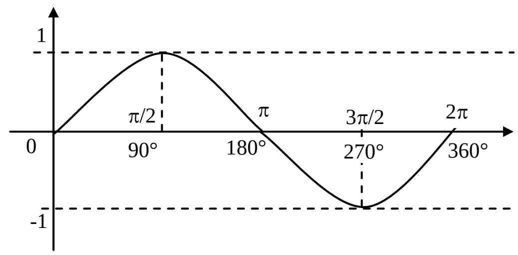
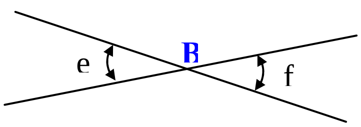
COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE VERACRUZ
Organismo Público Descentralizado
Plantel 43, Las Choapas

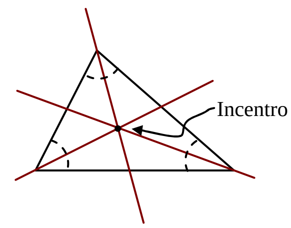
R E S U M E N :

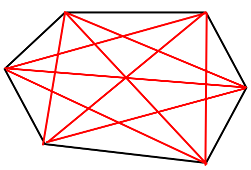
$$\sum \angle e = 360°$$



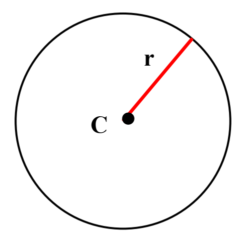
$$\text{SenA} = \frac{1}{\text{CscA}}$$

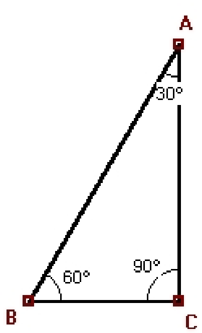


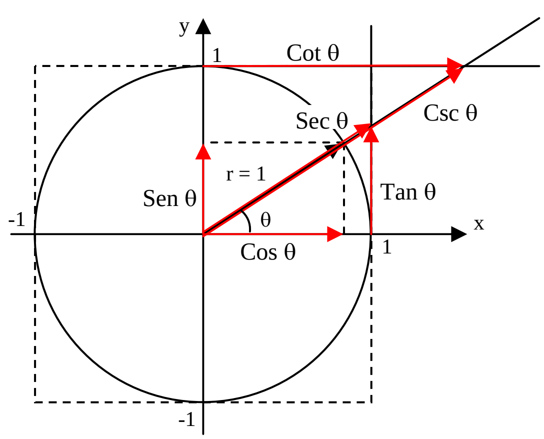


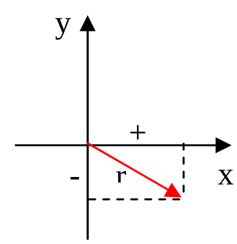


MATEMATICAS II









$$\frac{a}{\text{SenA}} = \frac{b}{\text{SenB}} = \frac{c}{\text{SenC}}$$

$$\angle 3 + \angle 5 = 180°$$

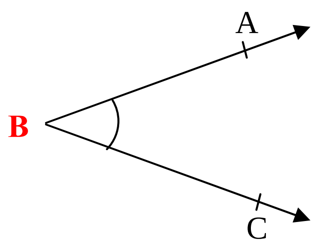
Docente: Ing. Carlos Ramsés Vergel Camarero

ANGULOS

1.1.1 Definición, elementos y notación.

***Angulo:** Abertura generada entre dos semirrectas, que tienen un origen común.
-Símbolos: ∠ “el ángulo”

Elementos: -2 lados (semirrectas).
-Vértice (origen común).

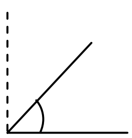


Notación por:
-Por tres letras: ∠ ABC, la letra correspondiente al vértice queda al centro.
-La letra correspondiente al vértice: ∠ **B**
-Agregando una letra minúscula, una letra griega o un número, en la abertura correspondiente: ∠ **a**,
∠ α Ó ∠ **3**

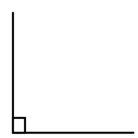
Clasificación de los ángulos:

*Por el tamaño de su abertura:

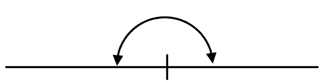
Agudo: Mide menos de 90°.



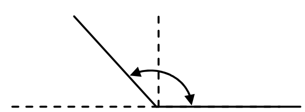
Recto: Mide 90°.



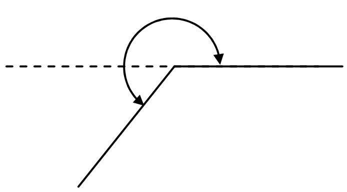
Llano: Mide 180°



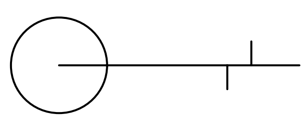
Obtuso: Mide más de 90° pero menos de 180°.



Entrante: Mide más de 180° pero menos De 360°.

