



**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA**  
1 8 0 3

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

**Instituto de Física**

**Complemento de Física III**  
**Ondas**

**Héctor Alzate López**

**Medellín, Enero de 2004**

## Programa del Curso de FIII, Evaluación (semestre 2003/2) y Bibliografía

### Programa

#### Unidad I: Movimiento Ondulatorio. Ondas Elásticas

(h: hora) 20 h

Presentación global del contenido del curso; metodología y evaluación. Descripción matemática de la propagación ondulatoria. Periodicidades espacial y temporal del movimiento ondulatorio. Fase y desfases. Ecuación diferencial del movimiento ondulatorio. (3 h)

Ondas elásticas longitudinales y transversales en una barra. Ondas de presión en una columna de gas. (3 h)

Ondas transversales en una cuerda. Descripción analítica de la polarización. (1 h)

Propagación de momentum y energía. Flujo energético o intensidad. Nivel de intensidad B. (2 h)

Reflexión y transmisión en el punto de unión de dos cuerdas. (1 h)

Ondas en varias dimensiones; vector  $k$ . Ondas esféricas en fluidos isotrópicos. (1 h)

Ondas estacionarias en una dimensión. Ondas estacionarias y la ecuación de onda. Ondas estacionarias en cuerdas y columnas de aire. Ondas estacionarias en 2 dimensiones (2 h)

Efecto Doppler. (1 h)

Análisis de Fourier de movimientos periódicos y ondulatorios. Velocidades de fase y de grupo; pulsos; dispersión. (2 h)

Problemas. (3 h)

#### Unidad II: Ondas Electromagnéticas

8 h

Ecuaciones de Maxwell. Solución en ondas planas. Energías eléctrica y magnética. Polarización. (3 h)

Flujo energético. Vector de Poynting. Presión de radiación. (2 h)

Producción de ondas electromagnéticas. El espectro electromagnético. (1 h)

Problemas. (2 h)

#### Unidad III: Reflexión, Refracción y Polarización. Óptica Geométrica

16 h

Principio de Huygens. Teorema de Malus. Principio de Fermat. (2 h)

Reflexión y refracción de ondas planas. Ley de Snell. Ángulo crítico. (2 h)

Coefficientes de Fresnel. (2 h)

Reflexión y refracción en superficies esféricas. (2 h)

Lentes delgadas. (2 h)

Instrumentos ópticos: Ojo, microscopio, telescopio. (2 h)

Prismas y dispersión. Arco iris. (1 h)

Problemas. (3 h)

#### Unidad IV: Interferencia y Difracción

16 h

Coherencia e incoherencia. Interferencia de 2 fuentes sincrónicas. (2 h)

Interferencia de varias fuentes. (2 h)

Interferencia en películas delgadas. Anillos de Newton. (2 h)

Ondas electromagnéticas estacionarias; experimento de Hertz. (1 h)

Difracción de Fraunhofer por una rendija delgada; poder de resolución. (2 h)

Difracción de Fraunhofer por 2 rendijas (experimento de Young). (1 h)

Difracción por una abertura circular; poder de resolución. (1 h)

La rejilla de difracción; poder de resolución. (2 h)

Problemas. (3 h)

#### Evaluación, Facultad de Ingeniería

Se realizarán 4 exámenes:

**Primer examen**, Unidad I, 30 %.

**Segundo examen**, Unidad II, 20 %.

**Tercer examen**, Unidad III, 30 %.

**Cuarto examen**, Unidad IV, 20 %.

#### Bibliografía

M. Alonso y E. Finn, *Física*, Vols. I y II. Fondo Educativo Interamericano, S.A.

Sears, Zemansky et al., *Física Universitaria*, Vols. I y II, Ed. Addison Wesley (Pearson Educación), 1999

Serway, R.A. *Física*, Vols.1 y 2. Nueva Editorial Interamericana, S.A.

Resnick y Halliday, *Física*, Vols. I y II, Ed. CECSA.

W. Edward Gettys, Frederick O. Keller y Malcolm J. Skover, *Física Clásica y Moderna*, Ed. McGraw Hill.

Eisberg, Lerner, *Fundamentos y Aplicaciones de Física*, Vols. I y II, Ed. McGraw Hill S.A.

Ronald Lane Reese, *Física Universitaria*, Vols. I y II, Ed. Thomson, 2002

# 1

## ONDAS ELÁSTICAS

El presente folleto se diseñó como un complemento al curso de Física III y no como un texto guía. Al estudiante le seguirán siendo indispensables las notas de clase y alguno de los textos de Física Universitaria que se dan en la bibliografía del curso.

El tipo de letra utilizado en un escrito impreso se llama redondo o normal si no tiene ninguna inclinación en especial, y es el más común; se llama *cursivo* si está inclinado hacia la derecha. Si el carácter se destaca por ser más negro, se dice que está en negrilla.

En este complemento se sigue la convención de escribir las variables escalares con letra *cursiva* o *itálica*, p. ej.,  $m, x, t, F, v$  (no se escribe:  $m, x, t, F, v$ ), mientras que los vectores se denotan con letra redonda y negrilla, p. ej.,  $\mathbf{F}, \mathbf{v}$  (no se escribe:  $F, F$ ). Las funciones seno, tangente, logaritmo, etc. siempre se escriben con minúsculas redondas, p. ej.,  $\sin x, \tan y, \log 100, \arccos \theta, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  (no se escribe:  $\text{Sen } x, \text{sen } x$ ). Los números deben ir en letra redonda:  $1, 2, 3, \dots$ .



Es indispensable, cuando se escribe a mano, diferenciar entre vectores y escalares escribiendo una flecha sobre los vectores, p. ej.,  $\vec{F}$ ; cuando el vector es unitario, se debe escribir, en su lugar, un 'gorro', p. ej.,  $\hat{u}_x, \hat{k}$ .

La siguiente sección es un listado de las ecuaciones fundamentales, seguida por la sección de ejemplos y problemas.

### 1.1. Ecuaciones

Onda viajera en una dimensión,  $\xi(x, t) = f(x \pm vt)$ .

Número de onda,  $k = 2\pi/\lambda$ .

Onda viajera armónica,  $\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x \pm vt) = \xi_0 \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{P} \right)$ .

Frecuencia angular,  $\omega = kv$ .

Rapidez de una onda,  $v = \lambda\nu$ .

Ecuación Diferencial del Movimiento Ondulatorio,  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ . (1.1)

Esfuerzo normal o tensión,  $S = F/A$ .

Deformación unitaria,  $\epsilon = \partial \xi / \partial x$ .

Ley de Hooke para una barra, ondas longitudinales,  $S = Y\epsilon$ .

Ecuación de onda para una barra,  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ .

Rapidez de las ondas transversales en una cuerda,  $v = \sqrt{T/\mu}$ . (1.2)

Rapidez de las ondas longitudinales en una barra,  $v = \sqrt{Y/\rho}$ .

Rapidez de las ondas transversales en una barra,  $v = \sqrt{G/\rho}$ . (1.3)

Deformación longitudinal,  $l = FL/YA$ . (1.4)

Relación entre las ondas de densidad y desplazamiento,  $\Delta\rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \partial\xi/\partial x$ . (1.5)

Ley de Hooke para fluidos,  $p = p_0 + B(\rho - \rho_0)/\rho_0$ .

Relación entre las ondas de presión y desplazamiento,  $\Delta p = p - p_0 = -B \partial\xi/\partial x$ . (1.6)

Ecuación de onda para un fluido,  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ . (1.7)

Rapidez de las ondas en un fluido,  $v = \sqrt{B/\rho_0}$ . (1.8)

Rapidez de las ondas en un gas,  $v = \alpha\sqrt{T}$ . Para el aire,  $\alpha = 20 \text{ m/s} \cdot \text{K}^{1/2}$ . (1.9)

Relación entre las amplitudes de desplazamiento y de presión,  $\xi_0 = \frac{\mathcal{P}_0}{2\pi v \rho_0 \omega}$ . (1.10)

Densidad de energía de una onda elástica,  $E = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$ . (1.11)

Intensidad de una onda elástica,  $I = vE = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$ . (1.12)

Nivel de intensidad en db,  $\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$ , con  $I_0 \equiv 10^{-12} \text{ W/m}^2$ . (1.13)

Densidad lineal relativa,  $\mu_{12} \equiv \mu_1/\mu_2$ ,  $\mu_{21} \equiv \mu_2/\mu_1$ .

Coefficiente de reflexión para la amplitud,  $R \equiv \frac{\xi'_{0r}}{\xi_{0i}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{1 - \sqrt{\mu_{21}}}{1 + \sqrt{\mu_{21}}}$ . (1.14)

Coefficiente de transmisión para la amplitud,  $T \equiv \frac{\xi_{0r}}{\xi_{0i}} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\mu_{21}}}$ . (1.15)

Coefficiente de reflexión para la potencia o *reflectancia*,  $\mathcal{R} \equiv P'_r/P_i$ .

Coefficiente de transmisión para la potencia o *transmitancia*,  $\mathcal{T} \equiv P_r/P_i$ .

Producto escalar entre  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{r}$  en 3 dimensiones,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ . (1.16)

Número de onda en 3 dimensiones,  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \omega/v$ . (1.17)

Efecto Doppler, fuente y observador colineales,  $v_0$  y  $v_s$  constantes,  $\nu' = \nu \frac{v - v_0}{v - v_s}$ . (1.18)

Frecuencias propias de una cuerda con extremos fijos,  $\nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ . (1.19)

Frecuencias propias de un tubo abierto-cerrado,  $\nu_n = (2n + 1) \frac{v}{4L}$ . (1.20)

Frecuencia de los pulsos,  $\nu_p = \nu_1 - \nu_2$ . (1.21)

La Ec. 1.1 la halló d'Alembert en 1747, para las ondas en una cuerda. Fue el primero en escribirla, aunque con una notación diferente.\*

\*Elizabeth Garber, *The Language of Physics. The Calculus and the Development of Theoretical Physics*, Birkhäuser, Boston, 1999. Pág. 32:  $d \frac{dy}{dt^2} = \frac{T}{\rho} d \frac{dy}{ds^2}$ .

## 1.2. Definición de la Onda de Desplazamiento $\xi$

$\xi(\mathbf{r}, t)$  es lo que una partícula del medio se separa de su posición de equilibrio  $\mathbf{r}$  en el instante  $t$ .  
(1.22)

La línea horizontal de la Fig. 1.1 representa una cuerda tensa fija en sus extremos; la línea curva es la cuerda vibrando. Cuando en un medio material no hay una onda o una perturbación, las partículas del medio se encuentran en su posición de equilibrio; el vector  $\mathbf{r}$  especifica la posición de equilibrio de una partícula. A  $\xi$  (csi) lo llamamos el campo u onda de desplazamiento. Si  $\mathbf{R}$  es la posición instantánea de la partícula, de la figura vemos que

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} + \xi(\mathbf{r}, t).$$

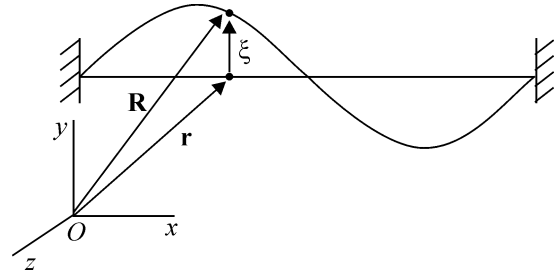


Figura 1.1 Definición de  $\xi$

## 1.3. Ejemplos y Problemas

**Ejemplo 1.1.** Para una cuerda uniforme, halle la relación entre la densidad lineal de masa  $\mu$  y la densidad volumétrica de masa  $\rho$ .

*Solución.* Sea  $m$  la masa total de la cuerda,  $L$  la longitud,  $A$  el área transversal y  $V$  el volumen (Fig. 1.2). Por la definición de  $\mu$ ,  $m = \mu L$ ; por la definición de  $\rho$ ,  $m = \rho V = \rho AL$ . Iguaemos las 2 expresiones para  $m$ ,  $\mu L = \rho AL$ . Cancelemos  $L$ ,

$$\mu = \rho A. \quad (1.23)$$

Vemos que las dimensiones se cumplen,  $ML^{-1} = ML^{-3} L^2$ .

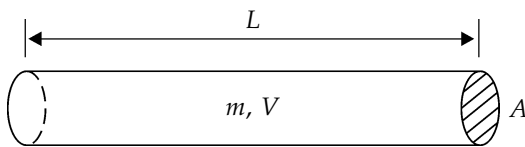


Figura 1.2

**Ejemplo 1.2.** Una cuerda de acero de un piano está sometida a una tensión de 200 N, tiene un diámetro de 1 mm, y una longitud de 80 cm. Suponga que por la cuerda avanza una onda transversal viajera y armónica, con polarización lineal, de amplitud 0.5 mm y longitud de onda de 40 cm. Halle (a) la densidad lineal de masa, (b) la rapidez de las ondas transversales, (c) la frecuencia angular y el número de ciclos por segundo con que vibra un punto del medio, (d) la función de onda, (e) la rapidez máxima de un punto de la cuerda, (f) la densidad volumétrica y la densidad lineal de energía, (g) la energía promedio en toda la cuerda, (h) el promedio del flujo de energía por unidad de tiempo a través

de cualquier sección de la cuerda, (i) la potencia mínima de la fuente (el pianista) que produce las ondas.

*Solución.* El objetivo de este problema es fundamentalmente didáctico; en la realidad en una cuerda no se propagan ondas viajeras, en un solo sentido, sino que debido a la reflexión en los extremos de la cuerda hay ondas viajeras en sentido opuesto, se presenta interferencia entre las ondas en ambos sentidos, dando lugar a ondas estacionarias que tienen una descripción diferente a la del presente ejemplo.

En una cuerda se presentan fuerzas recuperadoras de diferente origen. Una de ellas se debe a la tensión, las otras a la rigidez intrínseca de la cuerda, considerada como una barra rígida delgada, y cuantificadas por los módulos  $Y$  y  $G$ . Al excitar la cuerda se producen ondas debido al comportamiento de la cuerda como una cuerda tensa y como una barra rígida delgada, cada una con su velocidad característica. El sonido que escuchamos se debe primordialmente a la onda transversal de la cuerda tensa, con amplitud  $\xi_0$  y con rapidez  $v = \sqrt{T/\mu}$ . Esta expresión de  $v$  es una buena aproximación, pues la rigidez intrínseca de la cuerda provoca que la expresión sea mucho más compleja, y que dependa de la frecuencia, esto es, que la cuerda sea dispersiva.

Los datos numéricos del problema son:

$$\rho_{\text{acero}} = 7,8 \text{ g/cm}^3 = 7800 \text{ kg/m}^3,$$

$$T = 200 \text{ N},$$

$$r = \frac{1}{2} \text{ mm} = 5 \times 10^{-4} \text{ m},$$

$$L = 80 \text{ cm} = 0,80 \text{ m},$$

$$\xi_0 = 0,5\text{mm} = 5 \times 10^{-4}\text{ m},$$

$$\lambda = 40\text{ cm} = 0,40\text{ m},$$

$$(a) \mu = \rho A = \pi r^2 = \pi(7800\text{ kg/m}^3)(5 \times 10^{-4}\text{ m})^2 = 0,00613\text{ kg/m} = 6,13\text{ g/m}.$$

$$(b) v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{200\text{ N}}{0,00613\text{ kg/m}}} = 181\text{ m/s}.$$

(c) La frecuencia angular es

$$\omega = kv = \frac{2\pi}{\lambda}v = \frac{2\pi}{0,4\text{ m}} 181\text{ m/s} = 2838\text{ s}^{-1} \text{ ó rad/s}.$$

El número de ciclos por segundo es

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} = \frac{181\text{ m/s}}{0,40\text{ m}} = 452\text{ Hz}.$$

Las unidades de  $\omega$  son  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$  o también  $\text{s}^{-1}$ , las de  $\nu$  son  $\text{Hz}$  o  $\text{s}^{-1}$ ; un  $\text{Hz}$  equivale a un ciclo por segundo. Es un error expresar en  $\text{Hz}$  a  $\omega$ .

