Lavoro ed Energia

Il lavoro L svolto da una forza costante è il prodotto scalare della forza per lo spostamento del punto di applicazione della forza medesima

$$\boxed{L = \vec{F} \times \vec{s} = Fs\cos\theta = F_{//}s}$$

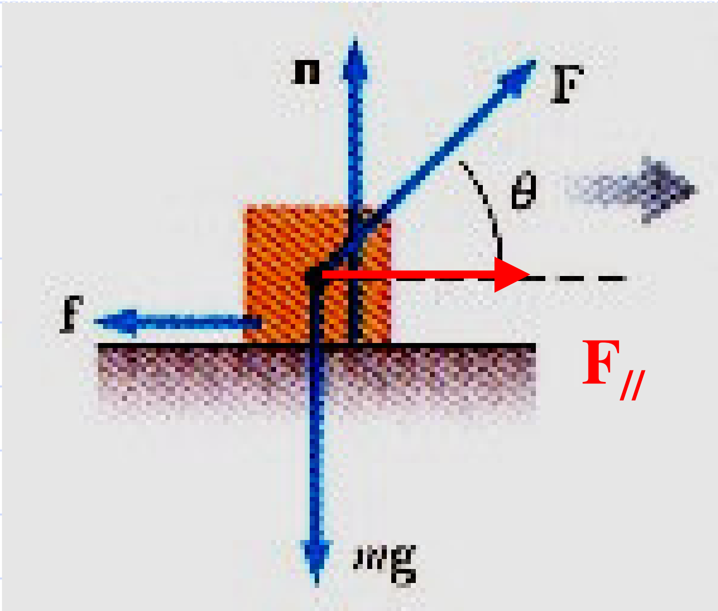
L = 0 se: F = 0; s = 0; θ = 90°

$[L] = [ML^2T^{-2}]$

N x m = J (S.I.)

dyne x cm = erg (C.G.S.)

$1J = 10^7$ erg



$F_{//}$

esempio 1

Il lavoro svolto da F per sollevare il blocco di massa m è L = mgh

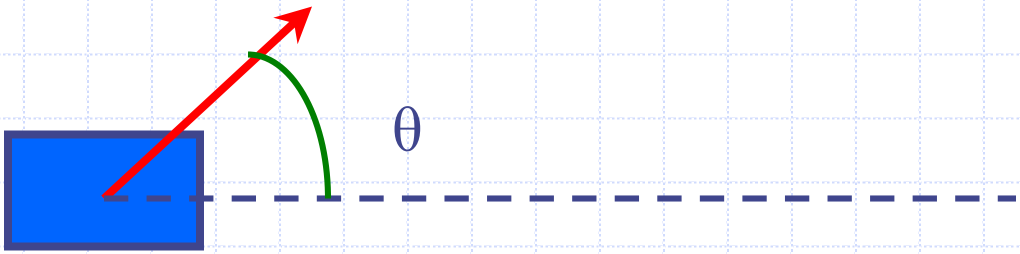
Il lavoro svolto da F durante lo spostamento **d** è nullo ($\theta = 90°$)

Il lavoro svolto dalla forza di gravità è $L_g = -mgh$

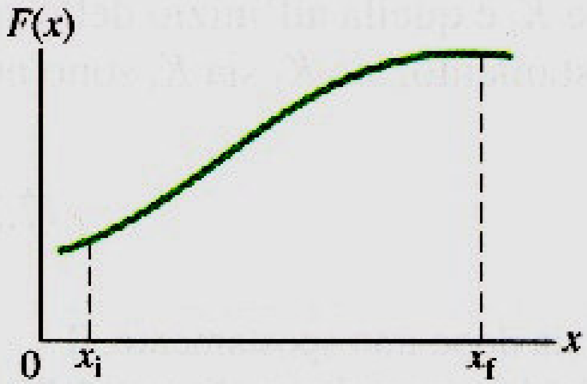
esercizio

Un uomo tira una cassa con una forza F = 90N e la sposta di 2.0 m. La fune forma un angolo di 60° rispetto al pavimento. Calcolare il lavoro svolto da F. Quale forza avrebbe dovuto applicare, a parità di L, se la fune fosse stata parallela al pavimento ($\theta = 0°$) ?