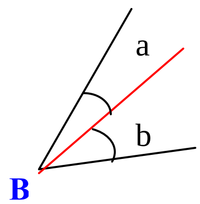


Perígono: Mide 360°

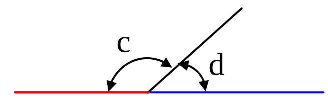


*Por la posición de sus lados (parejas de ángulos).

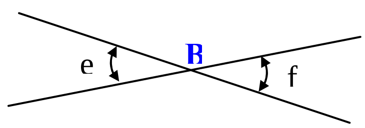
Ángulos consecutivos: Tienen el vértice y un lado en común.



Ángulos adyacentes: Son ángulos consecutivos cuyos lados no comunes son colineales.

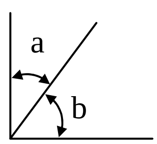


Ángulos opuestos por el vértice: Los lados de uno son la prolongación del otro.

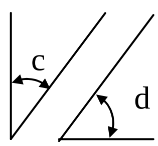


*Por la suma de sus aberturas:

Ángulos complementarios: Son ángulos que sumados dan 90°.

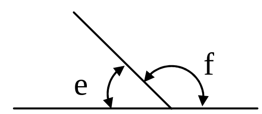


$a + b = 90°$

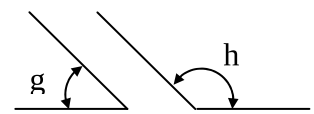


$c + d = 90°$

Ángulos suplementarios: Son ángulos que sumados dan 180°.

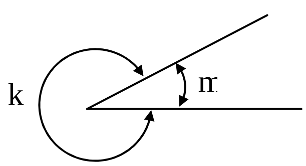


$e + f = 180°$



$g + h = 180°$

Ángulos conjugados: Son ángulos cuya suma es igual a 360°



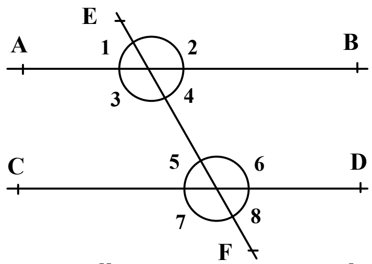
$k + m = 360°$

1.1.4 ANGULOS FORMADOS POR DOS PARALELAS Y UNA SECANTE.

Rectas Paralelas: Líneas rectas que por más que se prolongan nunca llegan a cruzarse.

Recta secante: Línea recta que corta a dos paralelas

Entre dos rectas paralelas y una secante, se forman 8 ángulos, que se nombran o clasifican de la siguiente manera:



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Ángulos internos: Son aquellos que se encuentran dentro de las rectas paralelas.

$\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$

Ángulos externos: Son aquellos que se encuentran fuera de las rectas paralelas.

$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ y $\angle 8$

Ángulos colaterales: Son los ángulos que se encuentran del mismo lado de la transversal.

$\angle 1$, $\angle 3$, $\angle 5$ y $\angle 7$ **$\angle 2$, $\angle 4$, $\angle 6$ y $\angle 8$**

Ángulos colaterales internos: Son ángulos que se encuentran del mismo lado de la transversal, dentro de las paralelas.

$\angle 3$ y $\angle 5$ **$\angle 4$ y $\angle 6$**

Ángulos colaterales internos: Son ángulos que se encuentran del mismo lado de la transversal, fuera de las paralelas.

$\angle 1$ y $\angle 7$ **$\angle 2$ y $\angle 8$**

*Los ángulos colaterales, tanto internos como externos son suplementarios:

$\angle 3 + \angle 5 = 180°$ Y $\angle 4 + \angle 6 = 180°$ (C. internos)

$\angle 1 + \angle 7 = 180°$ Y $\angle 2 + \angle 8 = 180°$ (C. externos)

Ángulos alternos internos: Son ángulos colocados a uno y otro lado de la transversal (no colaterales), y no adyacentes, dentro de las paralelas.

$\angle 3$ y $\angle 6$ **$\angle 4$ y $\angle 5$**

Ángulos alternos externos: Son ángulos colocados a uno y otro lado de la transversal (no colaterales), y no adyacentes, fuera de las paralelas.

$\angle 1$ y $\angle 8$ **$\angle 2$ y $\angle 7$**

*Los ángulos alternos, tanto internos como externos son iguales:

$\angle 3 = \angle 6$ Y $\angle 4 = \angle 5$ (A. internos)

$\angle 1 = \angle 8$ Y $\angle 2 = \angle 7$ (A. externos)

Ángulos correspondientes: Son ángulos colaterales, no adyacentes, uno interno y otro externo.