(d) Escojamos al eje  $x$  coincidente con la cuerda estática. Como es transversal, entonces  $\xi$  es perpendicular al eje de propagación  $x$ . Como la polarización es lineal,  $\xi$  no cambia de dirección; definamos a esta dirección como el eje  $y$ . Como es armónica, el campo  $\xi$  se expresa con la función seno o coseno (longitud en m, tiempo en s),

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{u}_y = \xi_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \mathbf{u}_y \\ &= 5 \times 10^{-4} \sin \frac{2\pi}{0,40}(x - 181t) \mathbf{u}_y. \end{aligned} \quad (1.24)$$

(e) El vector velocidad de un punto del medio,  $\mathbf{v}_p$ , es la derivada de la Ec. 1.24 respecto al tiempo,

$$\mathbf{v}_p = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = -\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_y.$$

La rapidez es máxima cuando  $\cos(kx - \omega t) = -1$ , y se presenta cuando el punto pasa por la posición de equilibrio;

$$\begin{aligned} v_p|_{\text{máx}} &= \left. \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right|_{\text{máx}} = \omega \xi_0 \\ &= (2838\text{ s}^{-1})(5 \times 10^{-4}\text{ m}) = 1,42\text{ m/s}. \end{aligned}$$

(f) La densidad volumétrica promedio de energía, o número de joules por metro cúbico, es

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 = \frac{1}{2} (7800\text{ kg/m}^3) (2838/\text{s})^2 (5 \times 10^{-4}\text{ m})^2 \\ &= 7854\text{ J/m}^3. \end{aligned}$$

La densidad lineal de energía  $\epsilon_l$ , o número de joules por cada metro lineal de cuerda, es la energía total de la cuerda dividida por su longitud  $L$ ,

$$\begin{aligned} \epsilon_l &= \frac{E}{L} = \frac{\epsilon V}{L} = \frac{\epsilon AL}{L} = \epsilon A = \pi \epsilon r^2 \\ &= \pi (7854\text{ J/m}^3) (5 \times 10^{-4}\text{ m})^2 = 0,00617\text{ J/m}. \end{aligned}$$

(g) Mediante la densidad volumétrica de energía,

$$\begin{aligned} E &= \epsilon V = \epsilon \pi r^2 L \\ &= \pi (7854\text{ J/m}^3) (5 \times 10^{-4}\text{ m})^2 (0,8\text{ m}) \\ &= 0,00493\text{ J}, \end{aligned}$$

O mediante la densidad lineal de energía,

$$E = \epsilon_l L = (0,00617\text{ J/m})(0,8\text{ m}) = 0,00493\text{ J}.$$

(h) Suponemos que la cuerda no es disipativa, esto es, no hay conversión de energía ondulatoria en calor por fricción entre los átomos o moléculas del medio. Por conservación de la energía, la medida que un observador haga de la energía promedio que en un segundo pasa a través de una sección transversal de la cuerda, no depende de la posición de esa sección; en la Fig. 1.2, la energía promedio (no la energía instantánea) por unidad de tiempo que atraviesa la cara de la izquierda es la misma que la de la derecha. La energía promedio por unidad de tiempo es la potencia promedio,

$$\begin{aligned} P &= IA = v \epsilon A \\ &= (181\text{ m/s})(7854\text{ J/m}^3) \pi (5 \times 10^{-4}\text{ m})^2 \\ &= 1,11\text{ J/s} = 1,11\text{ W}. \end{aligned}$$

(i) Por conservación de la energía, la fuente (el pianista) debe tener como mínimo la misma potencia de las ondas que produce. Decimos como mínimo, porque la propia fuente y la cuerda disipan energía.

$$P_{\text{fuente}} = P_{\text{onda}} = 1,11\text{ W}.$$

**Ejemplo 1.3.** Una cuerda uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$  cuelga libremente del techo. Sea  $x$  la distancia a partir del punto inferior de la cuerda (Fig. 1.3). (a) Demuestre que la velocidad de propagación de un pulso de onda transversal a lo largo de la cuerda es  $\sqrt{gx}$ . (b) Determine el tiempo  $t$  que tarda un pulso transversal en recorrer la longitud de la cuerda.

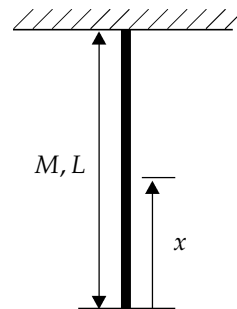


Figura 1.3 La velocidad de la onda depende de  $x$ .

**Solución.**

(a) La densidad lineal de masa es  $\mu = M/L$ . La masa del tramo de cuerda de longitud  $x$  es  $m = \mu x = Mx/L$ . Dicho tramo ejerce una tensión en la sección determinada por  $x$ ,  $T = mg = Mg x/L$ . La velocidad en  $x$  es

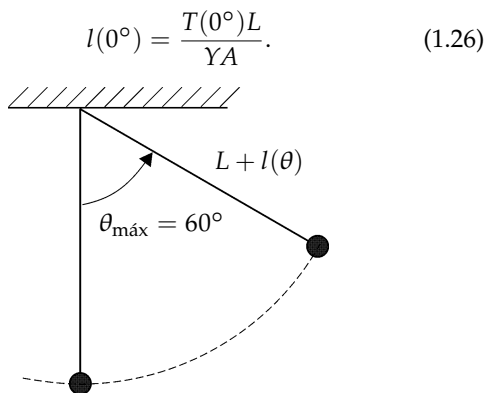
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mgx/L}{M/L}} = \sqrt{gx}. \quad (1.25)$$

(b) La velocidad de propagación del pulso de onda es  $v = dx/dt$ . Igulemos con la Ec. 1.25,  $v = dx/dt = \sqrt{gx}$ . Despejemos,  $dx/\sqrt{x} = \sqrt{g} dt$ . Integremos el miembro izquierdo entre 0 y  $L$ , y el miembro derecho entre 0 y  $t$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^L x^{-1/2} dx &= \sqrt{g} \int_0^t dt; \\ \frac{x^{1/2}}{1/2} \Big|_0^L &= \sqrt{g} t \Big|_0^t; \\ 2\sqrt{L} &= \sqrt{g} t; \\ t &= 2\sqrt{L/g}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.4.** Una esfera de hierro de 10 kg se une a un extremo de un alambre de acero de 3 m de longitud; el otro extremo se suspende del techo, y se hace oscilar al péndulo así formado con una amplitud de  $60^\circ$  (Fig. 1.4). La sección transversal del alambre es de  $1 \text{ mm}^2$ ,  $\rho_{\text{acero}} = 7,8 \text{ g/cm}^3$  y  $Y_{\text{acero}} = 2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ . Halle el estiramiento del alambre cuando pasa por la posición más baja.

**Solución.** Cuando una barra se somete a una tensión longitudinal  $T$ , el estiramiento  $l$  lo da la Ec. 1.4, reemplazando a  $F$  por  $T$ . La tensión depende del ángulo y  $l(\theta) = T(\theta)L/YA$ . En el punto más bajo,



**Figura 1.4** La longitud del péndulo depende de  $\theta$ .

Sea  $m$  la masa de la esfera. Se podría pensar que  $T(0^\circ) = mg$ , pero la posición más baja no es de equilibrio, puesto que la esfera se mueve en un arco de circunferencia, y la aceleración centrípeta,  $v^2/r$ , es diferente de cero; la aceleración tangencial sí es cero en  $\theta =$

0. El estudiante debe comprobar que el radio de la esfera ( $\rho_{\text{hierro}} \approx \rho_{\text{acero}}$ ) es cerca de 6.7 cm y que  $m_{\text{alambre}} \approx 23 \text{ g}$ . Podemos entonces despreciar, respecto a  $L$ , a  $r_{\text{esfera}}$ ; respecto a  $m$  podemos despreciar a  $m_{\text{alambre}}$ . También debe demostrar que  $1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$ .

Con base en el anterior párrafo, y puesto que el problema es especialmente de dinámica y no de ondas, el estudiante debe demostrar que si  $\theta_{\text{máx}} = 60^\circ$ , entonces  $T(0^\circ) = 2mg$ . Reemplazando en la Ec. 1.26 obtenemos

$$\begin{aligned} l(0^\circ) &= \frac{2mgL}{YA} = \frac{2(10 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m})}{(2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2)(10^{-6} \text{ m}^2)} \\ &\approx 3 \times 10^{-3} \text{ m} = 3 \text{ mm}. \end{aligned}$$

El alambre en su posición más baja se estira una milésima de su longitud inicial y mide 3 m + 3 mm.

**Ejemplo 1.5.** Halle la rapidez del sonido en el agua si su módulo volumétrico es  $B = 2,1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ .

**Solución.**  $\rho_{\text{agua}} = 1,0 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Reemplazando en la Ec. 1.8, que es para la rapidez de las ondas en un fluido, obtenemos la rapidez del sonido en el agua,

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,1 \times 10^9 \text{ N/m}^2}{1000 \text{ kg/m}^3}} = 1450 \text{ m/s}.$$

En el agua el sonido se propaga, aproximadamente, 4.2 veces más rápido que en el aire:  $1450/345 = 4.2$ . La rapidez también depende de la temperatura del agua, aunque de una forma menos marcada que en el aire (a  $0^\circ \text{C}$  es cerca de 1400 m/s).

**Ejemplo 1.6.** Halle la rapidez del sonido y de las ondas transversales en una barra de acero.

**Solución.** Para el acero,  $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3 = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $Y = 2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $G = 0,80 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

Cuando nos piden la rapidez del sonido en un medio, generalmente nos preguntan por la rapidez de las ondas longitudinales en ese medio.

$$\begin{aligned} v_{\text{sonido}} &= \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2}{7800 \text{ kg/m}^3}} = 5064 \text{ m/s} \\ &\approx 18\,200 \text{ km/h}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{\text{trans}} &= \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{0,80 \times 10^{11} \text{ N/m}^2}{7800 \text{ kg/m}^3}} = 3202 \text{ m/s} \\ &\approx 11\,500 \text{ km/h}. \end{aligned}$$

La rapidez del sonido en una barra de acero es cerca de 15 veces la rapidez del sonido en el aire:  $5064/345 \approx 15$ . Un bloque de acero es más rígido que una barra, lo que implica que la rapidez es aún mayor.

Para cualquier sólido,  $Y > G$ , y la rapidez de las ondas longitudinales siempre es mayor que el de las transversales. En un temblor de tierra se producen ambas ondas; primero llegan a un punto las ondas longitudinales ( $v \approx 20\,000$  km/h), y luego las transversales. Las primeras le dan la vuelta a la corteza terrestre en cerca de 2 horas, pues el perímetro de la Tierra es  $\sim 40\,000$  km. Se ha detectado, con los terremotos, que entre dos puntos opuestos en la Tierra no viajan en línea recta ondas transversales, lo que lleva a concluir que una parte importante del interior de nuestro planeta es fluido, ya que estos no transmiten esfuerzos transversales sino longitudinales.

#### Ejemplo 1.7. Combinando las ecuaciones

$$p = p_0 - B \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

obtenga la ecuación de onda para la presión en una columna de gas.

**Solución.** Tomemos la segunda derivada respecto al tiempo de la primera ecuación, y conmutémosla con la derivada espacial,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -B \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right).$$

Despejemos a  $\partial^2 \xi / \partial t^2$  de la segunda ecuación, y reemplacemos en la anterior,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -B \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

#### ► Problema 1.1. Combinando las ecuaciones

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

obtenga la ecuación de onda para la densidad,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

**Ejemplo 1.8.** Encuentre el cambio de la rapidez del sonido en el aire por unidad de cambio de la temperatura a  $25^\circ\text{C}$ .

**Solución.** Nos piden hallar a  $\Delta v$  cuando  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$  y  $T = 25^\circ\text{C} \approx 298\text{K}$ . Un cambio de  $1^\circ\text{C}$  equivale a un cambio de 1 K (demostrarlo).

Como  $1\text{K} \ll 298\text{K}$ , podemos aproximar  $\Delta T \approx dT$  y  $\Delta v \approx dv$ . Derivemos la Ec. 1.9,

$$\frac{dv}{dT} \approx \frac{\Delta v}{\Delta T} = \frac{\alpha}{2\sqrt{T}} = \frac{10\text{ m/s} \cdot \text{K}^{1/2}}{\sqrt{298\text{K}}} = 0,58 \frac{\text{m/s}}{^\circ\text{C}}.$$

Si la temperatura pasa de  $25^\circ\text{C}$  a  $26^\circ\text{C}$  o  $24^\circ\text{C}$ , la rapidez aumenta o disminuye, según el caso, en  $0,58\text{ m/s}$ .

**Ejemplo 1.9.** Asuma que las ondas de presión en una columna de gas tienen la forma

$$\Delta p = p - p_0 = \mathcal{P}_0 \sin(kx - \omega t). \quad (1.27)$$

(a) Usando las Ecs. (1.5) y (1.6), obtenga la expresión para la onda de desplazamiento. (b) Muestre que las ondas de desplazamiento y de presión están desfasadas entre sí un cuarto de longitud de onda, e interprete físicamente y en la representación gráfica de esas ondas, el desfase. (c) Obtenga la expresión para la onda de densidad y muestre que está en fase con la onda de presión. (d) Encuentre la relación entre la amplitud de la onda de densidad y la amplitud de la onda de presión, y entre las amplitudes de densidad y de desplazamiento.

**Solución.**

(a) Iguaemos las Ecs. (1.6) y (1.27), y multipliquemos por  $dx$ ,

$$-B \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = \mathcal{P}_0 \sin(kx - \omega t) dx. \quad (1.28)$$

El diferencial de  $\xi(x, t)$  es  $d\xi = (\partial \xi / \partial x) dx + (\partial \xi / \partial t) dt$ . En un  $t$  fijo,  $dt = 0$ , y  $d\xi = (\partial \xi / \partial x) dx$ . Introduciendo este diferencial en la Ec. 1.28, e integrando,

$$\begin{aligned} -B \int d\xi &= -B\xi = \mathcal{P}_0 \int \sin(kx - \omega t) dx \\ &= -\frac{\mathcal{P}_0 \cos(kx - \omega t)}{k}. \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos la onda de desplazamiento,

$$\xi(x, t) = \frac{\mathcal{P}_0}{Bk} \cos(kx - \omega t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t). \quad (1.29)$$

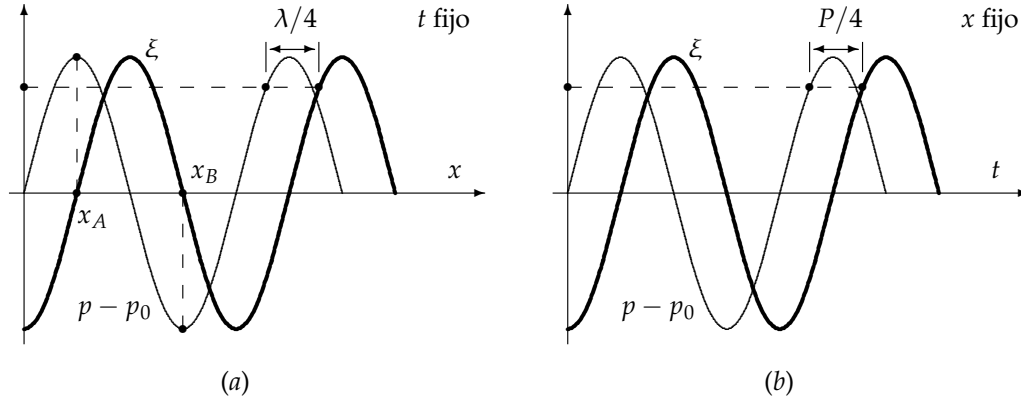
La amplitud de las oscilaciones es  $\xi_0 = \mathcal{P}_0 / Bk$ . Reemplazando a  $B = v^2 \rho_0$ , y a  $k = 2\pi v / \lambda$ , la amplitud toma la forma

$$\xi_0 = \frac{\mathcal{P}_0}{2\pi v \rho_0 \lambda}. \quad (1.30)$$

(b) La onda de presión, Ec. 1.27, está expresada en término de la función seno, mientras que la onda de desplazamiento, Ec. 1.29, está expresada con la función coseno. Puesto que el desfase entre ambas funciones es  $\pi/2$ , este también es el desfase entre dichas ondas. Un desfase se expresa, estrictamente, en radianes, pero como la mínima distancia  $\Delta x$ , con  $t$  fijo, entre un mismo valor arbitrario de las funciones seno y coseno es  $\lambda/4$  (Fig. 1.5a), se dice a veces, hablando sin total rigor, que el desfase es  $\lambda/4$ , con unidades de longitud.

