

□ Punti di accumulazione di un insieme numerico

Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, il punto x_0 (appartenente o non appartenente ad E) si dice “punto di accumulazione” per E se ogni intorno completo di x_0 contiene almeno un punto di E , distinto da x_0 .

Esempio 1

Consideriamo l'intervallo aperto (a, b) .
Evidentemente, qualsiasi punto x di (a, b)
è di accumulazione per (a, b) ;
ma anche i due estremi a, b , pur non appartenendo ad
 (a, b) , sono punti di accumulazione per (a, b) .



Esempio 2

Consideriamo l'insieme

$$F = \left\{ \frac{1}{k}, \text{ con } k = 1, 2, 3, 4, \dots \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

di cui nella figura qui a fianco sono rappresentati alcuni fra gli infiniti elementi.

Questo insieme F possiede un punto di accumulazione, non appartenente all'insieme stesso: si tratta del numero 0.

Infatti, ogni intorno di 0 contiene punti di F !!!

Dimostriamo.

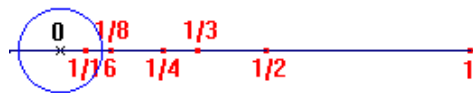
Fissiamo un intorno di 0 ossia un intervallo aperto del tipo

$$(-\delta, \delta).$$

Ora, se noi prendiamo una frazione della forma $1/k$ e diamo a k valori molto grandi, otteniamo che la frazione si fa “piccola quanto noi desideriamo”, per cui, comunque piccolo sia stato fissato δ , tale frazione riuscirà comunque a “intrufolarsi” fra 0 e δ , “entrando” quindi nell'intorno considerato.

In effetti, se vogliamo che sia si abbia $\frac{1}{k} < \delta$

basta che scegliamo $k > \frac{1}{\delta}$.



Per ovvi motivi pratici di carattere grafico, abbiamo rappresentato in figura soltanto pochi fra gli infiniti elementi

dell'insieme $F = \left\{ \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$:

(la figura mostra poi anche il punto 0, non appartenente all'insieme F).

Ma con gli occhi della mente possiamo “vedere” gli elementi di F “accumularsi”, al crescere di k , in prossimità dello 0.

Osserviamo poi che 0 è l'unico punto di accumulazione per l'insieme F . Infatti, qualora noi prendiamo un altro punto c , diverso dallo 0,

- se c NON appartiene ad F , riusciremo sempre a determinare un intorno di c talmente piccolo da non contenere alcun punto di F ;
- e se c appartiene ad F , riusciremo sempre a determinare un intorno di tale punto, talmente piccolo da non contenere altri punti di F se non, appunto, il centro dell'intorno.

Esempio 3. - L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali ha come punti di accumulazione ... tutti i numeri reali!

□ Teorema:

Se x_0 è un punto di accumulazione dell'insieme E , allora ogni intorno di x_0 contiene INFINITI punti di E .

Dimostrazione:

sia x_0 un punto di accumulazione di E .

Fissiamo un intorno $I(x_0)$.

Per definizione di punto di accumulazione, tale intorno conterrà almeno un punto di E , distinto da x_0 ; chiamiamo x_1 questo punto.

Consideriamo ora l'intorno di centro x_0 e raggio $|x_1 - x_0|$:

essendo x_0 punto di accumulazione di E , tale intorno dovrà contenere un altro punto di E , distinto da x_0 ; indichiamolo con x_2 .

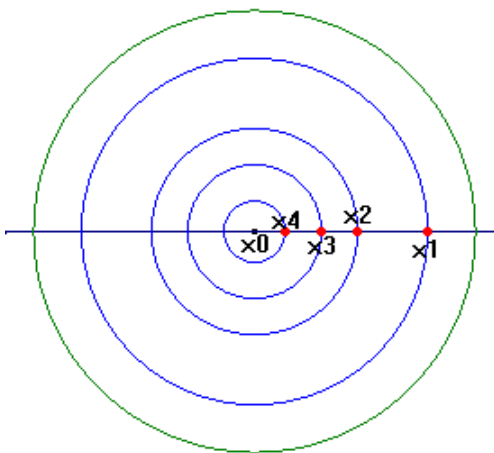
Osserviamo che x_2 apparterrà anche all'iniziale $I(x_0)$.

Andiamo ora a considerare l'intorno di centro x_0 e raggio

$|x_2 - x_0|$: in esso dovremo trovare un ulteriore punto x_3

di E (e x_3 apparterrà pure all'iniziale $I(x_0)$); ecc. ecc.

Insomma, il procedimento può essere iterato in modo da trovare in $I(x_0)$ tanti elementi di E quanti se ne desiderano.



In virtù di questo teorema, molti testi definiscono direttamente “punto di accumulazione di un insieme E ”, un punto tale che in ogni suo intorno cadano **infiniti** punti di E .