$\angle\mathbf{1}$ **y** $\angle\mathbf{5}$ $\qquad$ $\angle\mathbf{2}$ **y** $\angle\mathbf{6}$

$\angle\mathbf{3}$ **y** $\angle\mathbf{7}$ $\qquad$ $\angle\mathbf{4}$ **y** $\angle\mathbf{8}$

*Los ángulos correspondientes, son iguales:

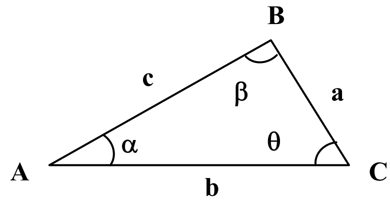
$\angle\mathbf{1} = \angle\mathbf{5}$ $\qquad$ $\angle\mathbf{2} = \angle\mathbf{6}$

$\angle\mathbf{3} = \angle\mathbf{7}$ $\qquad$ $\angle\mathbf{4} = \angle\mathbf{8}$

Nota: En la resolución de ejercicios se deben aplicar las clasificaciones de ángulos estudiadas anteriormente

1.2.1 TRIANGULOS

TRIÁNGULO: Polígono de tres lados.



-Elementos:

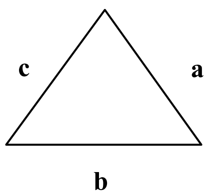
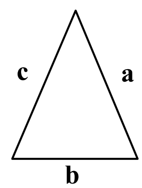
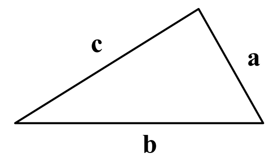
- **Tres lados: a, b y c**
- **Tres vértices: A, B y C**
- **Tres ángulos: α, β y θ**

-Notación:

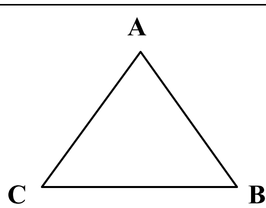
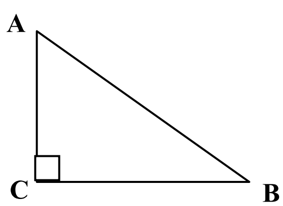
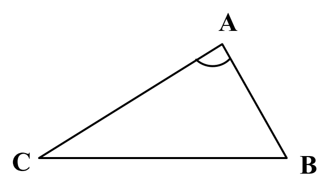
***Letras correspondientes a los vértices ΔABC (no importa el orden).**

CLASIFICACION:

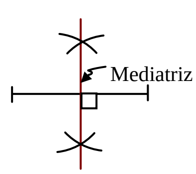
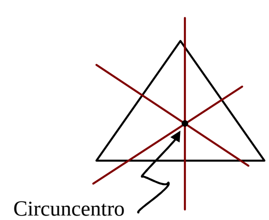
-Por la longitud de sus lados:

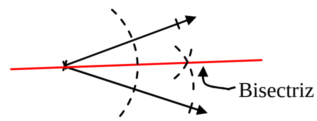
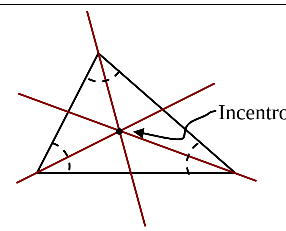
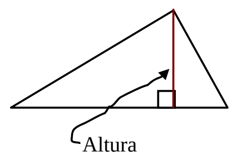
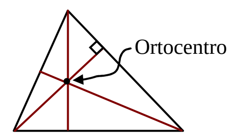
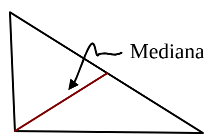
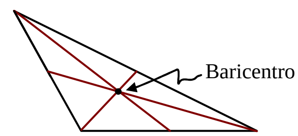
EQUILATERO: Tienen sus tres lados iguales.	**ISOSCELES: Tienen dos lados iguales y uno desigual.**	**ESCALENO: Tienen todos sus lados desiguales.**
		
$a = b = c$	**$a = c$, $a \neq b$ y $c \neq b$**	**$a \neq b \neq c$**

-Por la amplitud de sus ángulos:

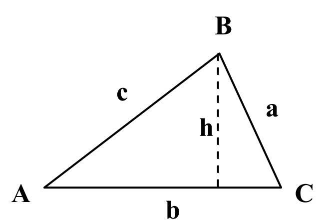
ACUTANGULO: Tienen sus tres ángulos agudos.	**RECTANGULO: Tienen un ángulo recto.**	**OBTUSANGULO: Tienen un ángulo obtuso.**
		
$\angle A < 90°$, $\angle B < 90°$ y $\angle C < 90°$	**$\angle C = 90°$, $\angle A + \angle B = 90°$**	**$90° < \angle A < 180°$**

RECTAS NOTABLES:
(Puntos y rectas notables)

DEFINICION	FIGURA	EN EL TRIANGULO
<u>Mediatriz</u>: Línea recta que divide a un segmento en dos iguales. **<u>Circuncentro</u>: Punto donde se cruzan las tres mediatrices de un triángulo.**		