El desfase se puede ver también en términos temporales en lugar de espaciales como en el anterior párrafo. Es válido darlo con unidades de tiempo, y decir que es  $P/4$ , ya que en un punto fijo  $x$  hay que esperar un tiempo mínimo de  $P/4$  (Fig. 1.5b) para que un valor





**Figura 1.5** Desfase de  $\pi/2$  entre las ondas de desplazamiento y de presión. (a) Interpretación espacial, (b) interpretación temporal.

arbitrario de la función seno sea igual al de la función coseno.

Un desfase de  $\pi/2$  (o  $\lambda/4$  o  $P/4$  según se prefiera) entre dos variables, quiere decir, según las familiares gráficas de las funciones seno y coseno (Fig. 1.5a), que en el instante en que en ciertos puntos del espacio una de las variables es máxima o mínima, en ese mismo instante y esos mismos puntos la otra variable vale cero, y viceversa: El elemento de aire en  $x_A$  está en su posición de equilibrio,  $\xi(x_A) = 0$ , y allí la presión es máxima,  $p(x_A) = p_0 + \mathcal{P}_0$ . El elemento de aire en  $x_B$  está en su posición de equilibrio,  $\xi(x_B) = 0$ , y allí la presión es mínima,  $p(x_B, t) = p_0 - \mathcal{P}_0$ .

Que la presión sea máxima o mínima en los puntos del medio que están en su posición de equilibrio se ve fácilmente interpretando la gráfica de  $\xi(x, t)$ , Fig. 1.6. El campo  $\xi$  en los puntos vecinos a  $x_A$  y a su derecha es negativo, lo que se interpreta como que esas porciones de aire se han alejado de sus respectivas posiciones de equilibrio hacia la izquierda, como se indica con la flechita dirigida hacia la izquierda y debajo de  $x_A$  [vea la definición (1.22) de  $\xi$ , p. 3]. El campo  $\xi$  en los puntos vecinos a  $x_A$  y a su izquierda es positivo, lo que se interpreta como que esas porciones de aire se han alejado de sus respectivas posiciones de equilibrio hacia la derecha. Esto implica que en  $x_A$  la presión y densidad son máximas. En la vecindad de  $x_B$  ocurre todo lo contrario, y es un punto de mínimas densidad y presión. Visto analíticamente, la pendiente en  $x_A$  es negativa,  $(\partial\xi/\partial x)_{x_A} < 0$ , y según la Ec. 1.6,  $p - p_0 > 0$  ó  $p > p_0$ . Por supuesto, en  $x_B$ ,  $p < p_0$ .

En los puntos donde  $\xi$  es máxima o mínima,  $\partial\xi/\partial x = 0$ , y según la Ec. 1.6,  $p = p_0$ , esto es, la onda de presión ( $p - p_0$ ) vale cero.

(c) Al dividir la Ec. 1.5 por la Ec. 1.6 y reemplazar  $B = \rho_0 v^2$  obtenemos

$$\Delta\rho = \Delta p/v^2. \quad (1.31)$$

Si la onda de presión  $\Delta p$  se expresa con la función seno,

también la onda de densidad  $\Delta\rho$  se expresa con la misma función, y como  $v^2 > 0$ , entonces las ondas están en fase entre sí: ellas alcanzan su máximo, se hacen cero o se vuelven mínimas simultáneamente. Ello era de esperarse, pues sabemos, según la experiencia común y la ley de los gases ideales, que a mayor presión mayor es la densidad.

Reemplacemos la Ec. 1.27 en la Ec. 1.31 para obtener la onda de densidad en función de  $x$  y  $t$ ,

$$\Delta\rho = \frac{\mathcal{P}_0}{v^2} \sin(kx - \omega t). \quad (1.32)$$

(d) Designemos  $\mathcal{R}_0$  a la amplitud de la onda de densidad. De la Ec. 1.32,

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{P}_0/v^2.$$

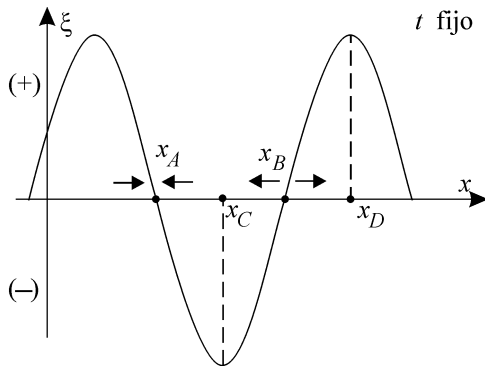
Despejemos a  $\mathcal{P}_0$  de la Ec. 1.30 y reemplacemos,

$$\mathcal{R}_0 = \frac{2\pi v \rho_0 \nu \xi_0}{v^2} = \frac{2\pi \rho_0 \xi_0}{v/\nu} = 2\pi \rho_0 \frac{\xi_0}{\lambda} = k \xi_0 \rho_0. \quad (1.33)$$

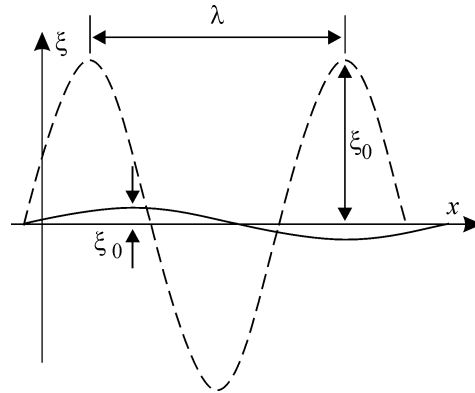
Los sonidos que escuchamos son variaciones, con ciertas frecuencias, de la presión y densidad atmosféricas alrededor de los valores de equilibrio  $p_0$  y  $\rho_0$ , que en Medellín valen 640 mm Hg y 1.0 kg/m<sup>3</sup>, respectivamente. En el agua los valores son distintos.

**Ejemplo 1.10.** (Este ejemplo es una continuación del Ejemplo 1.9). A partir de la onda de desplazamiento dentro de un tubo, mostrar, gráficamente, la distribución de densidad. La experiencia se hace en Medellín, a 25 °C.

En la Fig. 1.8a, a escala 1:1, se dibuja una porción del tubo que se ha dividido en 37 elementos de masa, enumerados de  $i = -3$  a  $i = 33$ . El punto negro en el centro de cada rectángulo representa su centro de masa (c. m.). El origen de coordenadas se ha hecho coincidir con el c. m. del elemento  $i = 0$ . Todavía no hay onda, y así cada elemento está en su posición de equilibrio, esto es,  $\xi(x_i, t) = 0$ . Se muestra la posición de equilibrio de



**Figura 1.6** Onda de desplazamiento  $\xi(x, t)$ . Examinando el entorno de los puntos del medio se sabe si son de máxima o de mínima presión.



**Figura 1.7** El adjetivo de **grande** o **pequeño** depende de la relación  $\xi_0/\lambda$ . La curva a trazos es de amplitud "grande", la continua se acerca más a una amplitud "pequeña".

los séptimo y treceavo elementos. La densidad del aire es uniforme a lo largo del tubo.

La Fig. 1.8b corresponde a la onda armónica de desplazamiento  $\xi$  en cierto instante  $t$ . Las flechitas son el desplazamiento  $\xi$  en función de  $x_i$ ; se señala el desplazamiento de su posición de equilibrio de los elementos séptimo y treceavo,  $\xi_7$  y  $\xi_{13}$  respectivamente.

Como las ondas en un fluido, en este caso aire, son longitudinales, los  $\xi_i$  van paralelos al eje  $x$ , que es la dirección de avance de la onda. En la Fig. c los  $\xi_i > 0$  se han rotado  $90^\circ$  respecto a la Fig. b, de manera que apunten hacia la derecha de su posición de equilibrio; los  $\xi_i < 0$  se han rotado de manera que apunten hacia la izquierda. La posición de equilibrio  $x_i$  se indica con una línea vertical invisible que empieza en la Fig. a, pasa sobre cada flecha de la Fig. b y termina en la cola de la flecha de la Fig. c. En la cabeza de esta última empieza otra línea vertical que desciende hasta terminar en la Fig. d, en el c. m. del elemento  $i$ , pero desplazado  $\xi_i$  de su posición de equilibrio.

En la Fig. d se aprecian claramente las variaciones de densidad a la largo del tubo.

◀► **Problema 1.2.** (Este problema es una continuación del Ejemplo 1.10). (a) ¿Qué elementos de masa  $i$  ( $i = -3, -2, \dots, 32, 33$ ) en la Fig. 1.8d están en su posición de equilibrio? (b) ¿Qué elementos  $i$  están más separados de posición de equilibrio? Mida con una regla (las figuras 1.8 están a escala 1:1) y dé el valor respectivo de  $x_i$  y  $\xi(x_i)$ , teniendo en cuenta que a la derecha es (+) y a la izquierda es (-). (c) Como el tubo es de sección transversal constante, el ancho de cada elemento es inversamente proporcional a su densidad. En Medellín,  $\rho_0 \approx 1,00 \text{ kg/m}^3$  y  $p_0 = 640 \text{ mm Hg}$ ; estos son los valores para todos los elementos de la Fig. 1.8a. ¿Qué elementos  $i$  de la Fig. 1.8d tienen  $\rho = \rho_0 = 1,00 \text{ kg/m}^3$ ;

cuánto vale  $\xi$  para estos elementos? (d) ¿Está de acuerdo el resultado del anterior numeral con la Ec. 1.5, p. 2?, ¿está de acuerdo con que el desfase entre la onda de densidad y la de desplazamiento sea  $90^\circ$ ? (e) ¿Qué elementos  $i$  tienen máxima densidad, y cuáles mínima?; ¿cuánto vale  $\xi$  para estos elementos? (f) ¿Está de acuerdo el resultado del anterior numeral con la Ec. 1.5? (g) Mida  $\xi_0$  y  $\lambda$ . Si la temperatura atmosférica es  $25^\circ\text{C}$ , calcule la frecuencia del sonido. (h) ¿Cuál es la intensidad y el nivel de intensidad sonora? (i) ¿Cuál es la amplitud de la onda de presión (Ec. 1.10, p. 2)?; ¿entre qué valores fluctúa la presión? (j) ¿Es constante la temperatura a lo largo del tubo? (Tenga presente que la propagación del sonido es fundamentalmente un proceso adiabático, esto es, no hay flujo de calor entre el elemento  $i$  y los elementos  $i - 1$  e  $i + 1$ ). (k) Si en la Fig. 1.8d un elemento  $i$  de masa tiene un volumen el doble que otro, podemos afirmar que su densidad es la mitad; ¿se puede afirmar también que la presión es la mitad? (Recuerde que  $PV = nRT$ ).

*Algunas respuestas:* Los valores son aproximados, pues dependen de las medidas que se estimen con la regla. (b)  $i = 5, 15, 25$ ;  $x_5 \approx 2,6 \text{ cm}$ ,  $x_{15} \approx 7,9 \text{ cm}$ ,  $x_{25} \approx 13,2 \text{ cm}$ ;  $\xi(2,6 \text{ cm}) = \xi_5 \approx +6,5 \text{ mm}$ ,  $\xi_{15} \approx -6,5 \text{ mm}$ ,  $\xi_{25} \approx +6,5 \text{ mm}$ . (c)  $i = 5, 15, 25$ ; los  $x$  respectivos son los del numeral anterior. (e)  $\rho_{\text{máx}} = \rho_{10} = \rho_{30}$ ,  $\rho_{\text{mín}} = \rho_{i=0} = \rho_{20}$ ;  $\xi_{i=0} = \xi_{10} = \xi_{20} = \xi_{30} = 0$ . (g)  $\nu \approx 3255 \text{ Hz}$ . (h)  $I \approx 3,06 \times 10^6 \text{ W/m}^2$ ,  $\beta \approx 185 \text{ db}$ ; este nivel es irreal por lo alto, y se origina en el valor exagerado de  $\xi_0$ . (i)  $P_0 \approx 355 \text{ mm Hg}$ . Entre 285 y 995 mm Hg.

◀► **Problema 1.3.** Interprete gráficamente el campo  $\xi$  en el entorno de  $x_C$  y  $x_D$  (Fig. 1.6) y determine si en dichos puntos no hay cambio de presión ( $\Delta p = 0$ ), si son de compresión ( $\Delta p > 0$ ) o descompresión ( $\Delta p < 0$ ). Utilice la definición (1.22) de  $\xi$ , p. 3.

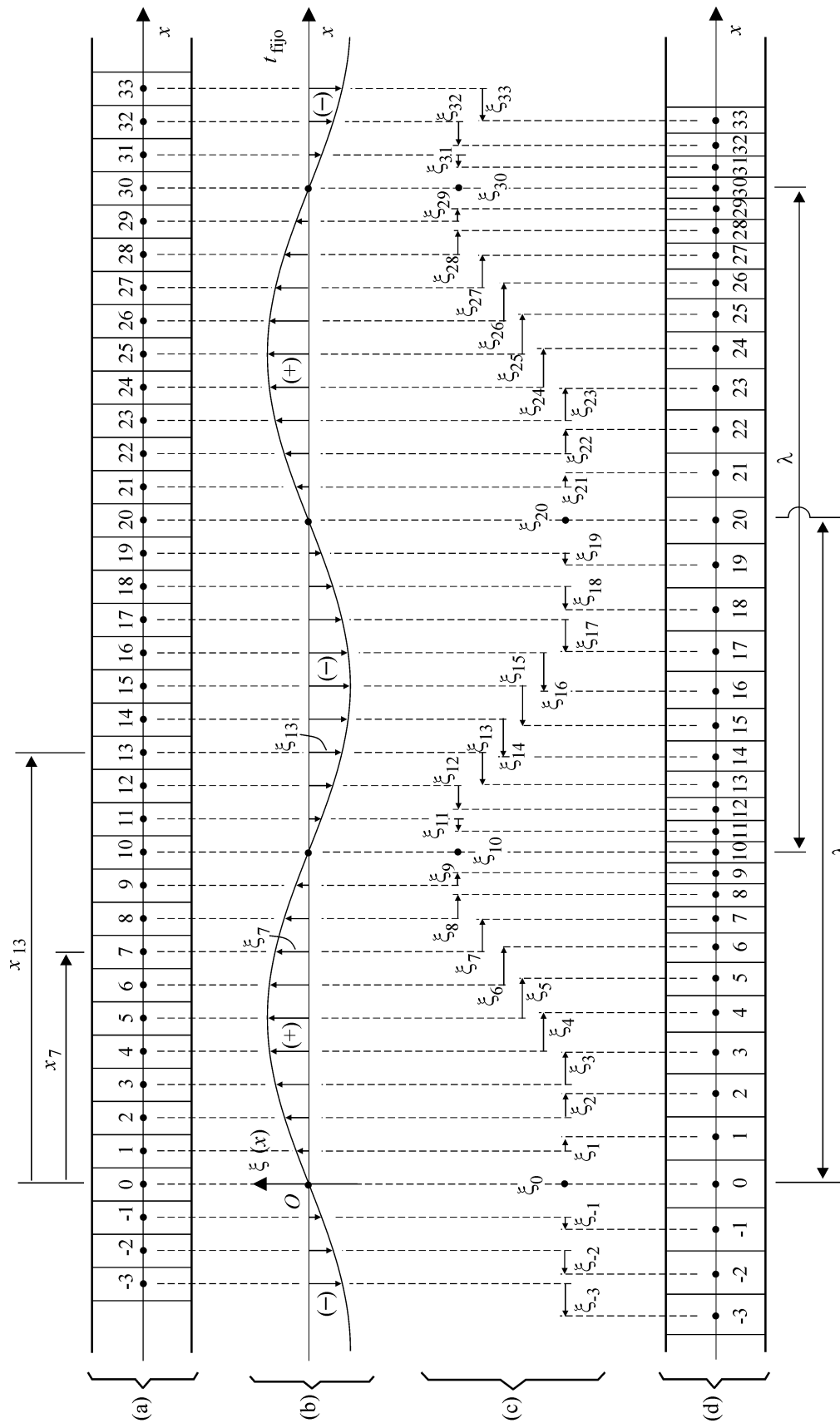


Figura 1.8 Ondas en un fluido.