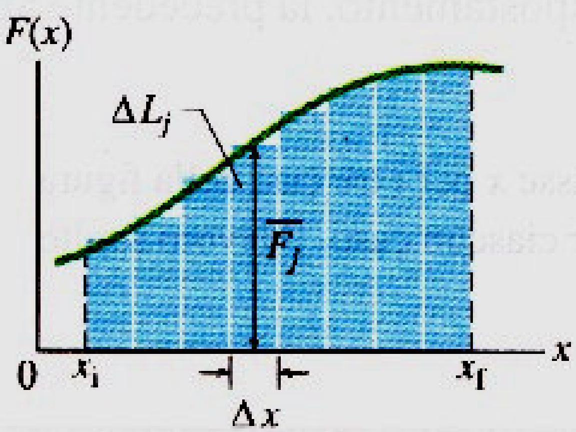
$L = \mathbf{F} \times \mathbf{s} = Fs\cos\theta = 90$ J; $F' = L/(s\cos\theta) = 45$ N



Lavoro svolto da una forza variabile



(a)



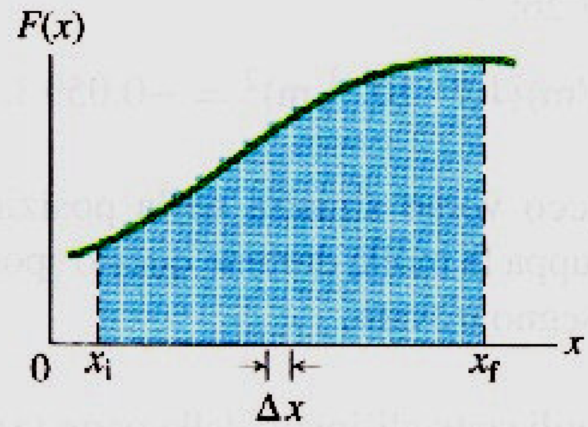
(b)

$$\Delta L_j = \overline{F}_j \Delta x$$

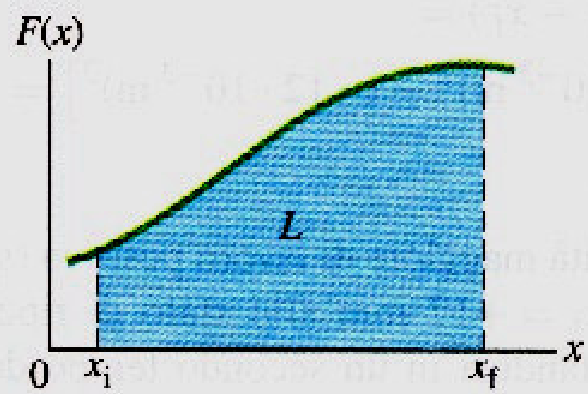
$$L = \sum \Delta L_j = \sum \overline{F}_j \Delta x$$