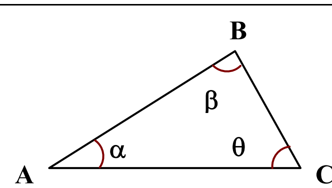
DEFINICION	FIGURA	EN EL TRIANGULO
<u>Bisectriz</u>: Línea recta que divide a un ángulo en dos iguales. **<u>Incentro</u>: Punto donde se cruzan las tres bisectrices de un triángulo.**		
DEFINICION	**FIGURA**	**EN EL TRIANGULO**
<u>Altura</u>: Segmento de recta trazado, perpendicularmente, desde un lado o prolongación de este, al vértice opuesto. **<u>Ortocentro</u>: Punto donde se cruzan las tres alturas de un triángulo.**		
DEFINICION	**FIGURA**	**EN EL TRIANGULO**
<u>Mediana</u>: Segmento de recta trazado desde el vértice de un triangulo al punto medio del lado opuesto. **<u>Baricentro</u>: Punto donde se cruzan las tres medianas de un triángulo.**		

PERIMETROS Y AREAS

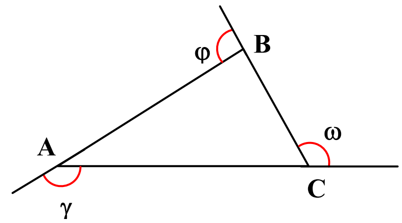
<u>Área</u>: El área de un triangulo es igual al producto de longitud de la base por la longitud de su altura entre dos	 $\boxed{A = \frac{b*h}{2}}$
<u>Perímetro</u>: El perímetro (P) de un triángulo, se calcula sumando las longitudes de sus tres lados.	$\boxed{\mathbf{P = a + b + c}}$

ANGULOS
(PROPIEDADES DE LOS TRIANGULOS)

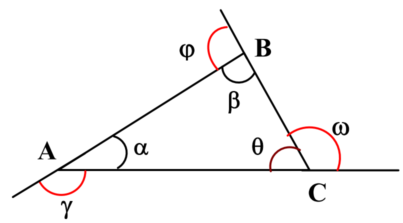
-Suma de ángulos interiores:

Propiedad: La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.	 $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\theta = \mathbf{180°}$

-Suma de ángulos exteriores:

Propiedad: La suma de los tres ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360°. ***Angulo exterior: Se forma entre un lado del triángulo y la prolongación de otro lado.**	 $\angle\gamma + \angle\omega + \angle\varphi = 360°$

-Suma de dos ángulos interiores:

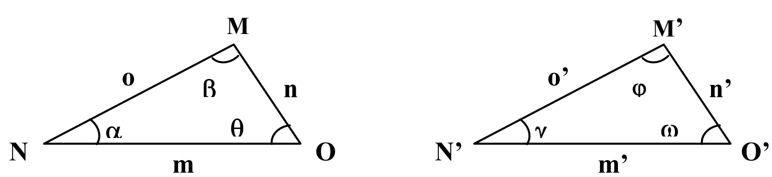
Propiedad: Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a el.	 $\angle\gamma = \angle\theta + \angle\beta$ $\angle\omega = \angle\alpha + \angle\beta$ $\angle\varphi = \theta\angle + \angle\alpha$

1.2.2 CONGRUENCIA

Triángulos congruentes son aquellos que tienen la misma forma y tamaño, es decir, al superponerlos coinciden sus lados y sus ángulos. A los lados o ángulos que coinciden se les llama homólogos.

La congruencia se representa por el símbolo:

$\cong$ "Congruente a"

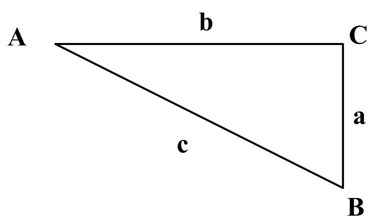


Como: m = m', n = n' y o = o'
$\angle\alpha = \angle\gamma$, $\angle\beta = \angle\varphi$ y $\angle\theta = \angle\omega$, entonces
ΔMNO es congruente al ΔM'N'O'
ΔMNO ≅ ΔM'N'O'

1.2.4 Teorema de Pitágoras

Enunciado del teorema de Pitágoras:

"En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"



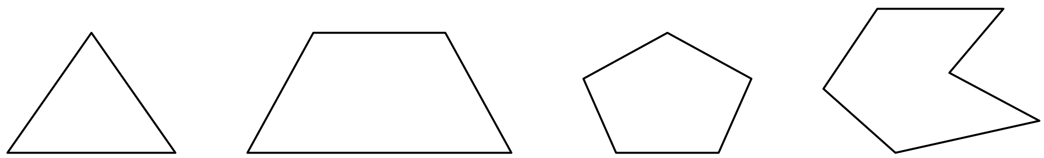
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

2.1 Polígonos.

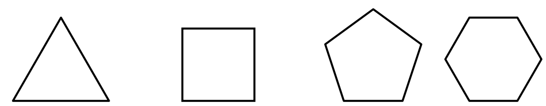
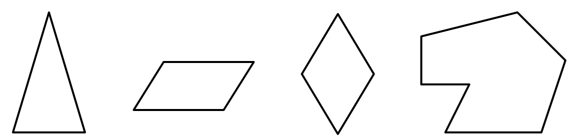
2.1.1 Definición.