**Ejemplo 1.11.** Halle la condición que se debe cumplir para que los cambios de densidad (y de presión) se puedan llamar *pequeños*.

**Solución.** La ecuación de onda para las ondas en una columna de gas, Ec. 1.7, se obtuvo para *cambios pequeños* en la densidad, esto es, para una densidad instantánea  $\rho$  que se aparta poco del valor de equilibrio  $\rho_0$ , lo que implica que  $\mathcal{R}_0 \ll \rho_0$ . Reemplacemos  $\mathcal{R}_0$ , Ec. 1.33, en esta desigualdad:  $k\xi_0\rho_0 \ll \rho_0$ ; cancelemos  $\rho_0$ ,

$$\begin{aligned} k\xi_0 &\ll 1, \\ \frac{2\pi}{\lambda}\xi_0 &\ll 1, \\ \xi_0 &\ll \lambda. \end{aligned}$$

*Cambios pequeños* implica  $\xi_0 \ll \lambda$ , y viceversa (hemos despreciado el  $2\pi$  en la última relación). Esta desigualdad, gráficamente, corresponde más con la curva continua de la Fig. 1.7, donde las variaciones del campo son *suaves*, esto es, la pendiente  $\partial\xi/\partial x \ll 1$ , que con la curva a trazos; para esta,  $\xi_0/\lambda \approx 0,6$  y, en general,  $\partial\xi/\partial x \not\ll 1$ .

**Ejemplo 1.12.** Dos ondas sonoras de igual frecuencia tienen niveles de intensidad que difieren en 30 db. Halle la relación entre sus intensidades y amplitudes de desplazamiento.

**Solución.** Para una onda,  $\beta_1 = 10 \log I_1/I_0$ ; para la otra,  $\beta_2 = 10 \log I_2/I_0$ . Según la información del ejemplo,  $\Delta B = 30 = 10(\log I_1/I_0 - \log I_2/I_0) = 10 \log I_1/I_2$ . Por la definición del logaritmo de un número en base 10,

$$I_1/I_2 = 10^{30/10} = 10^3 = 1000.$$

Aplicando la Ec. 1.12,

$$1000 = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_{01}^2}{\frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_{02}^2} = \frac{\xi_{01}^2}{\xi_{02}^2}.$$

Despejemos la relación pedida,

$$\xi_{01}/\xi_{02} = \sqrt{1000} = 31,6.$$

**Ejemplo 1.13.** Una persona hablando normalmente produce un nivel de intensidad de 65 db a 1 m de distancia. La rapidez del sonido es 340 m/s, la densidad del aire (depende de la altura) 1,2 kg/m<sup>3</sup>, y la frecuencia promedio emitida 300 Hz. (a) Calcule la energía promedio que la persona emite en sonido cada segundo. (b) Discuta las aproximaciones hechas en la solución del primer numeral. (c) Si la persona está dentro de un salón de dimensiones, en metros,  $6 \times 4 \times 3$ , y la intensidad fuera uniforme e igual al valor a 1 m de la fuente, calcule la energía total que habría dentro del salón. (d) ¿Cada segundo, cuántos joules son absorbidos por

los objetos dentro del salón, junto con los joules que salen por puertas, ventanas y por transmisión a través del techo, suelo y paredes? (e) Halle la amplitud de las vibraciones de un punto del medio (aire) debido a las ondas.

**Solución.**

(a) Al pedirnos la energía por unidad de tiempo lo que nos están pidiendo es la potencia, y para esto debemos averiguar primero la intensidad. Según la definición del logaritmo de un número y la Ec. 1.13,

$$I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}} = (10^{-12} \text{ W/m}^2) 10^{\frac{65}{10}} = 10^{-5,5} \text{ W/m}^2.$$

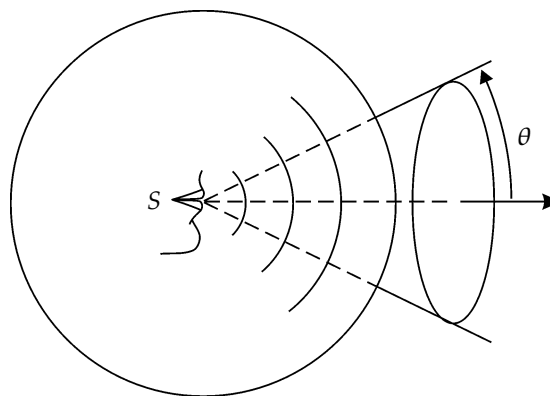
Pero el exponente de una respuesta nunca se expresa con decimales, sino con un entero, y aunque el anterior valor sea correcto, es indebido dejarlo así;

$$\begin{aligned} I(1 \text{ m}) &= 10^{0,5} \times 10^{-6} \text{ W/m}^2 = 3,16 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2 \\ &= 3,16 \mu\text{W/m}^2. \end{aligned}$$

Los puntos a 1 m de la fuente forman una esfera de 1 m de radio. La potencia es entonces la intensidad a 1 m por el área de esa esfera,

$$\begin{aligned} P &= AI = 4\pi r^2 I = 4\pi(1 \text{ m})^2 (3,16 \mu\text{W/m}^2) \\ &= 0,04 \text{ mW}. \end{aligned}$$

(b) La Fig. 1.9 representa, mediante esferas concéntricas de radio  $r$ , los frentes de onda emitidos. El ángulo  $\theta$  define un cono cuyo eje es perpendicular a la boca.



**Figura 1.9** Ondas sonoras esféricas.

Hemos supuesto que la intensidad solo depende de  $r$ ; en la realidad, la intensidad sonora es máxima directamente en frente de la boca, esto es, en  $\theta = 0$ , y mínima detrás de la cabeza, en  $\theta = 180^\circ$ . Cuando dentro de un recinto normal hay una fuente sonora, la intensidad en un punto dentro de él se debe a las ondas que de la fuente llegan directamente a ese punto, y de las ondas reflejadas. Aquí no hemos tenido en cuenta a estas últimas, aunque pueden contribuir con un 50 % de la intensidad. Las ondas reflejadas hacen que la intensidad se aparte mucho de una disminución como  $1/r^2$ ,

y que sea bastante uniforme. Además, cuando alguien habla, no solo emite sonido por la boca, sino que la cabeza y el tronco también son fuentes sonoras importantes y la persona está lejos de ser una fuente puntual, lo que lleva a que las ondas no sean esféricas cerca de la fuente.

(c) Puesto que conocemos el volumen del salón, para conocer la energía debemos calcular primero la energía por unidad de volumen, o sea la densidad de energía  $\epsilon$ , para multiplicarla por volumen total  $V$ ,

$$E = \epsilon V = \frac{I}{v} V = \frac{3,16 \mu\text{W}/\text{m}^2}{340 \text{ m/s}} (6 \text{ m})(4 \text{ m})(3 \text{ m}) = 0,7 \mu\text{J}.$$

(d) La energía en el salón es constante; la emisión de la fuente no está provocando un aumento de ella, ni las fugas de energía están produciendo una disminución. Concluimos entonces que cada segundo la energía emitida por la fuente iguala a la energía sonora que se pierde por absorción y por transmisión fuera del salón; según el numeral (a) es

$$\text{Ritmo de pérdida de energía del salón} = 0,04 \text{ mW}.$$

Una analogía puede ser útil: En un tanque que contenga una cantidad fija de agua, la cantidad de agua que sale de él, por segundo, iguala a la cantidad de agua que entra. En nuestro ejemplo, en lugar de agua se piensa en energía.

(e) De la Ec. 1.12,

$$\xi_0 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{v\rho}} = \frac{1}{2\pi \times 300 \text{ s}^{-1}} \sqrt{\frac{2(3,16 \times 10^{-6} \text{ W}/\text{m}^2)}{(340 \text{ m/s})(1,2 \text{ kg}/\text{m}^3)}} = 6,6 \times 10^{-8} \text{ m}.$$

Hemos supuesto que la frecuencia emitida es de 300 Hz. En realidad, la composición de frecuencias de una voz —su análisis de Fourier— es muy compleja y es característica de cada individuo.

**Ejemplo 1.14.** Desde la sección izquierda de la cuerda compuesta de la Fig. 1.10 incide sobre la interfase de separación una onda  $\xi_i = \xi_{0i} \sin(\omega t - k_1 x)$ , y se producen una onda reflejada  $\xi_r' = \xi_{0r}' \sin(\omega t + k_1 x)$  y una onda transmitida  $\xi_r = \xi_{0r} \sin(\omega t - k_2 x)$ . (a) Compruebe que la potencia promedio incidente es igual a la suma de la potencia promedio reflejada y la potencia promedio transmitida. (b)  $R$  y  $T$  son los coeficientes de reflexión y transmisión para la amplitud respectivamente. Los coeficientes de reflexión y transmisión para la potencia se conocen como la *reflectancia*  $\mathcal{R}$  y la *transmitancia*  $\mathcal{T}$ . Halle, en términos de  $R$  y  $T$ , expresiones para  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{T}$ . (c) Si la onda incidente tiene una potencia de un milivatio (1 mW), y la densidad lineal de masa donde está la onda transmitida es 4 veces la densidad donde está la onda incidente, halle la potencia reflejada y la potencia transmitida.

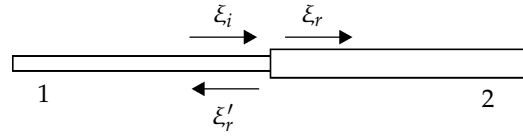


Figura 1.10 Reflexión y transmisión de ondas.

**Solución.** En las funciones  $\xi_i$ ,  $\xi_r'$  y  $\xi_r$  no hemos escrito  $\omega_i$  ni  $\omega_r'$  ni  $\omega_r$  sino  $\omega$ , puesto que la condición de frontera de que la cuerda es continua en todo instante (no está rota en la interfase) exige que la frecuencia con que vibra la sección izquierda de la interfase sea igual a la frecuencia con que lo hace la sección derecha.

*La frecuencia no cambia por reflexión ni por transmisión.*

Por definición, el subíndice 1 se refiere al medio donde está la onda incidente, y el subíndice 2 donde está la onda transmitida.

(a) Como las ondas reflejada y transmitida provienen de la incidente, es obvio, por conservación de la energía, que la energía de la onda incidente debe ser igual a la suma de la energía de la onda reflejada y la transmitida,

$$E_i = E_r' + E_r.$$

Esta igualdad se cumple cuando las energías se miden en el mismo intervalo de tiempo,

$$\frac{dE_i}{dt} = \frac{dE_r'}{dt} + \frac{dE_r}{dt}.$$

Cada uno de los términos es la potencia respectiva,

$$P_i = P_r' + P_r. \quad (1.34)$$

La ley de conservación de la energía asume así la forma de conservación de la potencia, no de la intensidad. Se puede comprobar que la intensidad se conserva,  $I_i = I_r' + I_r$ , solo si  $A_1 = A_2$ .

Antes de comprobar la Ec. 1.34, hallemos una nueva expresión para la potencia.

$$P = IA = v\epsilon A = v \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 A = \frac{1}{2} v (\rho A) \omega^2 \xi_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{T/\mu} \mu \omega^2 \xi_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\mu T} \omega^2 \xi_0^2. \quad (1.35)$$

Apliquemos esta expresión en la Ec. 1.34, pero con un signo de interrogación sobre el signo igual, pues apenas vamos a comprobar que la igualdad se cumple.

$$\frac{1}{2} \sqrt{\mu_1 T} \omega^2 \xi_{0i}^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \sqrt{\mu_1 T} \omega^2 \xi_{0r}'^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\mu_2 T} \omega^2 \xi_{0r}^2.$$

Simplifiquemos,

$$\sqrt{\mu_1} \xi_{0i}^2 \stackrel{?}{=} \sqrt{\mu_1} \xi_{0r}'^2 + \sqrt{\mu_2} \xi_{0r}^2.$$

Dividamos por  $\mu_1 \xi_{0i}^2$ ,

$$1 \stackrel{?}{=} \left( \frac{\xi'_{0r}}{\xi_{0i}} \right)^2 + \sqrt{\mu_{21}} \left( \frac{\xi_{0r}}{\xi_{0i}} \right)^2.$$

El primer paréntesis es el coeficiente de reflexión de la amplitud  $R$ , y el segundo el de transmisión  $T$ ,

$$1 \stackrel{?}{=} R^2 + \sqrt{\mu_{21}} T^2.$$

Según las Ecs. (1.14) y (1.15),

$$1 \stackrel{?}{=} \left( \frac{1 - \sqrt{\mu_{21}}}{1 + \sqrt{\mu_{21}}} \right)^2 + \sqrt{\mu_{21}} \left( \frac{2}{1 + \sqrt{\mu_{21}}} \right)^2.$$

El estudiante debe desarrollar el álgebra del miembro derecho y demostrar que se reduce a 1. Así queda comprobado que se cumple la Ec. 1.34, y podemos quitar la interrogación del signo igual.

(b) Según la definición de  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{R} = P'_r/P_i$  y  $\mathcal{T} = P_r/P_i$ . Apliquemos la Ec. 1.35,

$$\mathcal{R} = \frac{P'_r}{P_i} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\mu_1 T} \omega^2 \xi_{0r}'^2}{\frac{1}{2} \sqrt{\mu_1 T} \omega^2 \xi_{0i}^2} = \left( \frac{\xi'_{0r}}{\xi_{0i}} \right)^2 = R^2,$$

$$\mathcal{T} = \frac{P_r}{P_i} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\mu_2 T} \omega^2 \xi_{0r}^2}{\frac{1}{2} \sqrt{\mu_1 T} \omega^2 \xi_{0i}^2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \left( \frac{\xi_{0r}}{\xi_{0i}} \right)^2 = \sqrt{\mu_{21}} T^2.$$

(Para la reflexión y transmisión, la ley de conservación de la energía se puede escribir como  $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ ).

(c) Según la información del ejemplo,  $\mu_{21} = 4$ . Apliquemos el numeral anterior,

$$\begin{aligned} P'_r &= \mathcal{R} P_i = R^2 P_i = \left( \frac{1 - \sqrt{\mu_{21}}}{1 + \sqrt{\mu_{21}}} \right)^2 P_i = \left( \frac{1 - \sqrt{4}}{1 + \sqrt{4}} \right)^2 P_i \\ &= \frac{1}{9} P_i = \frac{1}{9} \text{ mW}. \end{aligned}$$

Incide un milivatio y se refleja un noveno de milivatio; como la energía se conserva, se transmite entonces 8 novenos de milivatio:

$$P_r = P_i - P'_r = 1 \text{ mW} - \frac{1}{9} \text{ mW} = \frac{8}{9} \text{ mW}.$$

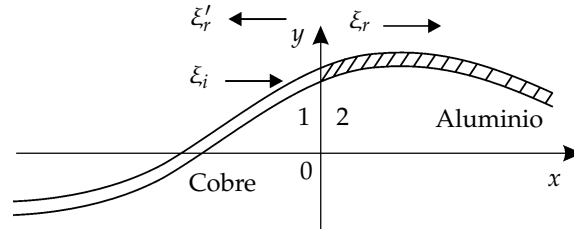
En porcentaje,

$$\% \text{ reflejado} = 100 \% \frac{P'_r}{P_i} = 100 \% \frac{\frac{1}{9} \text{ mW}}{1 \text{ mW}} = 11,1 \%,$$

$$\% \text{ transmitido} = 100 \% \frac{P_r}{P_i} = 100 \% \frac{\frac{8}{9} \text{ mW}}{1 \text{ mW}} = 88,9 \%.$$

**Ejemplo 1.15.** Alambres de cobre y de aluminio de 1 mm de diámetro se unen formando una cuerda larga (Fig. 1.11). En el cobre está la onda incidente polarizada linealmente en  $y$ , con una frecuencia de 220 Hz (nota

la) y una amplitud de 1 mm. La tensión es de 100 N. (La densidad del cobre es 8,9 g/cm<sup>3</sup>, la del aluminio es 2,7 g/cm<sup>3</sup>). Halle (a) los coeficientes de reflexión y transmisión para la amplitud, (b) la amplitud de las ondas reflejada y refractada (o transmitida), (c) la rapidez de las ondas en el acero y en el cobre, (d) la longitud de onda en ambas secciones de la cuerda, (e) las ecuaciones de las ondas incidente, reflejada y refractada, (f) la intensidad y la potencia de estas ondas.