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \overline{F}_j \Delta x$$

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$



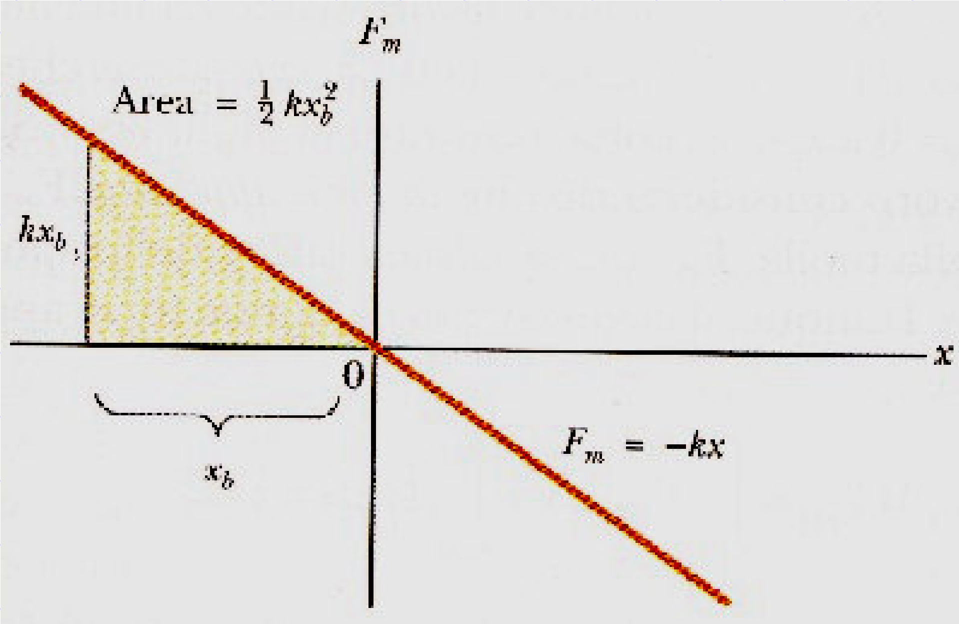
(c)



(d)