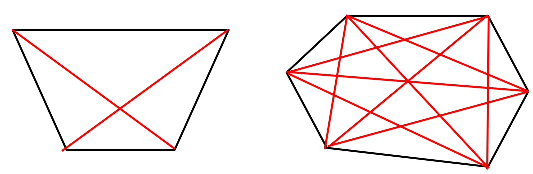
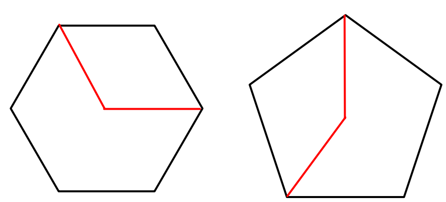
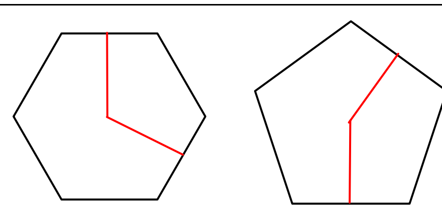
POLIGONO: Figura plana cerrada por segmentos de recta unidos en sus extremos dos a dos.

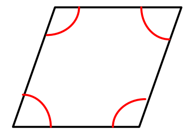
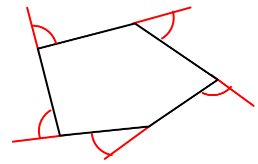
Ejem.:



2.1.2 Clasificación.

POLIGONOS	**EJEMPLOS**
Regulares: Tienen sus lados y ángulos iguales.	
Irregulares: Tienen sus lados o sus ángulos o ambos de diferente tamaño.	

ELEMENTOS	**EJEMPLO**
Diagonal: Segmento de recta trazado entre dos vértices no consecutivos de un polígono	
Radio: Segmento de recta trazado desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus vértices.	
Apotema: Segmento de recta trazado del centro de un polígono regular al punto medio de cualquiera de sus lados.	

Angulo interior, ∠i: Angulo generado entre dos lados consecutivos de un polígono.	
Angulo exterior, ∠e: Angulo generado entre dos lados consecutivos de un polígono.	

2.1.3 Suma de ángulos.

En cualquier polígono la suma de sus ángulos interiores se obtiene con la siguiente formula:

$$\boxed{\sum \angle i = 180°(n-2)}$$

Para polígonos regulares el valor de sus ángulos interiores (iguales) se obtiene con:

$$\boxed{\angle \mathbf{i} = \frac{\boldsymbol{\Sigma \angle i}}{\mathbf{n}}}$$

En cualquier polígono la suma de sus ángulos exteriores se obtiene con la siguiente formula:

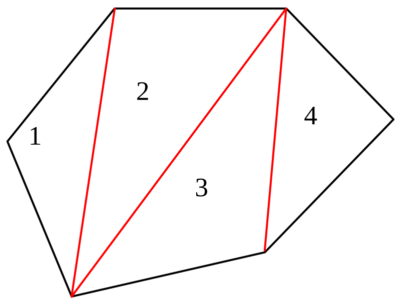
$$\boxed{\sum \angle \mathbf{e} = \mathbf{360°}}$$

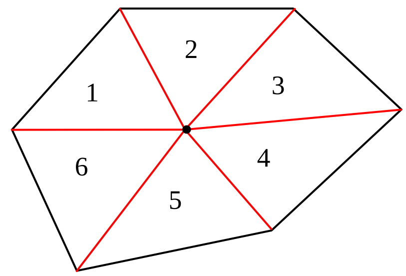
Para polígonos regulares el valor de sus ángulos exteriores (iguales) se obtiene con:

$$\boxed{\angle \mathbf{e} = \frac{\mathbf{360°}}{\mathbf{n}}}$$

2.1.4 Triangulación de polígonos.

Triangulación de polígonos: Método que consiste en dividir un polígono en triángulos. Se logra trazando diagonales, que no se crucen, o colocando un punto interior, desde donde se trazan segmentos de recta hacia cada uno de los vértices. Posteriormente, se calcula el área de cada uno de los triángulos y se suman, estas, para obtener así, el área del polígono original.