**Figura 1.11** Reflexión y transmisión en una cuerda.

**Solución.** Los datos del ejemplo son:  $r_1 = r_2 = r = 0,5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\nu = 220 \text{ Hz}$ ; el cobre es el medio 1 por estar en él la onda incidente,  $\rho_{\text{Cu}} = \rho_1$  y  $\rho_{\text{Al}} = \rho_2$ ;  $\xi_{0i} = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ ,  $T = 100 \text{ N}$ .

(a) Hallemos primero la densidad lineal relativa,

$$\mu_{21} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2,7 \text{ g/cm}^3}{8,9 \text{ g/cm}^3} = 0,303$$

Reemplacemos en las Ecs. (1.14) y (1.15),

$$R = \frac{1 - \sqrt{0,303}}{1 + \sqrt{0,303}} = 0,29, \quad T = \frac{2}{1 + \sqrt{0,303}} = 1,29.$$

(b) Despejemos las amplitudes de las Ecs. (1.14) y (1.15),

$$\xi'_{0r} = R \xi_{0i} = 0,29 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$\xi_{0r} = T \xi_{0i} = 1,29 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Note que, paradójicamente, la amplitud transmitida es mayor que la incidente. Esto no es imposible, pues no existe una *ley de conservación de la amplitud*. Cuando una onda elástica pasa a un medio de menor densidad, la amplitud aumenta. Esto explica en parte la vulnerabilidad de la Ciudad de México a los temblores de tierra, ya que se asienta sobre tierras húmedas.

(c) Las ondas transversales del ejemplo se deben al comportamiento del cobre y del aluminio como una cuerda, no como una barra; por esto apliquemos la Ec. 1.2 y no la Ec. 1.3,

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{T}{\pi \rho_1 r^2}} \\ &= \sqrt{\frac{100 \text{ N}}{\pi (8900 \text{ kg/m}^3) (5 \times 10^{-4} \text{ m})^2}} \\ &= 119,6 \text{ m/s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{T}{\pi \rho_2 r^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{100 \text{ N}}{\pi (2700 \text{ kg/m}^3) (5 \times 10^{-4} \text{ m})^2}} \\
 &= 217,2 \text{ m/s}.
 \end{aligned}$$

Estas cantidades son mucho menores que la rapidez de las ondas que también transmiten el cobre y el aluminio, Ec. 1.3, que es cerca de 3000 m/s.

(d) La frecuencia no varía con los cambios de medio, pero la velocidad sí ya que depende de las propiedades del medio,

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{\nu} = \frac{119,6}{220} \approx 0,544 \text{ m},$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{\nu} = \frac{217,2}{220} \approx 0,987 \text{ m}.$$

(e) Para las 3 ondas utilicemos la función de onda  $\xi = \xi_0 \sin 2\pi(t/P \pm x/\lambda)$ , (longitud en m y tiempo en s)

$$\xi_i(x, t) = 10^{-3} \sin 2\pi \left( 220t - \frac{x}{0,544} \right),$$

$$\xi_r'(x, t) = 0,29 \times 10^{-3} \sin 2\pi \left( 220t + \frac{x}{0,544} \right),$$

$$\xi_r(x, t) = 1,29 \times 10^{-3} \sin 2\pi \left( 220t - \frac{x}{0,987} \right).$$

Como las ondas incidente y transmitida se propagan hacia la derecha, se ha escrito el signo  $(-)$  dentro del paréntesis de sus respectivas funciones; la onda reflejada se propaga hacia la izquierda, y se debe escribir el signo  $(+)$ .

(f) Según la Ec. 1.12,

$$\begin{aligned}
 I_i &= \frac{1}{2} v_1 \rho_1 (2\pi\nu)^2 \xi_{0i}^2 \\
 &= \frac{1}{2} (119,6 \text{ m/s}) (8900 \text{ kg/m}^3) (440\pi \text{ s}^{-1})^2 (10^{-3} \text{ m})^2 \\
 &= 1,017 \times 10^6 \text{ W/m}^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_r' &= \frac{1}{2} v_1 \rho_1 (2\pi\nu)^2 \xi_{0r}'^2 \\
 &= \frac{1}{2} (119,6 \text{ m/s}) (8900 \text{ kg/m}^3) \\
 &\quad \times (440\pi \text{ s}^{-1})^2 (0,29 \times 10^{-3} \text{ m})^2 \\
 &= 0,085 \times 10^6 \text{ W/m}^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_r &= \frac{1}{2} v_2 \rho_2 (2\pi\nu)^2 \xi_{0r}^2 \\
 &= \frac{1}{2} (217,2 \text{ m/s}) (2700 \text{ kg/m}^3) \\
 &\quad \times (440\pi \text{ s}^{-1})^2 (1,29 \times 10^{-3} \text{ m})^2 \\
 &= 0,932 \times 10^6 \text{ W/m}^2.
 \end{aligned}$$

El área transversal es  $A = \pi r^2 = \pi (5 \times 10^{-4})^2 =$

$7,85 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ . La potencia de las ondas es

$$\begin{aligned}
 P_i &= I_i A = (1,017 \times 10^6 \text{ W/m}^2) (7,85 \times 10^{-7} \text{ m}^2) \\
 &= 0,798 \text{ W},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_r' &= I_r' A = (0,085 \times 10^6 \text{ W/m}^2) (7,85 \times 10^{-7} \text{ m}^2) \\
 &= 0,067 \text{ W},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_r &= I_r A = (0,932 \times 10^6 \text{ W/m}^2) (7,85 \times 10^{-7} \text{ m}^2) \\
 &= 0,731 \text{ W}.
 \end{aligned}$$

► **Problema 1.4.** Demuestre que en una cuerda compuesta la amplitud de la onda transmitida es mayor que la de la onda incidente, si al cambiar de medio la densidad lineal de masa disminuye.

**Ejemplo 1.16.** Una fuente puntual  $S$  emite ondas en un medio homogéneo, con una potencia promedio constante  $P$ . Halle la dependencia de la intensidad y la amplitud de las ondas respecto a la distancia  $r$  a la fuente.

**Solución.** Suponiendo que dentro de una esfera de radio  $r$  centrada en  $S$  no hay otras fuentes ni sumideros de energía, la intensidad en cualquier punto de la superficie de la esfera es

$$I(r) = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}. \quad (1.36)$$

Vemos así que la intensidad depende de  $1/r^2$ ,

$$I \propto 1/r^2,$$

siendo la constante de proporcionalidad igual a  $P/4\pi$ .

Igualando las Ecs. (1.12) y (1.36) se demuestra que la amplitud depende de  $1/r$ ,

$$\xi_0 \propto 1/r;$$

la constante de proporcionalidad es  $\sqrt{P/(2\pi\nu\rho\omega^2)}$ . La relación entre  $\xi_0$  y  $r$  es más compleja que  $\xi_0 \propto 1/r$ , pero esta es una buena aproximación en puntos alejados de la fuente, o sea cuando  $r \gg \lambda$ .

**Ejemplo 1.17.** Un observador está a una distancia  $D$  de una fuente puntual que emite ondas esféricas. Cuando se acerca 50 m a la fuente la intensidad se duplica. Halle  $D$ .

**Solución.** Según los datos del problema,  $I(D - 50) = 2I(D)$ . Sea  $P$  la potencia de la fuente. La anterior ecuación es, según la Ec. 1.36,

$$\frac{P}{4\pi(D - 50)^2} = 2 \frac{P}{4\pi D^2}.$$

Despejando, obtenemos  $D = 170,7 \text{ m}$ .

**Ejemplo 1.18.** Las ondas en una cuerda se describen con la función vectorial de onda (longitud en m, tiempo en s)

$$\xi(\mathbf{r}, t) = 10^{-3} \cos(3\pi x + 4\pi y) \sin(10\,000\pi t) \mathbf{u}_z. \quad (1.37)$$

La cuerda, de extremos  $A$  y  $B$ , mide 50 cm y su densidad es 4 g/cm<sup>3</sup>; el extremo  $A$  está en el origen. (a) Ubique la cuerda en un sistema cartesiano. (b) ¿Es viajera o estacionaria la onda? (c) ¿Es longitudinal o transversal? ¿Cómo está polarizada? (d) Halle si los extremos de la cuerda son fijos o libres. (e) Halle la rapidez de propagación de las ondas viajeras. (f) Encuentre la frecuencia fundamental y el orden del armónico descrito por la Ec. 1.37.

*Solución.*

(a) Hallemos la dirección de propagación. En la Ec. 1.37 el coeficiente de  $x$  es  $k_x$ , el de  $y$  es  $k_y$  y el de  $z$  es  $k_z$ ,

$$k_x = 3\pi \text{ m}^{-1}, \quad k_y = 4\pi \text{ m}^{-1}, \quad k_z = 0.$$

La magnitud del vector de propagación es, Ec. 1.17,

$$k = \sqrt{\pi^2(3^2 + 4^2 + 0^2)} \text{ m}^{-1} = 5\pi \text{ m}^{-1}.$$

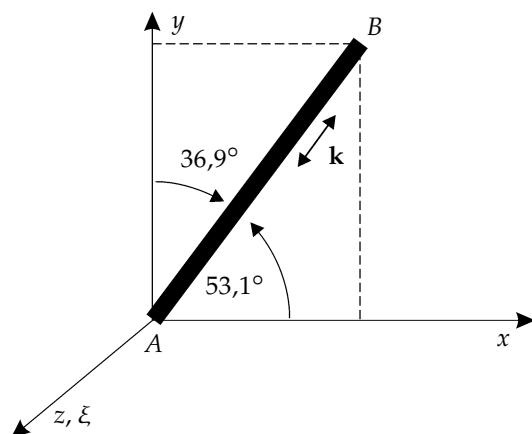
El vector de propagación  $\mathbf{k}$  no tiene componente  $z$ , lo que quiere decir que las ondas viajeras (una con vector  $\mathbf{k}$  y la otra con vector  $-\mathbf{k}$ ) que dan lugar a la onda estacionaria se propagan paralelo al plano  $xy$ , con ángulos  $\alpha$  (con el eje  $x$ ),  $\beta$  (con el eje  $y$ ) y  $\gamma$  (con el eje  $z$ ) iguales a, según las Ecs. (1.16) y (1.17),

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{k_x}{k} = \cos^{-1} \frac{3\pi \text{ m}^{-1}}{5\pi \text{ m}^{-1}} = \cos^{-1} \frac{3}{5} = 53,13^\circ,$$

$$\beta = \cos^{-1} \frac{k_y}{k} = \cos^{-1} \frac{4\pi \text{ m}^{-1}}{5\pi \text{ m}^{-1}} = \cos^{-1} \frac{4}{5} = 36,87^\circ,$$

$$\gamma = \cos^{-1} \frac{k_z}{k} = \cos^{-1} \frac{0 \text{ m}^{-1}}{5\pi \text{ m}^{-1}} = \cos^{-1} 0 = 90,00^\circ.$$

( $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  y  $\cos \gamma$  se denominan *los cosenos directores* de  $\mathbf{k}$ ). La orientación de la cuerda es la de  $\mathbf{k}$ , pues la onda se propaga a lo largo de ella. En la Fig. 1.12 se ubica la cuerda con estos ángulos y con el extremo  $A$  en el origen.



**Figura 1.12** Ondas en una cuerda.

(b) En 3 dimensiones,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t$ . En este ejemplo,  $k_z = 0$  y  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_x x + k_y y - \omega t$ . La Ec. 1.37 no es una función de  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ , por lo tanto no es una onda viajera. Además, en una onda viajera la amplitud es constante, mientras que esa función tiene una amplitud  $f(x) = 10^{-3} \cos(3\pi x + 4\pi y)$  que depende de la posición del punto  $(x, y, 0)$  de la cuerda.

(c) Según la Ec. 1.37, las vibraciones son paralelas al vector unitario  $\mathbf{u}_z$ , esto es, son perpendiculares a la misma cuerda o a  $\mathbf{k}$ :  $\xi \perp \mathbf{k}$ , y esta perpendicularidad es lo que define a una onda transversal. La polarización es lineal pues  $\xi$  siempre es paralelo a  $z$ .

(d) Si en todo instante un extremo no vibra, es un nodo de desplazamiento o extremo fijo; si vibra es un extremo libre o antinodo. Para evaluar a  $\xi$ , encontremos las coordenadas de los extremos  $A$  y  $B$  ( $L = 0,5$  m es la longitud de la cuerda),

$$x_A = 0, \quad y_A = 0, \quad z_A = 0;$$

$$x_B = L \cos \alpha = \frac{3}{5} L = 0,3 \text{ m},$$

$$y_B = L \cos \beta = \frac{4}{5} L = 0,4 \text{ m},$$

$$z_B = L \cos \gamma = 0 \times L = 0.$$

Reemplacemos en la Ec. 1.37,

$$\begin{aligned} \xi_A(t) &= 10^{-3} \cos(3\pi \times 0 + 4\pi \times 0) \sin(10\,000\pi t) \mathbf{u}_z \\ &= 10^{-3} \sin(10\,000\pi t) \mathbf{u}_z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_B(t) &= 10^{-3} \cos(3\pi \times 0,3 + 4\pi \times 0,4) \\ &\quad \times \sin(10\,000\pi t) \mathbf{u}_z \\ &= 10^{-3} \cos(2,5\pi) \sin(10\,000\pi t) \mathbf{u}_z \\ &= 10^{-3} \times 0 \times \sin(10\,000\pi t) \mathbf{u}_z = 0. \end{aligned}$$

$A$  se comporta como un extremo libre pues está vibrando;  $B$  no vibra y es un extremo fijo.

(e) Las ondas viajeras que se propagan con sentidos opuestos y dan lugar a la onda descrita por la Ec. 1.37 lo hacen con rapidez (Ec. 1.17)  $v = \omega/k$ . La frecuencia angular es el coeficiente del tiempo,  $\omega = 10\,000\pi \text{ s}^{-1}$ . La rapidez es

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{10\,000\pi \text{ s}^{-1}}{5\pi \text{ m}^{-1}} = 2000 \text{ m/s}.$$

(f) Las frecuencias propias las da la Ec. 1.20, pues un tubo abierto-cerrado es análogo a una cuerda con extremos libre-fijo. La frecuencia fundamental  $\nu_f$  se obtiene



con  $n = 0$ , ya que el generador de impares se ha escrito como  $2n + 1$ .

$$\nu_f = \frac{v}{4L} = \frac{2000 \text{ m/s}}{4 \times 0,5 \text{ m}} = 1000 \text{ s}^{-1} = 1000 \text{ Hz}.$$

El armónico descrito por la Ec. 1.37 tiene una frecuencia

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\,000\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi \text{ rad}} = 5000 \text{ Hz}.$$

Por definición, si  $\nu/\nu_f$  es un entero, a  $\nu/\nu_f$  se le denomina el *orden del armónico*; esta definición implica que el modo fundamental siempre es el armónico de orden 1.

$$\text{Orden del armónico} = \frac{5000 \text{ Hz}}{1000 \text{ Hz}} = 5.$$

**Ejemplo 1.19.** Un parlante que emite un sonido de 261.6 Hz (nota *do* central) está al frente del extremo abierto de un tubo (Fig. 1.13a). La longitud  $L$  de la columna de aire se puede cambiar moviendo el pistón que sobresale a la derecha del tubo. (a) Halle la longitud de las 3 primeras columnas de aire que entran en resonancia con el parlante. (b) Mediante un esquema, muestre en cada caso la distribución de amplitud y la posición de los nodos y antinodos de desplazamiento.

