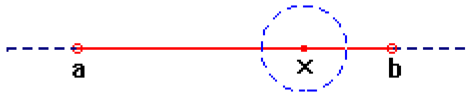
Sia E un insieme numerico, e sia $x_0 \in E$.

- **x_0 si dice INTERNO ad E se e solo se esiste un intorno completo di x_0, interamente incluso in E.**

$$x_0 \ INTERNO \quad ad \ \ E \xleftrightarrow{def.} \exists \ I_{x_0} \ / \ I_{x_0} \subseteq E$$

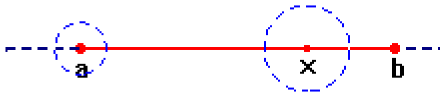
Esempi:

Se prendiamo come insieme E
l’intervallo APERTO (a,b),
vedremo che TUTTI i punti di E sono “interni”.
Sei d’accordo? Osserva la figura qui a fianco.
Sia x un qualsivoglia punto di (a, b);
Indicata con δ la più piccola fra le distanze di x dagli estremi a, b dell’intervallo, qualsiasi intorno di centro x e raggio $\le \delta$ è incluso in (a,b).
Quindi x è interno ad (a,b).
Dunque (importante): TUTTI i punti di un intervallo APERTO sono “INTERNI” all’intervallo.



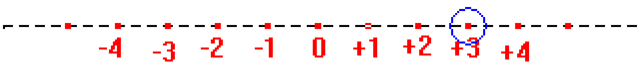
TUTTI i punti di un intervallo APERTO sono INTERNI all’intervallo

Se invece prendiamo come insieme E
l’intervallo CHIUSO [a, b],
ci renderemo conto che i suoi punti “INTERNI” nel senso della definizione da noi posta sono tutti quelli STRETTAMENTE COMPRESI fra a e b, ossia sono i punti che costituiscono l’intervallo aperto (a, b).
Invece gli estremi a, b NON sono punti “interni” all’insieme [a, b].

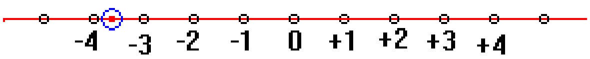


Questa volta l’intervallo considerato è l’ intervallo CHIUSO [a,b].
Comunque piccolo prendiamo il raggio dell’intorno di centro a, una parte dell’intorno scapperà fuori dall’ intervallo. Non esiste nessun intorno completo di a che sia interamente incluso nell’intervallo [a, b].
Quindi il punto a NON è interno all’intervallo considerato.
E analogamente per b.
Invece tutti gli altri punti dell’intervallo sono “INTERNI” ad esso.

Consideriamo l’insieme Z degli interi relativi:
$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$
Constatiamo che NESSUN punto di Z è “interno”.



Consideriamo invece il COMPLEMENTARE
(rispetto a R) dell’insieme Z:
TUTTI i suoi punti sono “interni”.



Come ben sai, tra due <u>qualsiasi</u> punti dell’asse reale,
cadono infiniti punti ad ascissa irrazionale e infiniti punti ad ascissa razionale.
Pertanto nessun punto dell’insieme Q è “interno” a Q, e nessun punto dell’ins. R – Q è “interno” a R – Q .

Sia E un insieme numerico, e x_0 un punto che NON vi appartenga ($x_0 \notin E$).

- **Il punto x_0 si dice ESTERNO ad E se e solo se esiste un intorno completo di x_0, privo di intersezione con E.**

$$x_0 \ ESTERNO \quad ad \ \ E \xleftrightarrow{def.} \exists \, I_{x_0} \ / \ I_{x_0} \cap E = \varnothing$$

Possiamo anche vederla così: un punto si dice esterno ad E se e solo se è interno al complementare di E, cioè all’insieme $R - E$.

Sia E un insieme numerico.