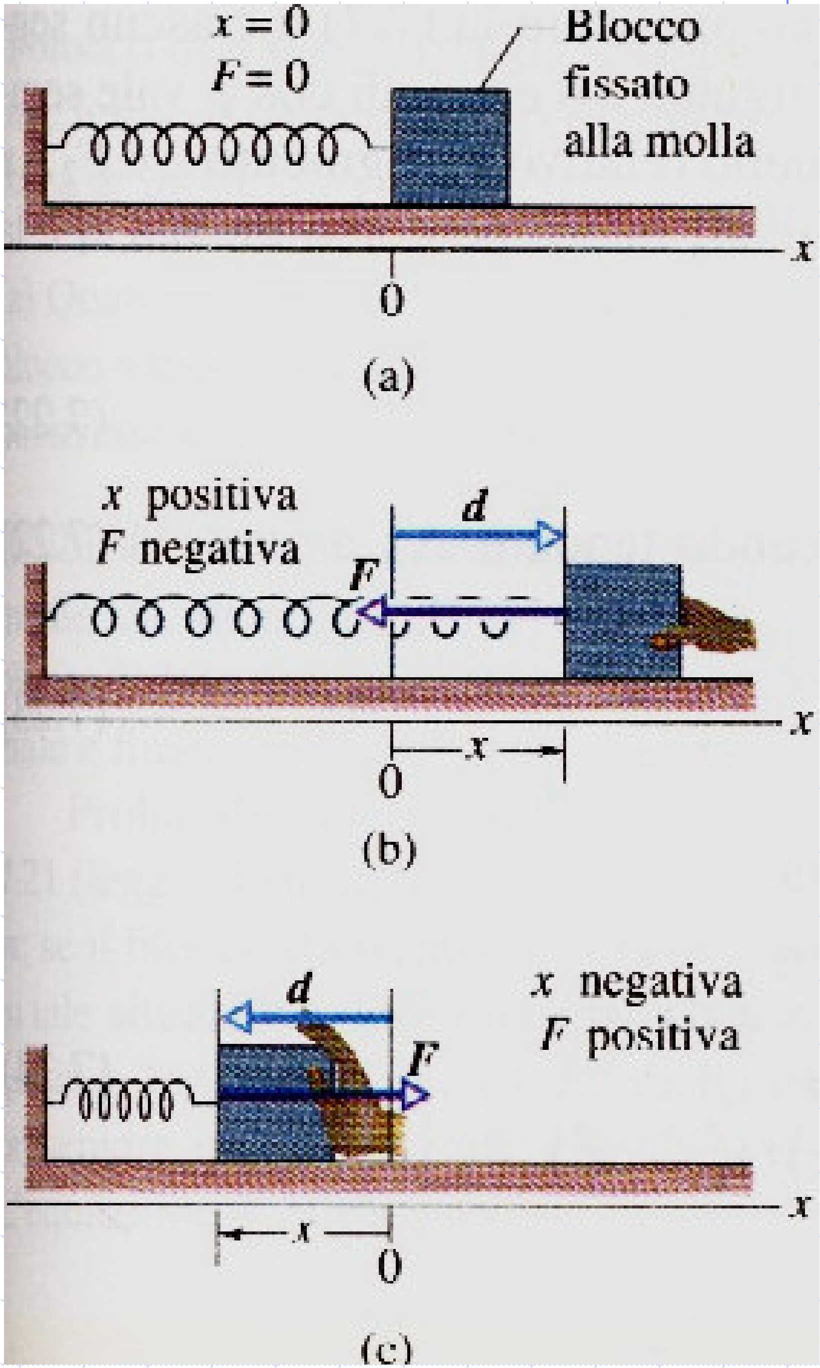
Lavoro svolto da una molla

$$F = -kx$$ legge di Hooke



$$L_{el} = \int_{x_i}^{x_f} F dx = -\int_{x_i}^{x_f} kx dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_i}^{x_f}$$

$$= -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) = \frac{1}{2}k\left(x_i^2 - x_f^2\right)$$



Potenza

la potenza è la rapidità con cui viene svolto un lavoro o, più in generale, la rapidità con cui viene trasferita dell'energia

potenza media

$$\boxed{\overline{P} = \frac{L}{\Delta t}}$$

$[P] = [ML^2T^{-3}]$

J/s = W (S.I.)

erg/s (C.G.S.)

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt}}$$

potenza istantanea

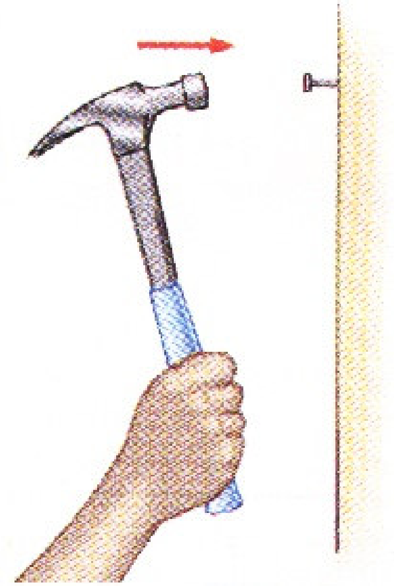
Energia cinetica e teorema delle forze vive

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$$

energia cinetica

teorema delle forze vive

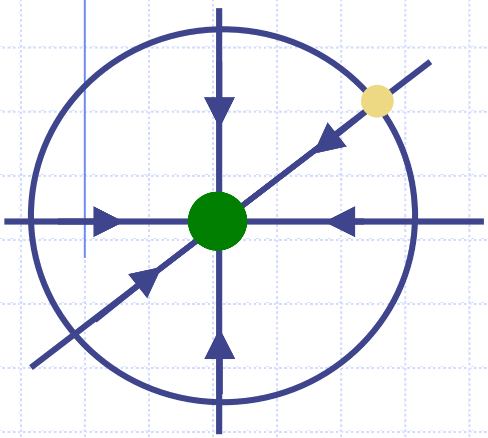
$$\boxed{L = \Delta K}$$



l'energia è la capacità di compiere un lavoro

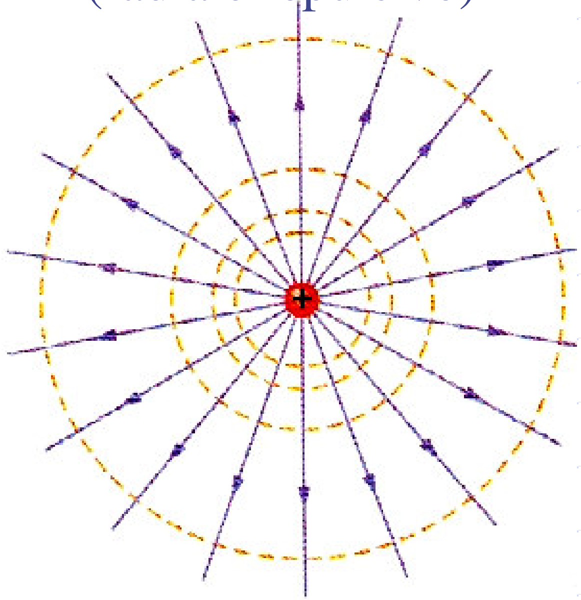
Campi di Forza

campo: regione dello spazio sotto l'azione di una forza. Ad ogni punto dello spazio si può associare un vettore che rappresenta la forza agente su un corpo sonda posto in quel punto.