$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$

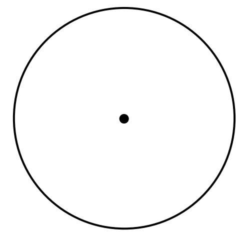
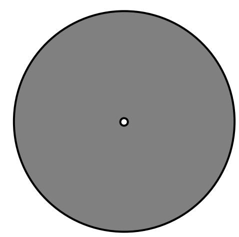
*Formula de Heron para el cálculo del área de un triangulo cuando se conocen sus tres lados:

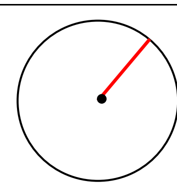
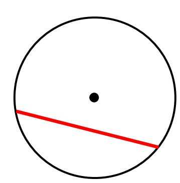
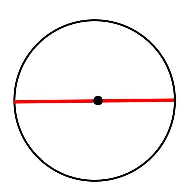
$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \\ &\mathbf{s = \frac{a+b+c}{2}} \end{aligned}}$$

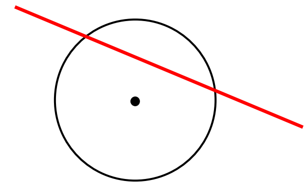
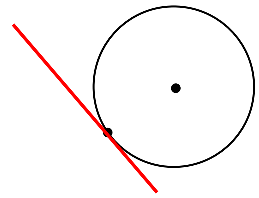
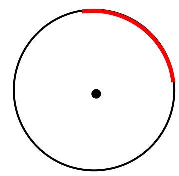
a, b y c = los lados del triángulo
s = Semiperímetro del triángulo

2.2 Circunferencia y círculo.

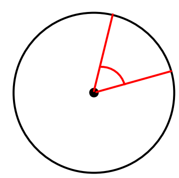
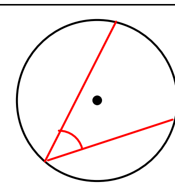
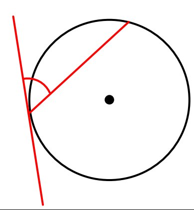
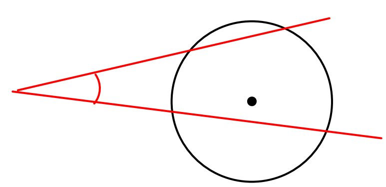
2.2.1 Definición y elementos.

DEFINICIÓN	FIGURA
Circunferencia: Conjunto de todos los puntos que equidistan de un punto interior llamado centro	
Circulo: Conjunto de todos los puntos interiores a la circunferencia.	

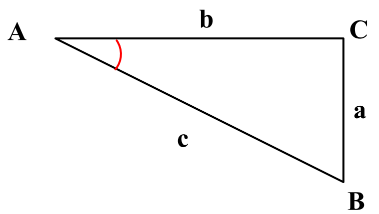
ELEMENTOS	FIGURA
Radio: Segmento de recta trazado del centro a cualquier punto de la circunferencia.	
Cuerda: Segmento de recta cuyos extremos, son dos puntos de la circunferencia.	
Diámetro: Cuerda de la circunferencia que pasa por el centro.	

Secante: Línea recta que corta a la circunferencia.	
Tangente: Línea recta que toca a la circunferencia en un punto.	
Arco: Porción de circunferencia.	

2.2.3 Ángulos

ANGULOS DE LACIRCUNFERENCIA	**FIGURA**
Central: Angulo generado entre dos radios de la circunferencia.	
Inscrito: Angulo generado entre dos cuerdas, con vértice sobre la circunferencia.	
Seminscrito: Angulo generado entre una cuerda y una recta tangente, con vértice en el punto de tangencia.	
Exterior: Angulo formado por dos secantes que se cruza fuera de la circunferencia	

3.1 Funciones trigonométricas para ángulos agudos.



Para el ángulo A:

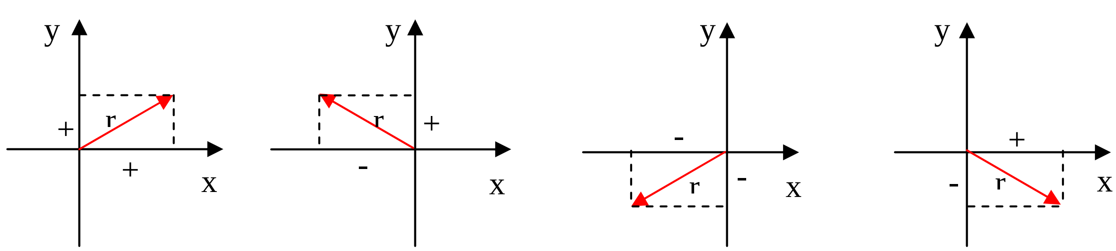
a = Cateto opuesto
b = Cateto adyacente
c = Hipotenusa

FUNCION TRIGONOMETRICA	REPRESENTACION
Seno (Sen): Cateto opuesto sobre hipotenusa.	$\mathbf{SenA} = \frac{a}{c}$
Coseno (Cos): Cateto adyacente sobre hipotenusa.	$\mathbf{CosA} = \frac{b}{c}$
Tangente (Tan): Cateto opuesto sobre cateto adyacente.	$\mathbf{TanA} = \frac{a}{b}$
Cotangente (Cot): Cateto adyacente entre cateto opuesto.	$\mathbf{CotA}\ \frac{b}{a}$
Secante (Sec): Hipotenusa entre cateto adyacente.	$\mathbf{SecA} = \frac{c}{b}$
Cosecante (Csc): Hipotenusa entre cateto opuesto.	$\mathbf{CscA} = \frac{c}{a}$

