

Nave relativista a propulsión

Juan José Gascón
alschairn@yahoo.com

Consideremos una nave de masa inicial $m(0)$ propulsada por gas que la nave expulsa en sentido contrario a su movimiento. La nave acelera alejándose de un sistema de referencia estacionario en la tierra. Queremos saber cómo evoluciona su velocidad en función de su masa en reposo.

Empecemos por considerar el caso newtoniano. La masa de la nave m y su velocidad v van a depender del tiempo. Denominemos w a la velocidad de expulsión del gas en el sistema de referencia comóvil con la nave, que va a ser constante. Por conservación del momento lineal, se tiene que en el sistema de referencia comóvil con la nave

$$\frac{d}{dt}(mv) = mw$$

Si $v(0) = 0$, entonces

$$\frac{m(t)}{m(0)} = e^{-v/w}$$

Ahora el caso relativista. El momento-energía del gas expulsado viene dado por un cuadvectores causal apuntando hacia el futuro J^μ . Si U^μ es la cuadvirvelocidad de la nave y τ el tiempo propio en ella, se tiene que por conservación del cuadvirmento se cumple

$$\frac{d}{d\tau}(mU^\mu) = -J^\mu$$

El momento-energía del gas expulsado es un cuadvirvector proporcional a la cuadvirvelocidad del gas expulsado V^μ , por lo que $-J^\mu = k V^\mu$, siendo k un número real y positivo, $k > 0$. Por tanto

$$\dot{m} U^\mu + m \dot{U}^\mu = -k V^\mu \tag{1}$$

Elevando esta ecuación al cuadrado, y teniendo en cuenta que $(V^\mu)^2 = (U^\mu)^2 = -1$, $\dot{U}^\mu = a^\mu$ y $U^\mu a_\mu = 0$, se tiene

$$-\dot{m}^2 + m^2 |a|^2 = -k^2$$

con $|a|^2$ el módulo al cuadrado de la cuadiaceleración. Además, multiplicando 1 por U^μ (por ejemplo en el sistema de referencia de la nave donde $U^\mu = \gamma(1, \mathbf{0})$, $V^\mu = \gamma(1, \mathbf{w})$), se tiene

$$-\dot{m} = k\gamma_w \quad (2)$$

con $\gamma_w = (1 - w^2)^{-1/2}$ y w la velocidad de expulsión del gas. Eliminando k de 1 y 2 se obtiene

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{|a|}{w}$$

Desde un sistema de referencia fijo en la tierra, respecto del cual la nave acelera y se mueve con velocidad instantánea $\mathbf{v}$, el módulo al cuadrado de la cuadiaceleración se puede expresar como

$$|a|^2 = \gamma_v^6 \frac{dv}{dt} (1 - |v|^2 \sin^2 \alpha)$$

con α el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $d\mathbf{v}/dt$. Para la nave con módulo de velocidad instantánea v y asumiendo aceleración uniforme para este caso se tiene

$$|a| = \frac{\dot{v}}{1 - v^2}$$

Considerando que $v(\tau = 0) = 0$ y w constante, se obtiene finalmente

$$\frac{m(\tau)}{m(0)} = \left(\frac{1 - V(\tau)}{1 + V(\tau)} \right)^{\frac{1}{2w}}$$

y de aquí resulta

$$V(\tau) = \frac{1 - \left(\frac{m(\tau)}{m(0)} \right)^{2w}}{1 + \left(\frac{m(\tau)}{m(0)} \right)^{2w}}$$

Se ve que si la masa de la nave llega a ser cero, $m(\tau) = 0$, la velocidad alcanzada va a ser la velocidad de la luz, $V(\tau) = 1$.