esempio: campo gravitazionale (radiale attrattivo)

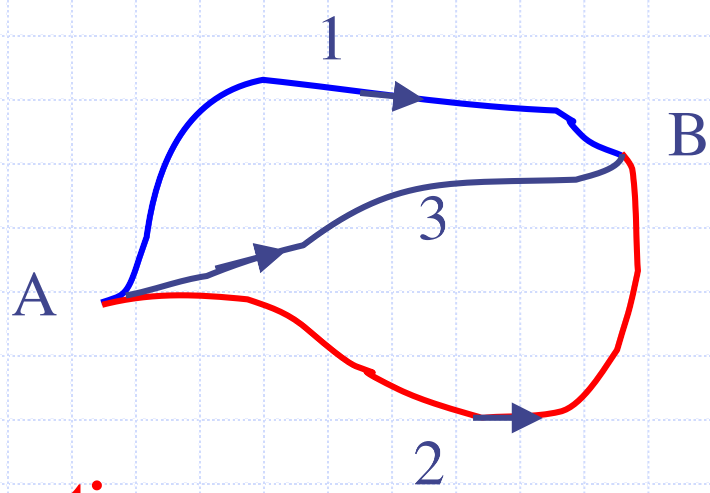
campo elettrico, +q (radiale repulsivo)



un campo viene rappresentato graficamente mediante le linee di forza (tangenti al vettore campo).

Forze conservative e forze non conservative

$$L = \int_A^B \vec{F} \times \vec{ds}$$



se $L_1 \neq L_2 \neq L_3$ forza **non conservativa**

se $L_1 = L_2 = L_3$ forza **conservativa**

se le forze sono conservative il lavoro lungo un percorso chiuso è nullo

$$L_{AA} = L_1 + (-L_2) = 0$$

Energia Potenziale

$$\boxed{U(x,y,z)}$$

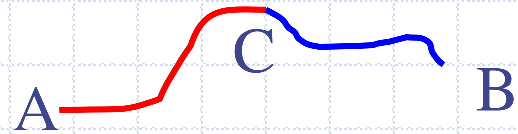
$$\boxed{L_{AB} = U(x_A, y_A, z_A) - U(x_B, y_B, z_B) = U_A - U_B}$$

$$\boxed{\Delta U = U_B - U_A = -L_{AB}}$$

$[U] = [ML^2T^{-2}]$

J (S.I)
erg (C.G.S)