3.1.2 Funciones reciprocas.

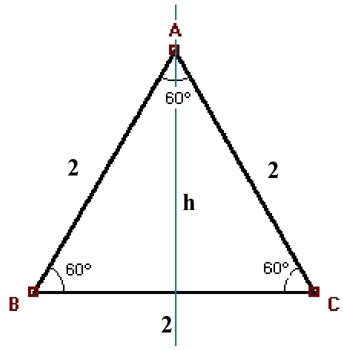
FUNCION TRIGONOMETRICA	FUNCION RECIPROCA	EXPRESION
$\mathbf{SenA} = \frac{a}{c}$	$\mathbf{CscA} = \frac{c}{a}$	$\mathbf{SenA} = \frac{1}{\mathbf{CscA}}$
$\mathbf{CosA} = \frac{b}{c}$	$\mathbf{SecA} = \frac{c}{b}$	$\mathbf{CosA} = \frac{1}{\mathbf{SecA}}$
$\mathbf{TanA} = \frac{a}{b}$	$\mathbf{CotA}\ \frac{b}{a}$	$\mathbf{TanA} = \frac{1}{\mathbf{CotA}}$

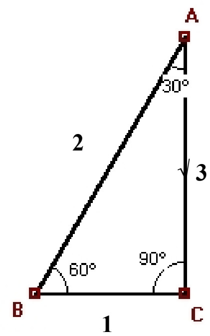
SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS EN LOS DIFERENTES CUADRANTES



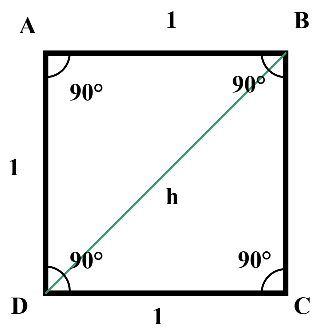
CUADRANTE / RAZON	I	II	III	IV
Sen θ	+	+	-	-
Cos θ	+	-	-	+
Tan θ	+	-	+	-
Cot θ	+	-	+	-
Sec θ	+	-	-	+
Csc θ	+	+	-	-

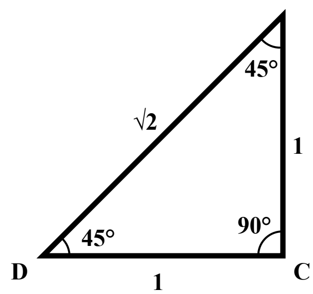
VALORES LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA LOS ANGULOS DE 30°, 45° Y 60°





$$2^2 = h^2 + 1^2$$
$$h^2 = 4 - 1$$
$$h = \sqrt{3}$$

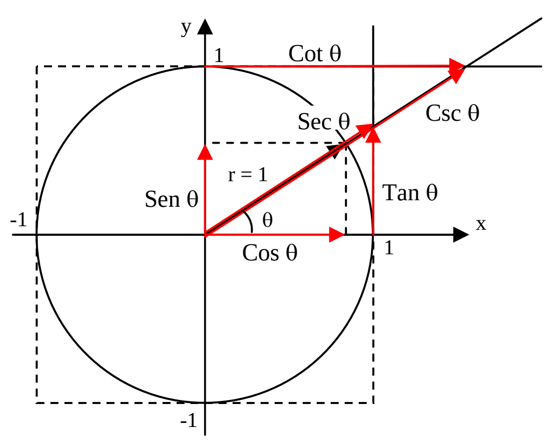




$$h^2 = 1^2 + 1^2$$
$$h^2 = 1 + 1$$
$$h = \sqrt{2}$$

ANGULO / RAZON	**30°**	**45°**	**60°**
Sen θ	**1/2**	**1/** $\sqrt{2}$ **=** $\sqrt{2}$ **/2**	$\sqrt{3}$ **/ 2**
Cos θ	$\sqrt{3}$ **/ 2**	**1/** $\sqrt{2}$ **=** $\sqrt{2}$ **/2**	**½**
Tan θ	**1/** $\sqrt{3}$	**1**	$\sqrt{3}$
Cot θ	$\sqrt{3}$	**1**	**1/** $\sqrt{3}$
Sec θ	**2/** $\sqrt{3}$ **=2** $\sqrt{3}$ **/ 3**	$\sqrt{2}$	**2**
Csc θ	**2**	$\sqrt{2}$	**2/** $\sqrt{3}$ **=2** $\sqrt{3}$ **/ 3**

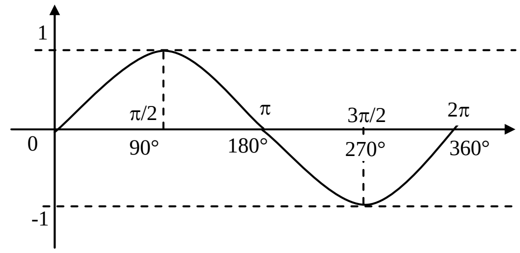
CIRCULO TRIGONOMÉTRICO O UNITARIO.