Suponga una temperatura de 25,0 °C. (En el Laboratorio de Física III esta experiencia se hace con una frecuencia mayor, un tubo de  $\sim 5$  cm de diámetro y un  $L$  máximo de 90 cm).

*Solución.*

(a) La rapidez del sonido es, según la Ec. 1.9,  $v = 20\sqrt{25,0 + 273,2} = 345,4 \text{ m/s}$ .

Se presenta resonancia cuando una de las frecuencias propias de la columna de aire (la frecuencia fundamental o uno de los sobretonos) entre en resonancia con la frecuencia externa ( $\nu_{\text{ext}}$ ) del parlante. Según la Ec. 1.20,

$$\nu_{\text{ext}} = (2n + 1) \frac{v}{4L}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Despejemos y hallemos las 3 primeras longitudes ( $n = 0, 1, 2$ ),

$$\begin{aligned} L &= (2n + 1) \frac{v}{4\nu_{\text{ext}}} = (2n + 1) \frac{345,4 \text{ m/s}}{4 \times 261,6 \text{ s}^{-1}} \\ &= (2n + 1) \times 0,33 \text{ m} = \begin{cases} 0,33 \text{ m}, & n = 0; \\ 0,99 \text{ m}, & n = 1; \\ 1,65 \text{ m}, & n = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Si queremos expresar a  $L$  en términos de la longitud de onda del sonido del parlante  $\lambda_{\text{ext}}$ , reemplacemos  $\nu_{\text{ext}} = v/\lambda_{\text{ext}}$  en la Ec. 1.20,

$$\frac{v}{\lambda_{\text{ext}}} = (2n + 1) \frac{v}{4L}.$$

Cancelemos  $v$  y despejemos  $L$ ,

$$L = (2n + 1) \frac{\lambda_{\text{ext}}}{4} = \begin{cases} \lambda_{\text{ext}}/4, & n = 0; \\ 3\lambda_{\text{ext}}/4, & n = 1; \\ 5\lambda_{\text{ext}}/4, & n = 2. \end{cases}$$

(b) Con  $n = 0$  se obtiene el modo fundamental o armónico de orden 1 (Fig. 1.13b); en la figura vemos que  $L = \lambda_{\text{ext}}/4$ . Con  $n = 1$  se obtiene el primer sobretono o armónico de orden 3 (Fig. 1.13c),  $L = \lambda_{\text{ext}}/4 + \lambda_{\text{ext}}/2 = 3\lambda_{\text{ext}}/4$ . Con  $n = 2$  se obtiene el segundo sobretono o armónico de orden 5 (Fig. 1.13d),  $L = \lambda_{\text{ext}}/4 + \lambda_{\text{ext}}/2 + \lambda_{\text{ext}}/2 = 5\lambda_{\text{ext}}/4$ .

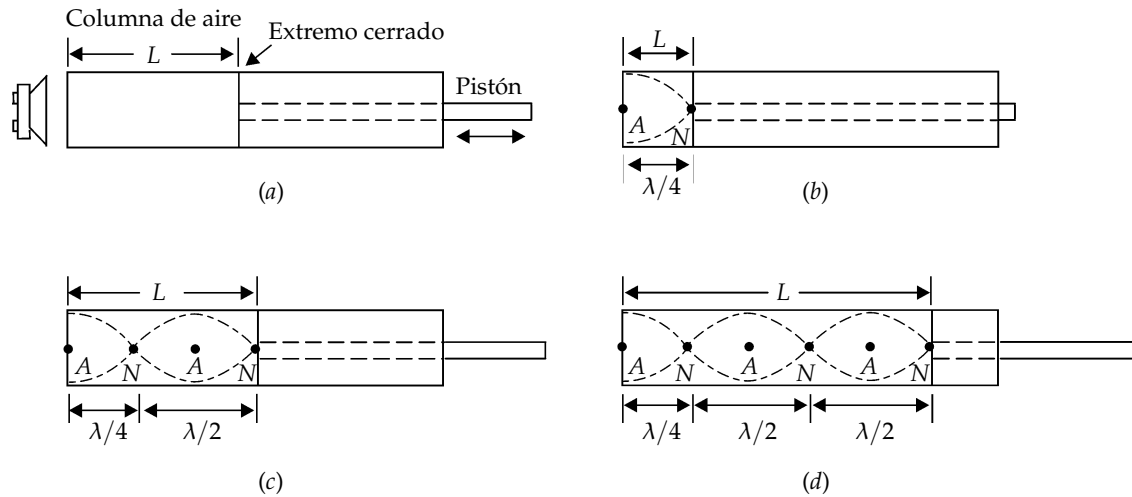
La  $A$  (antinodo de desplazamiento) en estas figuras marca la posición de un plano transversal al tubo cuyos puntos vibran con la máxima amplitud; la  $N$  (nodo de desplazamiento) marca un plano transversal cuyos puntos están en reposo. En los antinodos la variación de  $\xi$  es máxima, y  $\partial\xi/\partial x = 0$ . Esto en la Ec. 1.6 da que  $p(A) = p_0$ : la presión en los antinodos de desplazamiento es  $p_0$ , y generalmente  $p_0$  es la presión atmosférica. La presión en  $A$  no cambia; los antinodos de desplazamientos son nodos de presión, lo que ya se sabe cuando se dice que las ondas de presión y de desplazamiento están desfasadas  $90^\circ$  ó  $\lambda/4$ .

Cuando la columna de aire mide 33 cm el parlante entra en resonancia con el modo fundamental de la columna; cuando mide 99 cm entra en resonancia con el tercer armónico, pues la frecuencia fundamental cambia a  $v/4L = 345,4/4 \times 0,99 = 87,2 \text{ Hz}$ , y la  $\nu_{\text{ext}}$  de 261.6 Hz es exactamente 3 veces 87.2 Hz. (Cuando mide 1.65 m, ¿por qué la resonancia es con el armónico de orden 5?)

Un observador cercano al tubo distingue fácilmente cuando el pistón pasa por las resonancias, pues en ellas el tubo absorbe mucha energía sonora proveniente del parlante, el aire en su interior adquiere una gran amplitud de vibración, y el observador escucha una importante variación del volumen.

Debido principalmente a que el extremo abierto radia energía hacia el exterior, *el antinodo de desplazamiento que se espera allí se desplaza cierta cantidad fuera del tubo*, llamada *corrección de extremo abierto*  $\epsilon$ . Predecir su valor es un problema complejo que depende de las características físicas del parlante, de la columna de aire y del espacio entre el parlante y el tubo.

Si el generador de impares  $(2n + 1)$  se hubiera escrito como  $(2n - 1)$ , o de una forma extraña como  $(2n + 1219)$ , a los armónicos hallados, aunque seguirían siendo de orden 1, 3 y 5 respectivamente, les corresponderían unos valores distintos de  $n$ . En caso de que el generador de impares, por alguna razón, se hubiera escrito como  $(2n + 1219)$ , ¿qué  $n$  le correspondería al modo fundamental y a los armónicos de orden 3 y 5?

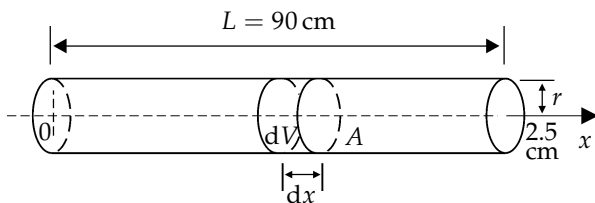


**Figura 1.13** Resonancia entre una columna de aire y un parlante.

**Ejemplo 1.20.** En el interior de un tubo de 90 cm de longitud y sección circular de 2.5 cm de radio hay una onda sonora con longitud de onda de 1.2 m (Fig. 1.14). La función de onda es (longitud en m, tiempo en s)

$$\xi = 10^{-7} \cos kx \sin 586\pi t. \quad (1.38)$$

La densidad del aire es  $1,2 \text{ kg/m}^3$ . Halle la energía sonora promedio en el interior del tubo.



**Figura 1.14** La densidad de energía de una onda estacionaria depende de  $x$ .

**Solución.** La energía es igual al producto del número de joules en cada metro cúbico (densidad de energía  $\epsilon$ ) por el número de metros cúbicos (volumen  $V$ ). La densidad  $\epsilon$  (Ec. 1.11) depende de la amplitud y, como en el tubo existe una onda estacionaria y no viajera, se presenta la complicación de que la amplitud de las vibraciones del aire depende de la posición en el interior del tubo. La amplitud  $f(x)$  es el coeficiente de la función que da la variación temporal; según la Ec. 1.38 es

$$f(x) = 10^{-7} \text{ m} \cos kx.$$

En la Ec. 1.11 se debe reemplazar a  $\xi_0$  por  $f(x)$ .

Como la amplitud depende de  $x$ , debemos evaluar la energía en un diferencial de volumen y luego integrar. En la figura vemos que  $dV = Adx = \pi r^2 dx$ .

La energía en un  $dV$  es, por definición de densidad de energía,  $dE = \epsilon dV$ . La energía total es la integral sobre el volumen del tubo,

$$\begin{aligned} E &= \int_V \epsilon dV = \int_0^L \frac{1}{2} \rho \omega^2 f^2(x) \pi r^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \pi \rho \omega^2 r^2 \int_0^L f^2(x) dx \\ &= \frac{10^{-14} \text{ m}^2}{2} \pi \rho \omega^2 r^2 \int_0^L \cos^2 kx dx. \end{aligned}$$

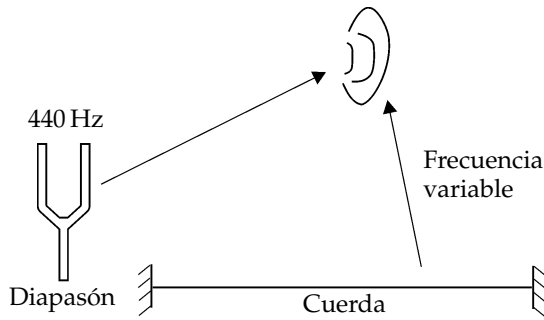
La integral da  $L/2$ ,

$$\begin{aligned} E &= \frac{10^{-14} \text{ m}^2}{4} \pi \rho \omega^2 r^2 L \\ &= \frac{10^{-14} \text{ m}^2}{4} \pi (1,2 \text{ kg/m}^3) (586\pi \text{ s}^{-1})^2 \\ &\quad \times (0,025 \text{ m})^2 (0,9 \text{ m}) \\ &= 1,8 \times 10^{-11} \text{ J}. \end{aligned}$$

Es una energía extraordinariamente pequeña, aunque los datos utilizados son reales.

**Nota:** La frecuencia del ejemplo,  $\nu = \omega/2\pi = 586\pi/2\pi = 293 \text{ Hz}$ , corresponde a una nota *re*.

**Ejemplo 1.21.** Un diapason *la* de 440 Hz y una cuerda de una guitarra se hacen sonar simultáneamente (Fig. 1.15). Se escuchan 15 pulsos por segundo. Halle en qué porcentaje se debe cambiar la tensión de la cuerda para afinarla, esto es, para que no se escuchen pulsos.



**Figura 1.15** Se escuchan pulsos si  $\nu_{\text{cuerda}} \neq 440 \text{ Hz}$ .

**Solución.** (El sonido que se escucha de la guitarra proviene casi en su totalidad de la caja de la guitarra y no directamente de la cuerda, como erróneamente puede sugerir la figura. El diapasón también debe ir sobre una caja de resonancia para que dé un buen volumen). Sean  $\nu_d$  la frecuencia del diapasón,  $\nu_n$  la de la cuerda y  $\nu_p$  la de los pulsos.

Al golpear un diapasón se producen varias frecuencias, pero solo la fundamental sobrevive un tiempo mucho mayor que los sobretonos (ningún sobretono de un diapasón es armónico) y así la frecuencia del diapasón es única. Con una cuerda es diferente: al excitarla, la fundamental y varios sobretonos, que sí son armónicos, tienen amplitudes y tiempos de duración similares. Si uno de los armónicos de orden  $n$  tiene su frecuencia cercana a  $\nu_d$ , debido a la interferencia de ese armónico con el sonido del diapasón se escuchan pulsos de frecuencia

$$\nu_p = \nu_n - \nu_d.$$

Ninguna frecuencia es negativa; si en esta ecuación  $\nu_p < 0$ , solo quiere decir que  $\nu_n < \nu_d$ ; en caso contrario,  $\nu_n > \nu_d$ . Con los datos del ejemplo no sabemos cual frecuencia es mayor, por lo que lo resolvemos para ambos casos.

Según las Ecs. (1.19) y (1.21),

$$\pm \nu_p = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} - \nu_d.$$

Despejemos,

$$\frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \nu_d \pm \nu_p. \quad (1.39)$$

Para que no se presenten pulsos la tensión se debe cambiar hasta que  $\nu_n = \nu_d$ . Si  $\alpha$  es la fracción del cambio, la nueva tensión es  $T + \alpha T$  y

$$\begin{aligned} \nu_p = 0 &= \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T + \alpha T}{\mu}} - \nu_d = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T(1 + \alpha)}{\mu}} - \nu_d \\ &= \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \sqrt{1 + \alpha} - \nu_d. \end{aligned}$$

Reemplacemos la Ec. 1.39 en la anterior ecuación,

$$0 = (\nu_d \pm \nu_p) \sqrt{1 + \alpha} - \nu_d.$$

Los datos del ejemplo son  $\nu_d = 440 \text{ Hz}$  y  $\nu_p = 15 \text{ Hz}$ . Despejemos la fracción buscada  $\alpha$  y reemplacemos los datos,

$$\alpha = \left( \frac{\nu_d}{\nu_d \pm \nu_p} \right)^2 - 1 = \begin{cases} 0,072, & \nu_n < \nu_d; \\ -0,065, & \nu_n > \nu_d. \end{cases}$$

En términos de porcentaje, si la cuerda está destemplada hay que incrementar la tensión en  $100\alpha = 7,2\%$  para que la frecuencia del armónico aumente de 425 a 440 Hz; si la cuerda está sobretemplada, hay que disminuir la tensión en  $100\alpha = 6,5\%$  para que la frecuencia del armónico disminuya de 455 a 440 Hz. El signo  $(-)$  en el valor  $\alpha = -0,065$  quiere decir precisamente que es necesario mermar la tensión.

Note que en la solución no fue necesario conocer los valores de  $n$ ,  $L$ ,  $T$  ni  $\mu$ .

**Ejemplo 1.22.** Una fuente sonora  $F$ , que se mueve a  $60 \text{ km/h}$  en línea recta (Fig. 1.16a), emite un sonido de  $440 \text{ Hz}$  —nota la central—. Un observador  $O$  se mueve hacia  $F$  a  $40 \text{ km/h}$  sobre la misma línea. La rapidez del sonido en el aire es  $340 \text{ m/s}$ . Halle la frecuencia con que las ondas reflejadas por  $O$  regresan a  $F$ .

**Solución.** Se sobreentiende que todas las velocidades son con respecto a un observador en reposo en el medio, que en este caso es el aire. Las diferentes cantidades de la Ec. 1.18 las vamos a tratar algebráicamente, es decir, como cantidades que intrínsecamente pueden ser positivas, negativas o cero.

Dividamos la solución en dos etapas: (a) Hallar la frecuencia con que las ondas llegan a  $O$  y (b) hallar la frecuencia con que las ondas reflejadas por  $O$  regresan a  $F$ .