U(x,y,z) è definita a meno di una costante additiva



$$\boxed{L_{AB} = U_A - U_B}$$

se $U_B = 0 \Rightarrow L_{AB} = U_A$ B posizione di riferimento

Se prendiamo C come posizione di riferimento

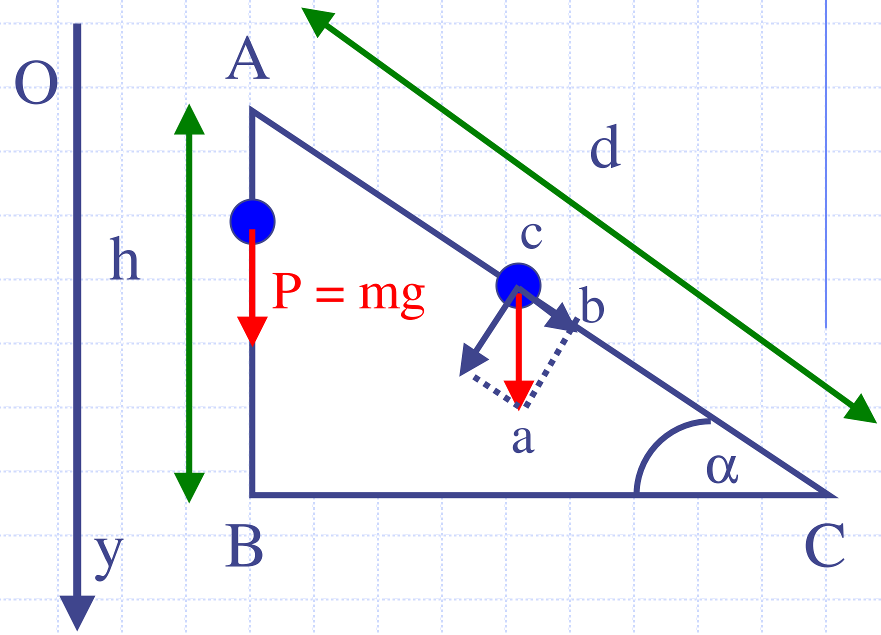
$$\boxed{L_{AB} = L_{AC} + L_{CB} = U_A - U_C + U_C - U_B = U_A - U_B}$$

$L_{AC} = U_A - U_C$
$L_{CB} = U_C - U_B$

L'energia potenziale in un punto è il lavoro svolto dalle forze del campo per spostare il corpo da quel punto alla posizione di riferimento.

esempio: il campo gravitazionale è conservativo

$$L_{AB} = \vec{P} \times \vec{h} = mgh$$



$$L_{AB} = L_{AC} + L_{CB}$$

$$L_{AC} = \vec{P} \times \vec{d} = mg \cdot sen\alpha \cdot d = mgh$$

$$L_{CB} = 0 \Rightarrow L_{AB} = mgh$$

$$\Delta U = -mgh$$

energia potenziale gravitazionale

$$\boxed{\Delta U = -L = -\int_A^B mgdy = -mg\Delta y}$$

esempio: il campo dovuto all'azione di una forza elastica è conservativo

$$\boxed{F = -kx}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}k\left(x_i^2 - x_f^2\right)}$$

se $x_i = x_f$ (ciclo) $L = 0 \Rightarrow F_{el}$ è conservativa

$$\boxed{\Delta U = -L = \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)}$$

se $x_i = 0$

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

energia potenziale elastica

l'energia è la capacità di compiere un lavoro

Principio di conservazione dell'energia meccanica

ipotesi: campo conservativo, sistema isolato

$$\boxed{L = U_i - U_f = -\Delta U}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K}$$

$$U_i - U_f = K_f - K_i$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$K + U = E$$

E = energia meccanica totale

in un sistema isolato in cui agiscano solo forze conservative <u>l'energia meccanica totale si conserva</u>

esempio: moto di un grave

se $U(y_i) = 0$ e $v_f = 0$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{2}mv_i^2 = mgy_f \\ y_f = \frac{v_i^2}{2g} \end{array}}$$

esempio: sistema massa molla

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}kx_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}kx_f^2}$$

se $U(x_i) = 0$ e $v_f = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}kx_f^2 \\ x_f^2 = \frac{mv_i^2}{k} \end{array}}$$

Quantità di moto

Data una particella di massa m e velocità **v** si definisce quantità di moto: **p** = m**v** [P] = [MLT^{-1}] Kg m/s (S.I.)

Esempio: v = 10 m/s, m_1 = 1 kg, m_2 = 10 kg → p_1 = 10 kg m/s, p_2 = 100 kg m/s

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Relazione valida anche per sistemi a massa variabile

