

Invarianza de la ecuación de onda en 1+1 dimensiones

Juan José Gascón
alschairn@yahoo.com

Queremos saber qué tipo de transformaciones de coordenadas entre sistemas inerciales dejan invariante la ecuación de onda en una dimensión espacial y una temporal. Para simplificar los cálculos tomaremos $c = 1$. En 1+1 dimensiones la ecuación de onda es:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x, t) = 0 \quad (1)$$

Imponemos primero la condición de que el campo escalar $\phi(x, t)$ va a ser independiente de las coordenadas elegidas y por tanto:

$$\phi(x, t) = \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (2)$$

Para transformar la ecuación de onda debemos transformar además las derivadas parciales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \end{aligned}$$

Usando estas expresiones donde convenga puede escribirse la derivada segunda $\partial^2/\partial x^2$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \\ &\quad + \frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \end{aligned}$$

La expresión para la derivada segunda $\partial^2/\partial t^2$ es completamente análoga. Reagrupando en la expresión anterior, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + 2 \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} + \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} \end{aligned}$$

Como se trata de una transformación inercial el movimiento inercial debe mantenerse inercial tras la transformación. Esto significa que

$$\bar{x} = f(x, t), \quad \bar{t} = g(x, t)$$

son funciones lineales en x y t . Por tanto, en la expresión anterior se va a tener que

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial x^2} = 0$$

La expresión para la derivada segunda $\partial^2/\partial x^2$ queda finalmente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + 2 \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} + \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2}$$

Análogamente

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + 2 \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} + \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2}$$

Insertando estas dos expresiones y 2 en la ecuación de onda 1, se obtiene

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{t}^2} + \left[\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} \\ & + 2 \left[\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right) \right] \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

En general, se tiene que para una transformación de coordenadas

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

La transformación $\Lambda^\mu{}_\nu$ es en su forma general

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \partial \bar{t} / \partial t & \partial \bar{t} / \partial x \\ \partial \bar{x} / \partial t & \partial \bar{x} / \partial x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en 3

$$-(a^2 - b^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{t}^2} + (d^2 - c^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} + 2(bd - ac) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{t} \partial \bar{x}} = 0$$

Para que se cumpla la invarianza de la ecuación de onda frente a esta transformación general, esta ecuación debe tener la misma forma que 1. Por tanto debe ocurrir que

$$a^2 - b^2 = 1$$

$$d^2 - c^2 = 1$$

$$bd - ac = 0$$

La primera relación se puede escribir sin falta de generalidad tal que $a = \pm \cosh v$, $b = \pm \sinh v$ cumpliendo $\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$, con v un parámetro cualquiera. De igual forma, la segunda relación se puede escribir sin falta de generalidad tal que $d = \pm \cosh u$, $c = \pm \sinh u$ cumpliendo $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$, con u un parámetro cualquiera. Dado que la transformación debe poder reducirse continuamente a la identidad (ninguna transformación) y dado que $\cosh x > 0$ debe tomarse $a = \cosh v$, $d = \cosh u$.

Con estos valores la última relación queda como $(\sinh v \cosh u - \cosh v \sinh u) = 0$, ó $(-\sinh v \cosh u + \cosh v \sinh u) = 0$, ó $(\sinh v \cosh u + \cosh v \sinh u) = 0$. De las propiedades de las funciones hiperbólicas se tiene

$$\sinh v \cosh u - \cosh v \sinh u = 0$$

$$\sinh v \cosh(-u) + \cosh v \sinh(-u) = 0$$

$$\sinh(v - u) = 0$$

$$-\sinh v \cosh u + \cosh v \sinh u = 0$$

$$\sinh(-v) \cosh u + \cosh(-v) \sinh u = 0$$

$$\sinh(-v + u) = 0$$

$$\sinh v \cosh u + \cosh v \sinh u = 0$$

$$\sinh(u + v) = 0$$

Estas últimas relaciones imponen una condición sobre u y v . Asumiendo que tanto u como v son números reales, se tiene que $u = v$ ó $u = -v$.

La transformación inercial de coordenadas que deja invariante la función de onda es por tanto

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh v & \pm \sinh v \\ \pm \sinh v & \cosh v \end{pmatrix}$$

Esta transformación corresponde con el caso más general para 1+1 dimensiones en el cual no hay rotaciones espaciales posibles. Esta transformación no tiene por qué ser simétrica. El caso simétrico corresponde con una transformación de Lorentz de rapidez v .

No obstante, el caso no simétrico no es físico ya que atenta contra la causalidad. Para ver esto consideremos un evento A localizado en el origen de coordenadas y otro evento B localizado en (t_0, x_0) . Este segundo evento cumple que $-t_0^2 + x_0^2 < 0$, de forma que está dentro del cono de luz del evento A . La transformación de Lorentz transforma las coordenadas de B tal que

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_0 \\ \bar{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh v & -\sinh v \\ -\sinh v & \cosh v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \cosh v - x_0 \sinh v \\ -t_0 \sinh v + x_0 \cosh v \end{pmatrix}$$

De esto resulta

$$-\bar{t}_0^2 + \bar{x}_0^2 = -(t_0 \cosh v - x_0 \sinh v)^2 + (-t_0 \sinh v + x_0 \cosh v)^2$$

$$-\bar{t}_0^2 + \bar{x}_0^2 = -t_0^2 + x_0^2$$

de forma que la transformación no cambia la relación causal entre los eventos. No obstante, la transformación no simétrica:

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_0 \\ \bar{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v \\ -\sinh v & \cosh v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \cosh v + x_0 \sinh v \\ -t_0 \sinh v + x_0 \cosh v \end{pmatrix}$$

De esto resulta

$$-\bar{t}_0^2 + \bar{x}_0^2 = -(t_0 \cosh v + x_0 \sinh v)^2 + (-t_0 \sinh v + x_0 \cosh v)^2$$

$$-\bar{t}_0^2 + \bar{x}_0^2 = -t_0^2 + x_0^2 - 4t_0x_0 \cosh v \sinh v$$

y

$$-\bar{t}_0^2 + \bar{x}_0^2 = -t_0^2 + x_0^2 + 4t_0x_0 \cosh v \sinh v$$

para la transformación no simétrica con el signo cambiado. Dado que t_0, x_0 pueden tomar cualquier signo y valor la transformación no necesariamente preserva la relación causal entre los eventos.

Resumiendo, la única transformación física que deja invariante la ecuación de onda en 1+1 dimensiones es la transformación de Lorentz.