(a) La fuente es  $F$  y se mueve hacia la derecha,  $v_S = +60 \text{ km/h} = +16,7 \text{ m/s}$ ; el observador es  $O$  y se mueve hacia la izquierda,  $v_O = -40 \text{ km/h} = -11,1 \text{ m/s}$ ; el sonido percibido se propaga hacia la derecha,  $v = +340 \text{ m/s}$ ; la frecuencia emitida es  $\nu = 440 \text{ Hz}$  (Fig. 1.16a). Reemplacemos en la Ec. 1.18 para hallar la frecuencia con que las ondas llegan a  $O$ ,

$$\nu' = 440 \text{ Hz} \frac{(+340 \text{ m/s}) - (-11,1 \text{ m/s})}{(+340 \text{ m/s}) - (+16,7 \text{ m/s})} = 477,8 \text{ Hz}.$$

La frecuencia aumenta puesto que  $\overline{FO}$  disminuye.

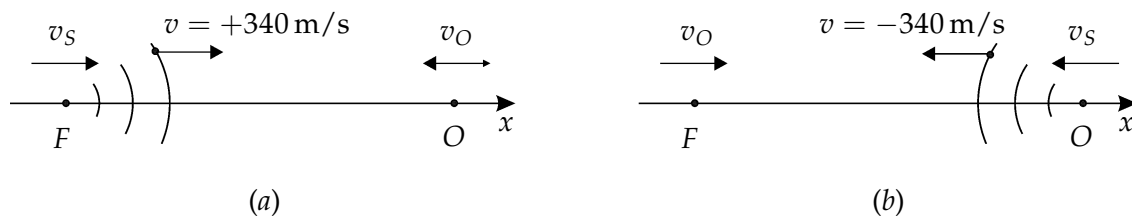
(b) La frecuencia de las ondas no cambia por reflexión (ni por transmisión), por lo tanto  $O$  se convierte en una nueva fuente que emite con  $\nu = 477,8 \text{ Hz}$  y se mueve hacia la izquierda con  $v_S = -11,1 \text{ m/s}$ ; el nuevo observador es  $F$  que se mueve hacia la derecha con

$v_O = +16,7 \text{ m/s}$ ; el sonido percibido por  $F$  se propaga hacia la izquierda con  $v = -340 \text{ m/s}$  (Fig. 1.16b). Reemplazando en la Ec. 1.18, obtenemos la frecuencia de las ondas que regresan a  $F$ ,

$$\nu' = 477,8 \text{ Hz} \frac{(-340 \text{ m/s}) - (+16,7 \text{ m/s})}{(-340 \text{ m/s}) - (-11,1 \text{ m/s})} = 518,2 \text{ Hz}.$$

Esta frecuencia es próxima a la de *undo* aunque el sonido emitido inicialmente sea un *la*.

*Nota histórica:* A comienzos del siglo XIX el estudio de las estrellas dobles indicaba que las frecuencias de la luz emitida por una de las estrellas eran mayores que las de la otra. Doppler, en 1842, lo explicó como un efecto de un acercamiento de una de ellas a la Tierra y un alejamiento de la otra. Dijo que este cambio también lo debía presentar el sonido. Ballott lo comprobó en 1845 con músicos en una estación de tren.\*



**Figura 1.16** Efecto Doppler. La frecuencia percibida es diferente de la emitida si la distancia entre la fuente y el observador cambia.



\*Robert Beyer, *Sounds of Our Times*, American Institute of Physics, 1998, pp. 42-44

# 2

## ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Recuerde que



Es indispensable, cuando se escribe a mano, diferenciar entre vectores y escalares escribiendo una flecha sobre los vectores, p. ej.,  $\vec{F}$ ; cuando el vector es unitario, se debe escribir, en su lugar, un 'gorro', p. ej.,  $\hat{u}_x$ ,  $\hat{k}$ .

A continuación resolvemos dos ejemplos con el propósito de lograr alguna familiaridad con el operador  $\nabla$ .

**Ejemplo 2.1.** Halle  $\nabla \times \mathbf{r}$ .

*Solución.* A la operación  $\nabla \times$  se le llama el *rotacional* o *rot*.

$\nabla = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$ , y  $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z$ ; por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{r} &\equiv \nabla \times \mathbf{r} \\ &= \left( \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z) \\ &= \mathbf{u}_z \frac{\partial y}{\partial x} - \mathbf{u}_y \frac{\partial z}{\partial x} - \mathbf{u}_z \frac{\partial x}{\partial y} + \mathbf{u}_x \frac{\partial z}{\partial y} + \mathbf{u}_y \frac{\partial x}{\partial z} - \mathbf{u}_x \frac{\partial y}{\partial z} \\ &= 0 + \dots + 0 = 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.2.** Halle  $\nabla \cdot \mathbf{r}$ .

*Solución.* A la operación  $\nabla \cdot$  se le llama la *divergencia* o *div*.

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{r} &\equiv \nabla \cdot \mathbf{r} \\ &= \left( \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

◀▶ **Problema 2.1.** Utilizando la expresión para el gradiente en coordenadas cartesianas, muestre que

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

◀▶ **Problema 2.2.** Muestre que las dimensiones de  $\nabla$  son  $L^{-1}$  y de  $\nabla^2$  son  $L^{-2}$ .

### 2.1. Las Ecuaciones de Onda en el Vacío

Las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t)/\epsilon_0, & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

En el vacío, o sea aplicadas en puntos del espacio sin cargas ( $\rho = 0$ ), ni corrientes ( $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ), son

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Apliquemos el operador rotacional a ambos miembros de la Ec. (2.3),

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right).$$

El miembro izquierdo de esta ecuación nos dice que derivemos primero respecto al tiempo a  $\mathbf{B}$  y al vector resultante lo derivemos espacialmente con el operador rotacional,  $\nabla \times$ . Como las derivadas temporal y espacial conmutan,  $\nabla \times (\partial \mathbf{B} / \partial t) = \partial (\nabla \times \mathbf{B}) / \partial t$ , y

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}).$$

Además,  $\mathbf{E}$  cumple la identidad\*  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ . Al igualar las dos últimas ecuaciones,  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -(\partial / \partial t)(\nabla \times \mathbf{B})$ . Introduciendo las Ecs. (2.1) y (2.4), obtenemos  $-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$ . Llegamos así a la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

Para una onda que se propague sólo en la dirección  $x$ ,  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2$  y la Ec. 2.5 adopta la forma

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2}. \quad (2.6)$$

Reemplazando en esta ecuación a  $\mathbf{E}$  por  $\xi$  y a  $1/(\mu_0 \epsilon_0)$  por  $T/\mu$ , obtenemos la ecuación para las ondas de desplazamiento  $\xi$  en una cuerda. De las Ecs. (2.5) o (2.6) concluimos que  $\mathbf{E}$  en el vacío se propaga ondulatoriamente con velocidad  $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . Esta velocidad, conocida con la letra  $c$ , es una de las constantes fundamentales de la naturaleza. Reemplazando los valores de la permeabilidad magnética  $\mu_0$  y de la permitividad eléctrica del vacío  $\epsilon_0$ , en unidades SI, obtenemos  $c = 1/\sqrt{1,2566 \times 10^{-6} \times 8,8544 \times 10^{-12}} = 299\,790 \text{ km/s}$ . En resumen,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 300\,000 \text{ km/s}.$$

$\mathbf{B}$  en el vacío también cumple la ecuación de onda,

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

◀► **Problema 2.3.** Halle la Ec. (2.7) a partir de las ecuaciones de Maxwell. ¿Con qué velocidad se propaga  $\mathbf{B}$  en el vacío? Ayuda: Aplique el operador rot (o sea  $\nabla \times$ ) a la Ec. (2.4), y proceda de manera análoga a como se hizo para llegar a la Ec. (2.5).

\*Justificación. El producto triple vectorial de 3 funciones vectoriales  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  es  $\mathbf{A} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}$ . Si asociamos a  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$  con  $\nabla$ , la identidad toma la forma  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{D}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{D}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{D} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \nabla^2 \mathbf{D}$ . Hemos reemplazado a  $\nabla \cdot \nabla$  por el operador  $\nabla^2$ ; este operador se llama el *laplaciano*. Sea  $\mathbf{E}$  el vector  $\mathbf{D}$ .

## 2.2. Algunos Comentarios a Raíz de las Ecuaciones de Onda

En el año de 1873 J. K. Maxwell (1831-1879) publicó\* *A Treatise on Electricity and Magnetism*. En este libro halló, con la matemática y la física de la época, las ecuaciones de onda, y mostró que la velocidad esperada es muy próxima a la de la luz, que ya había sido medida con diferentes métodos.

Maxwell predijo: (a) a partir de la deducción de las ecuaciones de onda, la existencia de las ondas electromagnéticas; (b) que la velocidad de estas ondas es igual a la de la luz; y (c) debido a la igualdad entre la velocidad predicha de las ondas electromagnéticas y la velocidad de la luz, que la luz es una onda electromagnética. La predicción (c) implica que la luz, por ejemplo la producida por el filamento de un bombillo, debe provenir de las cargas eléctricas del filamento.

Antes de Maxwell la Óptica y el Electromagnetismo eran dos ramas independientes de la física, pero él con la predicción (c) convirtió a la óptica en un capítulo del electromagnetismo. Las predicciones (a) y (b) fueron comprobadas en el laboratorio antes de 1900.

Las ecuaciones de onda, tomadas textualmente del *Treatise*,\*\* son

$$K\mu \frac{d^2 F}{dt^2} + \nabla^2 F = 0,$$

$$K\mu \frac{d^2 G}{dt^2} + \nabla^2 G = 0,$$

$$K\mu \frac{d^2 H}{dt^2} + \nabla^2 H = 0.$$

$K$  es la permitividad  $\epsilon$ .  $F$ ,  $G$  y  $H$  son las componentes cartesianas del campo.

Notamos que Maxwell no utiliza el signo de derivada parcial  $\partial$ , aunque utiliza el signo de derivada total con el significado de derivada parcial. En lugar de una ecuación vectorial, escribe tres ecuaciones escalares. Maxwell no escribió textualmente las ecuaciones (2.5) y (2.7). Para hacerlo, y llegar a ellas como hicimos en la sección anterior, fue necesario desarrollar aún más de lo que Maxwell conocía, la notación y el análisis vectorial. Esto se debe principalmente a Oliver Heaviside (1850-1925) y J. Willard Gibbs (1839-1903).

Pero donde encontramos una mayor diferencia del trabajo de Maxwell respecto a nuestra época, no es en la presentación y el tratamiento matemáticos, del cual ya hemos señalado algunos aspectos, sino en el modelo físico.

Quienes pensaban en una onda, antes de 1905, siempre pensaban en un medio material cuya vibraciones, deformaciones, etc., constituían la onda. Los fenómenos se concebían mecánicamente, esto es, a la manera newtoniana: la manifestación de masas sometidas a fuerzas. Así, el

modelo físico de Maxwell para la propagación de la luz, por ejemplo del Sol a la Tierra, es similar a como se propagan las ondas en la superficie del agua: *Debe* existir un medio material, el *éter luminífero*, que llena todo el espacio, y cuyas deformaciones constituyen la luz. El éter en contacto con el Sol empieza a vibrar, y pone en movimiento al éter vecino, y así sucesivamente hasta que la perturbación, o sea la luz, llega a la Tierra. Al hacer oscilar, por ejemplo, un imán, se pensaba que ocurría lo mismo: se perturba el éter en contacto con el imán, y va avanzado una perturbación con velocidad  $c$ . Con la palabra *vacío* los físicos del siglo XIX quieren decir el espacio sólo con la presencia de éter; para nosotros la misma palabra tiene un significado diferente.

Los campos eléctricos y magnéticos son manifestación de perturbaciones del éter: el campo magnético en un punto es la manifestación de un remolino de éter, cuyo eje coincide con la dirección de  $\mathbf{B}$ . En un punto cercano hay otro remolino con el mismo sentido de rotación que el primero; entre ambos remolinos existen unos rodamientos, a la manera de balines, que permiten la igualdad entre los sentidos. El campo magnético se asocia con la energía cinética del remolino; en cambio, el campo eléctrico se asocia con cierta energía potencial. Dice en su *Treatise*\*\*\*: "La fuerza magnética es el efecto de la fuerza centrífuga de los remolinos." ("Magnetic force is the effect of the centrifugal force of the vortices.")

Se dedicaron, hasta bien entrado el siglo XX, ingentes esfuerzos a detectar el éter, pero fue imposible probar su existencia física (es de destacar, dentro de estos esfuerzos, los experimentos de Michelson y Morley). Lo que fallaba era el modelo: la luz no es una onda mecánica, no es la deformación de un medio, y para entenderla es necesario renunciar al éter (tan imprescindible para los físicos antes de 1905): La luz es un nuevo tipo de onda, que no requiere de un medio material. En 1905 Einstein postuló: La luz en el *vacío* se propaga con velocidad  $c$ , independiente de la velocidad del observador inercial que la mida o de la fuente que la produzca.

Es sorprendente que de Maxwell sobrevivan sus ecuaciones (aunque con una presentación matemática renovada), halladas con un modelo físico completamente descartado. Él no supo de la existencia de los electrones, descubiertos en 1897, ni de la estructura nuclear del átomo.

Con Newton (1642-1727) ocurre\*\*\*\* lo mismo que con Maxwell: una cosa es lo que nosotros conocemos como las leyes de Newton, cómo las aplicamos y cómo las escribimos; y otra cosa es lo que Newton pensó de sus leyes, cómo las aplicó, y cómo las escribió. En 1687 publicó los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*. En este libro se

\* J. K. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover Publications, New York, 1954. Dos tomos.

\*\* Op. cit., segundo tomo, p. 434.

\*\*\* Op. cit., segundo tomo, p. 470.

\*\*\*\* C. Truesdell, *Ensayos de Historia de la Mecánica*, Editorial Tecnos, Madrid, 1975.

propuso deducir toda la física a partir de unos axiomas, conocidos como *las tres leyes de Newton*. (Euclides quiso hacer lo mismo, pero en geometría, en el libro *Los Elementos*, cerca de 2000 años antes de Newton).

El lenguaje matemático de Newton y de su época es la geometría euclidiana. Las variables y parámetros (espacio, tiempo, velocidad, aceleración...) se representaban, desde hacia siglos, mediante segmentos de rectas o de curvas de una gráfica (o mediante ángulos, áreas...), no con letras ( $x$ ,  $t$ ,  $v$ ,  $a$ ...). La solución de los problemas era predominantemente gráfica, no con fórmulas analíticas. Fue necesario el trabajo intenso de otros matemáticos y físicos (especialmente de Euler) para llegar al método newtoniano de solución de un problema que, en el caso de una *partícula* de masa  $M$ , consiste en hallarle la trayectoria  $\mathbf{r}(t)$  a partir de la *segunda ley de Newton*: la fuerza resultante sobre  $M$  se iguala al producto de  $M$  por la aceleración  $\mathbf{a}$ , y se resuelve la ecuación diferencial resultante para despejar a  $\mathbf{r}(t)$ :

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} = M \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2}.$$

Las ecuaciones

$$F_x = Ma_x, \quad F_y = Ma_y, \quad F_z = Ma_z,$$

aplicables a *cualquier* sistema mecánico (una partícula, un sistema de partículas, un sólido, un medio elástico, un sistema continuo o discontinuo) solo fueron publicadas por Euler\* cerca de 1750. Newton nunca las escribió, y menos escribió la ecuación vectorial (conocida como la segunda ley de Newton para masa constante) equivalente a las tres anteriores ecuaciones escalares,  $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ . Sin embargo, el nombre de *leyes de Newton* es justo, pues son la presentación en un lenguaje matemático simbólico de los axiomas expuestos en su libro los *Principios*.

**Breve Historia de Algunos Símbolos.\*\*** La Tabla 2.1 muestra algunos símbolos, la fecha de su primera aparición escrita con el significado actual, y su autor.

La designación de puntos, líneas y planos por letras se ha llevado hasta Hipócrates de Quíos, ~440 a. n. e.

Los signos  $+$  y  $-$  fueron de uso general en aritmética solo en el siglo XIX.

El nombre de nabra para  $\nabla$  fue sugerido por Robertson Smith (~ 1860) a causa de la similitud del símbolo con un arpa asiria.

La notación actual tuvo aceptación general solo después de 1915.