$$\boxed{\vec{F}_{ris} = \sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

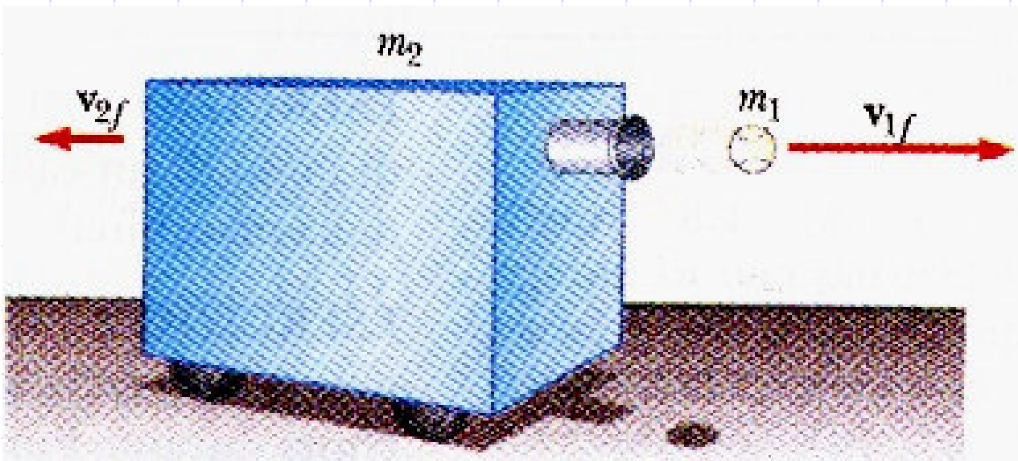
II legge di Newton

$$\boxed{\vec{F}_{ris} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \cos t.}$$

Se il sistema è isolato la risultante delle forze è nulla e la q.m. si conserva esempi: il cannone e il biliardo

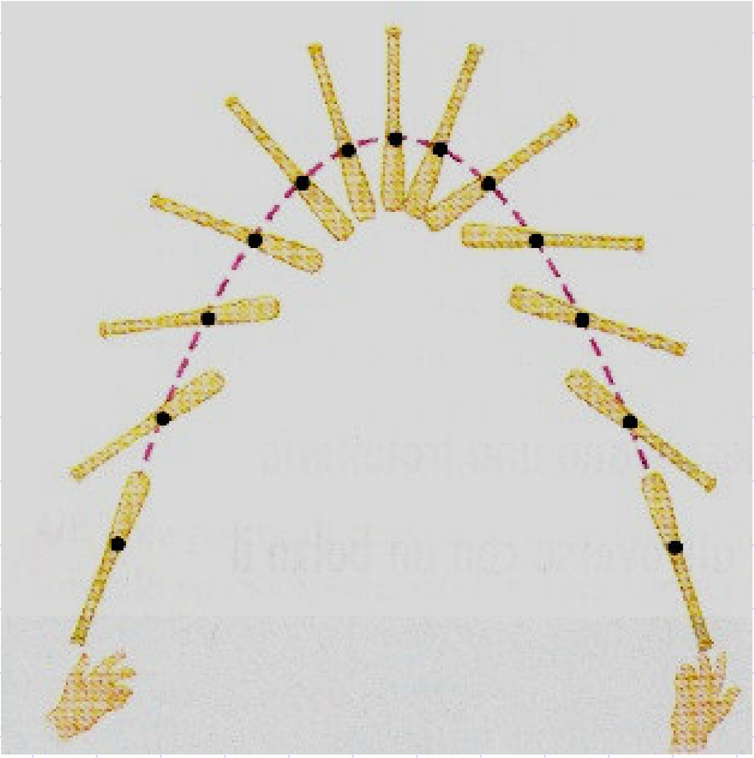
$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

m_1, v_1 m_2, v_2



se si conserva anche l'energia cinetica l'urto si dice elastico

Il centro di massa



il centro di massa di un corpo o di un insieme di corpi è quel punto che si muove come se tutta la massa fosse ivi concentrata e tutte le forze esterne agissero in quel punto