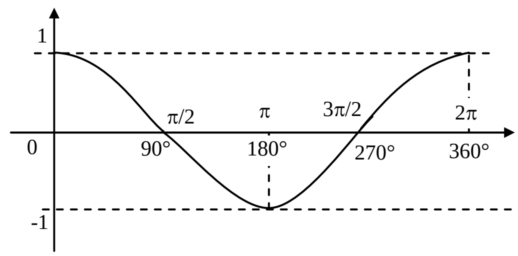
GRAFICA DE LAS FUNCIONES SENO, COSENO Y TANGENTE.

FUNCION / x = θ		y = Sen θ	y = Cos θ	y = Tan θ
0	0°	0.000	1.000	0.000
π/12	15°	0.259	0.966	0.268
π/6	30°	0.500	0.866	0.577
π/4	45°	0.707	0.707	1.000
π/3	60°	0.866	0.500	1.732
5π/12	75°	0.966	0.259	3.732
π/2	90°	1.000	0.000	**± ∞**
7π/12	105°	0.966	-0.259	-3.732
2π/3	120°	0.866	-0.500	-1.732
3π/4	135°	0.707	-0.707	-1.000
5π/6	150°	0.500	-0.866	-0.577
11π/12	165°	0.259	-0.966	-0.268
π	180°	0.000	-1.000	0.000
13π/12	195°	-0.259	-0.966	0.268
7π/6	210°	-0.500	-0.866	0.577
5π/4	225°	-0.707	-0.707	1.000
4π/3	240°	-0.866	-0.500	1.732
17π/12	255°	-0.966	-0.259	3.732
3π/2	270°	-1.000	0.000	**± ∞**
19π/12	285°	-0.966	0.259	-3.732
5π/3	300°	-0.866	0.500	-1.732
7π/12	315°	-0.707	0.707	-1.000
11π/6	330°	-0.500	0.866	-0.577
23π/12	345°	-0.259	0.966	-0.268
2π	360°	0.000	1.000	0.000

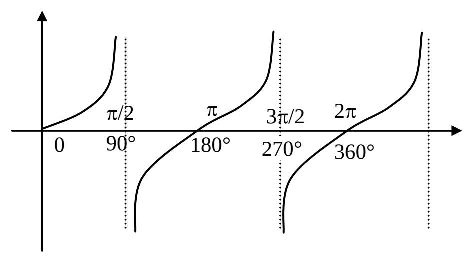
SENOIDE



COSENOIDE



TANGENTOIDE



VARIACION DE LAS FUNCIONES.

MIENTRAS θ CRECE DESDE	**0°** A **90°**	**90°** A **180°**	**180°** A **270°**	**270°** A **360°**
Sen θ	C. DE **0** A **1**	D. DE **1** A **0**	D. DE **0** A **-1**	C. DE **-1** A **0**
Cos θ	D. DE **1** A **0**	D. DE **0** A **-1**	C. DE **-1** A **0**	C. DE **0** A **1**
Tan θ	C. DESDE **0** HASTA +∞	C. DESDE -∞ HASTA **0**	C. DESDE **0** HASTA +∞	C. DESDE -∞ HASTA **0**

Nota: C = Crece D = Decrece

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Las identidades trigonométricas, son igualdades que involucran dos o más razones trigonométricas, que se verifican o son validas para cualquier valor del ángulo.

Se tienen 8 identidades trigonométricas, las cuales reciben el nombre de básicas o fundamentales, las cuales se dividen de la siguiente manera.

a) Reciprocas:

$$\boxed{\begin{array}{c} Sen\theta * Csc\theta \equiv 1 \\ Cos\theta * Sec\theta \equiv 1 \\ Tan\theta * Cot\theta \equiv 1 \end{array}}$$

b) De cociente:

$$\boxed{\begin{array}{c} Tan\theta = \dfrac{Sen\theta}{Cos\theta} \\ \\ Cot\theta = \dfrac{Cos\theta}{Sen\theta} \end{array}}$$

c) Pitagóricas:

$$\boxed{\begin{array}{c} Sen^2\theta + Cos^2\theta \equiv 1 \\ 1 + Tan^2 \equiv Sec^2\theta \\ 1 + Cot^2 \equiv Csc^2\theta \end{array}}$$

Ley de los senos y ley de los cosenos:

Ley de los Senos: Los lados de un triangulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos a estos.

$$\boxed{\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC}}$$

Ley de los Cosenos: El cuadrado de uno de los lados de un triangulo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de estos por el coseno del ángulo opuesto al primero.

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * CosB \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * CosC \end{array}}$$