- **Il punto x_0 (appartenente o non appartenente ad E) si dice DI FRONTIERA per E se e solo se qualsiasi intorno completo di x_0 interseca tanto l’insieme E quanto il suo complementare.**

$$x_0 \ DI \ \ FRONTIERA \quad per \ E \xleftrightarrow[def.]{} \forall I_{x_0}, I_{x_0} \cap E \ne \varnothing \ \wedge \ I_{x_0} \cap (R - E) \ne \varnothing$$

Esempi:

Se E = [a, b), i punti interni di E sono tutti i punti di (a, b); i punti esterni ad E sono tutti i punti di $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$; i punti di frontiera di E sono il punto a e il punto b.

Consideriamo l’insieme $F = \left\{ \frac{1}{k}, \ con \ \ k = 1, 2, 3, 4, ... \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ... \right\}$

F non ha punti interni.
I punti esterni di F sono tutti i punti che non appartengono a F, tranne il punto 0.

L'insieme dei punti di frontiera di F è $F \cup \{0\}$.
L'insieme Q dei numeri razionali non ha né punti interni, né punti esterni. Tutti i numeri reali sono punti di frontiera per Q

- **Insiemi aperti, insiemi chiusi, insiemi né aperti né chiusi**.

Sia E un insieme numerico, sia cioè $E \subseteq R$.

- **Si dice che E è un insieme "aperto" se tutti i suoi punti sono interni.**

Esempi:

- Ogni intervallo aperto (a, b) (dove l'aggettivo "aperto" è usato qui per indicare "privato degli estremi") è anche un insieme "aperto" nel senso della definizione appena posta.
  Infatti abbiamo osservato in precedenza che ogni punto di un intervallo aperto (a,b) è interno ad (a,b)
- Invece un intervallo chiuso [a, b] (qui l'aggettivo "chiuso" è usato per indicare "estremi inclusi") NON è un insieme "aperto", nel senso sopra specificato, perché non tutti i suoi punti sono interni: infatti, a e b non lo sono.
- Il complementare rispetto a R dell'insieme Z degli interi relativi è un insieme aperto

In matematica, oltre che di insiemi "aperti", si parla anche di insiemi "chiusi".
"Chiuso", però, in questa accezione, non è il contrario di "aperto".
Si pone infatti la seguente definizione:

- **Un insieme $E \subseteq R$ si dice "chiuso" se tutti i punti di accumulazione di E appartengono ad E.**

Esempi:

- ogni intervallo chiuso [a, b] (dove l'aggettivo "chiuso" è usato qui per indicare "estremi inclusi") è anche un insieme "chiuso" nel senso della definizione appena posta.
  Infatti i punti di accumulazione di [a, b] sono per l'appunto tutti e soli i punti di [a ,b]
- Invece l'intervallo aperto (a,b) (abbiamo qui usato l'aggettivo "aperto" nel senso di "privato degli estremi") NON è un insieme "chiuso" nel senso sopra precisato, perché ammette come punti di accumulazione anche gli estremi a, b, che non appartengono all'intervallo.
- $F = \left\{ \frac{1}{k},\ con\ k = 1, 2, 3, 4, \ldots \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\}$ non è chiuso, perché non contiene quello che è il suo unico punto di accumulazione, ossia il punto 0; e non è nemmeno aperto, come abbiamo visto in precedenza.
- $G = F \cup \{0\} = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\}$ è un insieme chiuso. L'unico suo punto di accumulazione (il punto 0) appartiene infatti all'insieme.

L'esempio dell'insieme F mostra che esistono insiemi che non sono né "aperti" né "chiusi";
d'altronde, un intervallo con un estremo incluso e l'altro escluso, come [a, b), non è né "aperto" né "chiuso".

L'insieme R e l'insieme vuoto sono gli unici due sottoinsiemi di R aventi la proprietà di essere, simultaneamente, sia "aperti" che "chiusi".

Si potrebbe dimostrare il seguente **Teorema:**
un sottoinsieme di R è chiuso se e solo se il suo complementare è aperto.