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{ris} = M\vec{a}_{cm}}$$

Dinamica rotazionale

$$\theta = \frac{s}{R}$$

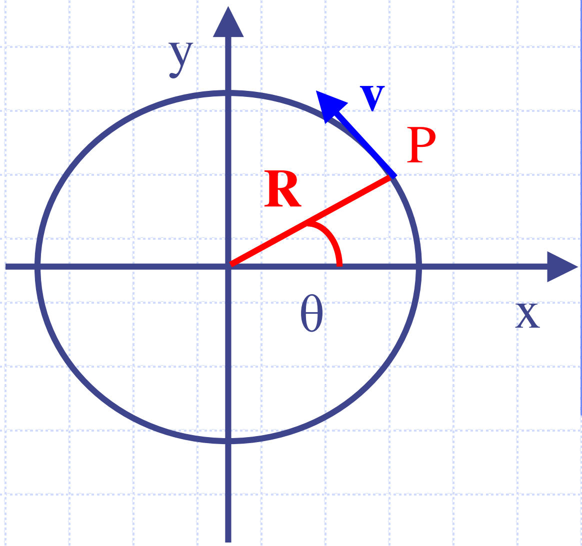
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$\alpha = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_t}{R}$$



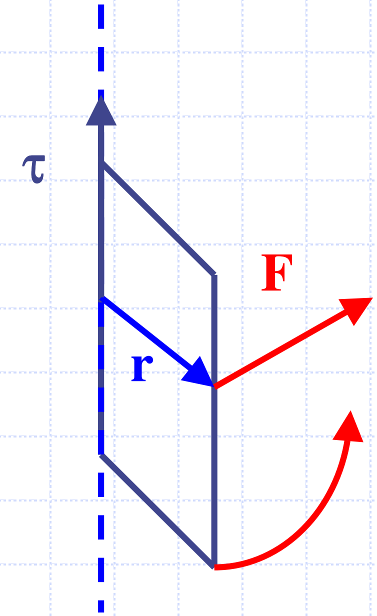
Energia cinetica rotazionale
e momento d'inerzia

$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\tau = rF sen\theta$$



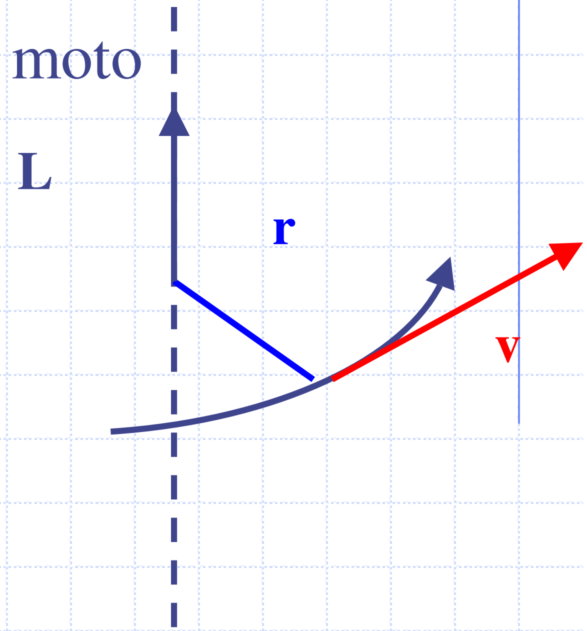
momento di una forza

Momento angolare o momento della quantità di moto

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$L = rmv sen\theta$$

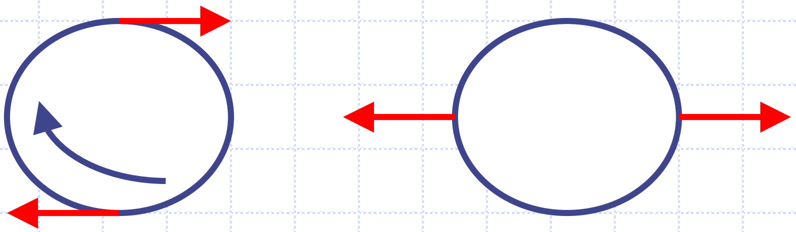
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



$$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{tot} = \cos t.$$

se la risultante dei momenti delle forze è nulla il momento angolare totale si conserva

Equilibrio di un corpo rigido



$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$$

Riassumendo

s	spazio	θ	Angolo in radianti
v	velocità lineare	ω	velocità angolare
a	acc. lineare	α	acc. angolare
m	massa	I	momento d'inerzia
F	forza	τ	momento della forza
p	quantità di moto	L	momento della q.m.