Tabla 2.1

Símbolo	Fecha	Autor
—	S XII	al-Hassâr†
+, −	1489	Johann Widman
=	1557	Robert Recorde
<, >	1631	Thomas Harriot
×	1631	William Oughtred
∞	1655	Wallis
÷	1659	Johann Rahn
dx, ∫	1675	Leibniz
π	1706	William Jones
e	1728	Euler
i	1777	Euler
$\frac{\partial}{\partial}$	1786	Legendre
n!	1808	Christian Kramp
∇	1853	Hamilton
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	1881	Gibbs
∇·, ∇×	1881	Gibbs

† Como símbolo fraccional.

## 2.3. Solución en Ondas Planas de las Ecuaciones de Onda

Las Ecuaciones (2.5) y (2.7) admiten una solución de la forma  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct)$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct)$ , donde  $\mathbf{u}$  es un vector unitario en la dirección de avance de la onda.

*La fase contiene la dirección de propagación, puesto que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct$  forma parte de la fase; sin embargo, no contiene la dirección del campo.*

Puesto que el valor de  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct)$  en cierto instante especifica un plano,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son constantes en todos los puntos de ese plano, y a las mencionadas soluciones para  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  se les denomina *solución en ondas planas*. En este caso, como lo demostramos a continuación, necesariamente los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son ortogonales entre sí, lo que constituye una demostración de que las ondas electromagnéticas planas son transversales, esto es, no hay componente de los campos en la dirección  $\mathbf{u}$  de propagación.

\*A la ley  $d\mathbf{m} \mathbf{a} = d\mathbf{f}$  John Papastavridis la llama la ley de Newton-Euler en su libro *Analytical Mechanics*, p. 102, Oxford University Press, 2002

\*\*F. Kajory, *A History of Mathematical Notations*, Dover Publications, New York, 1993. (847 páginas).  
M. J. Crowe, *A History of Vector Analysis*, Dover Publications, New York, 1994.



Introduciendo la variable

$$s \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct = u'_x x + u'_y y + u'_z z - ct, \quad (2.8)$$

—estas  $u'_x$ ,  $u'_y$  y  $u'_z$  no son vectores unitarios, sino las componentes del vector unitario  $\mathbf{u}$ —podemos escribir  $\mathbf{E}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct) = \mathbf{E}(s) = \mathbf{u}_x E_x(s) + \mathbf{u}_y E_y(s) + \mathbf{u}_z E_z(s)$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct) = \mathbf{B}(s) = \mathbf{u}_x B_x(s) + \mathbf{u}_y B_y(s) + \mathbf{u}_z B_z(s)$ . Consideremos el vector  $\nabla \times \mathbf{E}(s)$ ,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el determinante, vemos que la componente  $x$  del vector  $(\nabla \times \mathbf{E})$  es

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z(s)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(s)}{\partial z} = \frac{\partial E_z(s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial E_y(s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z}.$$

Pero  $\partial E_z(s)/\partial s = dE_z(s)/ds$  y  $\partial E_y(s)/\partial s = dE_y(s)/ds$ ; según la Ec. (2.8),  $\partial s/\partial y = u'_y$  y  $\partial s/\partial z = u'_z$ . Reemplazando estas igualdades, obtenemos  $(\nabla \times \mathbf{E})_x = u'_y dE_z(s)/ds - u'_z dE_y(s)/ds$ . Examinando el miembro derecho de esta ecuación notamos que es una resta donde está ausente el índice  $x$ , mientras que  $y$  y  $z$  se alternan simétricamente, llevándonos esto a pensar que es la componente  $x$  del producto vectorial  $\mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds$ , o sea

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = (\mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds)_x.$$

Siguiendo un procedimiento análogo al del anterior párrafo, se demuestra que  $(\nabla \times \mathbf{E})_y = (\mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds)_y$  y  $(\nabla \times \mathbf{E})_z = (\mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds)_z$ ; por lo tanto,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds.$$

De igualar esta ecuación a la Ec. (2.3) resulta  $\mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds = -\partial \mathbf{B}(s)/\partial t$ . Derivando en cadena,  $\partial \mathbf{B}(s)/\partial t = \partial \mathbf{B}(s)/\partial s \cdot \partial s/\partial t$ . Pero  $\partial \mathbf{B}(s)/\partial s = d\mathbf{B}/ds$  y  $\partial s/\partial t = -c$  [vea la Ec. (2.8)]; por lo tanto,  $\partial \mathbf{B}(s)/\partial t = -c d\mathbf{B}/ds$ . O sea que  $\mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds = -(-c) d\mathbf{B}/ds$ . Eliminando  $ds$  obtenemos  $\mathbf{u} \times d\mathbf{E} = c d\mathbf{B}$ . Integrando,  $\mathbf{u} \times \int d\mathbf{E} = c \int d\mathbf{B}$ :  $\mathbf{u} \times \mathbf{E} = c\mathbf{B}$ . Multiplicando por el número de onda  $k$  y recordando que  $k\mathbf{u} = \mathbf{k}$  y  $kc = \omega$ , llegamos a  $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$ . Despejando  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

Esta ecuación nos da información útil: por propiedad del producto vectorial,  $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$  y  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ . El campo  $\mathbf{B}$  es transversal por ser perpendicular a la dirección de  $\mathbf{k}$ , que es la de avance de la onda:  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ . Además, si  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  también vale cero: en el punto  $\mathbf{r}$  y en el instante  $t$  los campos eléctrico y magnético están en fase o en contrafase.

---

\*Justificación. Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$  dos vectores, y  $\mathbf{D}$  su producto vectorial; entonces  $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$ . Asociamos a  $\mathbf{A}$  con  $\nabla$  y a  $\mathbf{C}$  con  $\mathbf{E}$ .

También se puede demostrar que

$$\mathbf{E} = -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{c^2}{\omega} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Según esta ecuación,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ : el campo eléctrico es transversal,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ . En una onda plana,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  están en el frente de onda.

Calculemos la magnitud de  $\mathbf{B}$  con la Ec. (2.9):  $|\mathbf{B}| = B = (1/\omega)|\mathbf{k}| |\mathbf{E}| \sin 90^\circ = (k/\omega)E$ ; como  $k/\omega = 1/c$  y despejando  $E$ ,

$$E = cB. \quad (2.10)$$

Esta ecuación nos dice que las magnitudes de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  están relacionadas a través de  $c$ . Vectorialmente, la ecuación no se cumple:  $\mathbf{E} \neq c\mathbf{B}$ .

◀► **Problema 2.4.** Demuestre que en el vacío,  $\mathbf{E} = -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{B}$ . Ayuda: Siga un procedimiento análogo al que se recorrió para llegar a la Ec. (2.9):  $(\nabla \times \mathbf{B})_x = (\partial/\partial y)B_z(s) - (\partial/\partial z)B_y(s) = \dots$  Utilice la Ec. (2.4).

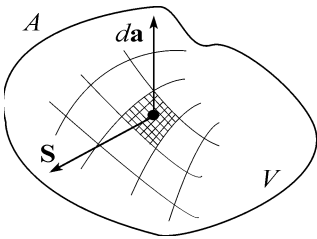
## 2.4. Energía de una Onda Electromagnética

### 2.4.1. Conservación de la Energía

Imaginemos un medio no disipativo en el que se propagan ondas. Sea una superficie cerrada  $A$  que delimita un volumen  $V$  (Fig. 2.1).

Una onda transporta energía y en cada punto del espacio tiene una dirección de avance. Podemos idear un vector  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  cuya magnitud sea la intensidad y su dirección la de avance de la onda:  $\mathbf{S} \equiv I\mathbf{u}$ . Puesto que la intensidad es energía por unidad de tiempo y unidad de área, entonces la energía que por unidad de tiempo atraviesa el diferencial de área  $d\mathbf{a}$  es el producto escalar  $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$ .

La rapidez de flujo de energía a través de toda la superficie  $A$  es la suma de los aportes de *todos* los  $d\mathbf{a}$  que conforman a  $A$ :



$$\text{Rapidez de flujo de energía a través de } A = \oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}.$$

Sea  $E_V(t)$  la energía instantánea dentro de  $V$ ; la rapidez con que cambia  $E_V$  es

$$\text{Rapidez de cambio de la energía en } V = dE_V(t)/dt.$$

Si  $\oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} > 0$  es porque a través de  $A$  hay un flujo neto de energía hacia el exterior de  $V$  y, por conservación de la energía, esta

integral es lo que  $V$  está *perdiendo*, o sea que  $dE_V(t)/dt$  sería negativo: la energía que  $V$  *pierda* la gana el exterior de  $V$ :

Rapidez de flujo de energía a través de  $A = -$  Rapidez de cambio de la energía en  $V$ ,

$$\oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{dE_V(t)}{dt}. \quad (2.11)$$

**Figura 2.1** La superficie  $A$  delimita el volumen  $V$ , en un medio en el que se propagan ondas.

### 2.4.2. Conservación de la Energía y las Leyes de Maxwell

Nos proponemos expresar a  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  en términos de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ .

Multipliquemos escalarmente\* por  $\mathbf{B}$  a cada uno de los miembros de la Ec. (2.3),

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right).$$

Este último paréntesis es la densidad instantánea de energía magnética  $\epsilon_B(\mathbf{r}, t)$ ;

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial \epsilon_B}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Multipliquemos escalarmente por  $\mathbf{E}$  a ambos miembros de la Ec. (2.4),

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right).$$

Este último paréntesis es la densidad instantánea de energía eléctrica  $\epsilon_E(\mathbf{r}, t)$ ;

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \frac{\partial \epsilon_E}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Efectuemos la resta entre las Ecs. (2.12) y (2.13),

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \epsilon_B}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \epsilon_E}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_B + \epsilon_E). \quad (2.14)$$

El último paréntesis es la densidad total de energía del campo electromagnético  $\epsilon$ , y el primer miembro es, según una identidad,\*\*  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ . Por lo tanto,  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \partial \epsilon / \partial t$ . Multiplizando por  $dV$  e integrando sobre todo el volumen,

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = -\mu_0 \int_V \frac{\partial \epsilon}{\partial t} dV.$$

$\epsilon$  es función de  $(x, y, z, t)$ , pero al integrar sobre el diferencial de volumen  $dV = dx dy dz$  la integral queda función únicamente de  $t$ ; por lo tanto, la derivada parcial respecto a  $t$  sale de la integral como una derivada total,

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = -\mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \epsilon dV.$$

La última integral es la energía total dentro del volumen  $V$ ,  $E_V(t)$ .

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = -\mu_0 \frac{dE_V}{dt}.$$

---

\*  $\frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 2\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , de donde  $\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t}$ .

\*\* Justificación. El producto triple escalar de 3 vectores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  es  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) - \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$ . Si reemplazamos a  $\mathbf{A}$  por  $\nabla$ , a  $\mathbf{C}$  por  $\mathbf{E}$  y a  $\mathbf{D}$  por  $\mathbf{B}$ , obtenemos que  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ .

Según el teorema de la divergencia, esta integral de volumen es igual a una integral sobre toda la superficie  $A$  que delimita a  $V$ ,

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}.$$

Según las dos últimas ecuaciones,

$$\oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = -\mu_0 \frac{dE_V}{dt}.$$

Dividiendo por  $\mu_0$ ,

$$\oint_A \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{dE_V}{dt}.$$

De comparar la última ecuación con la Ec. (2.11), concluimos que  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ . Como  $\mu_0 = 1/(c^2\epsilon_0)$ , llegamos a

$$\mathbf{S} = c^2\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Este vector  $\mathbf{S}$  es fundamental en electromagnetismo y se denomina el vector de Poynting. Su magnitud evaluada en  $(\mathbf{r}, t)$  es la intensidad de la onda, y su dirección  $\mathbf{u}$  es la de propagación de la onda:  $\mathbf{S} = \mathbf{u}I$ . Si la onda es plana,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ ,  $B = E/c$  y

$$S(\mathbf{r}, t) = c^2\epsilon_0 EB \sin 90^\circ = c\epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t). \quad (2.15)$$

Si también es armónica y con polarización lineal,

$$E = E_0 \sin(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct), \quad \text{y} \quad S(\mathbf{r}, t) = c\epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t).$$

Promediando por período,

$$\langle S \rangle = \langle c\epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle = c\epsilon_0 E_0^2 \langle \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2.$$

Como  $\langle S \rangle = \langle I \rangle$ ,

$$I = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2. \quad (2.16)$$

Además,  $I = cE$ ; por lo tanto  $E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2$ . Como  $I$  y  $E$  están expresados en función de  $E_0$  y no de  $E(\mathbf{r}, t)$ , se debe sobrentender que se trata de promedios temporales; por esto hemos prescindido de los signos  $\langle \rangle$ . Por una razón análoga, cuando decimos que cierta cantidad tiene un valor numérico específico, se debe entender que nos referimos al promedio temporal de la cantidad; así, una potencia de 0.1 W se refiere a una potencia promedio.

En una onda plana polarizada linealmente,

$$\langle E_B \rangle = \frac{\langle B^2 \rangle}{2\mu_0} = \frac{\frac{1}{2}B_0^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{4\mu_0} = \frac{(E_0/c)^2}{4\mu_0} = \frac{E_0^2}{4c^2\mu_0} = \frac{1}{4}\epsilon_0 E_0^2$$

y

$$\langle E_E \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{1}{4}\epsilon_0 E_0^2.$$

Vemos que las densidades de energía eléctrica y magnética de una onda plana son iguales. Sin embargo, la fuerza  $F_E$  que  $\mathbf{E}$  hace sobre una carga  $q$  con velocidad  $v \ll c$ , es mucho mayor que la fuerza  $F_B$  que la componente magnética de la onda hace sobre la misma carga:  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B$ , de donde  $\frac{F_E}{F_B} \geq \frac{qE}{qvB} = \frac{E}{vE/c} = \frac{c}{v} \gg 1$ . La situación de  $v \ll c$  se presenta en los electrones que pasan entre las placas de deflexión de un osciloscopio; para calcular la deflexión en la pantalla del osciloscopio solo se tiene en cuenta el campo eléctrico entre las placas y no el magnético.

## 2.5. Polarización

Por la polarización de una onda nos referimos a la figura mediante la que describamos su campo como función del tiempo en cierto punto del espacio especificado por  $\mathbf{r}$ . En una cuerda, si estamos describiendo el campo de desplazamiento  $\xi$  para un punto de ella, y vemos que este punto sigue una circunferencia, decimos que la onda tiene polarización circular, o elíptica si sigue una elipse. Con una onda electromagnética puede ocurrir una situación análoga, y su campo, eléctrico o magnético, como función del tiempo en cierto punto del espacio sea descriptible con una elipse; decimos que la onda electromagnética está polarizada elípticamente en ese punto. Pero mientras que en una onda elástica se puede pensar en puntos materiales que realmente se mueven en elipse, en una onda electromagnética no, por no ser una onda elástica; los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  se propagan en el vacío.

Se entenderá que una onda longitudinal no es polarizable puesto que, por definición de onda longitudinal, el campo siempre está en la dirección de avance de la onda. O dicho con otras palabras, una onda longitudinal siempre está polarizada linealmente.

Por convención, el observador que determine la polarización de una onda electromagnética se debe ubicar de manera que la onda se le acerque,  $\mathbf{k} \rightarrow \text{O} \rightarrow$ , y luego fijarse en su campo eléctrico. Lo que ocurra con el campo magnético se deduce de  $\mathbf{E}$  con la Ec. 2.9, p. 23.

El plano definido por  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{k}$  se llama el *plano de polarización*. Esta definición lleva a que el plano de polarización sea perpendicular al frente de onda.

Vimos que en una onda plana  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  definen un plano perpendicular a  $\mathbf{k}$ ; sea este el plano  $yz$ , coincidente con el frente de onda. Como  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{k}$  forman un sistema derecho, la dirección de avance de la onda es paralela al eje  $x$ . El vector de onda, si la onda avanza en dirección de  $x$  creciente,  $+x$ , será  $\mathbf{k} = \mathbf{u}_x k$ . En este caso,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{u}_x k_x + \mathbf{u}_y k_y + \mathbf{u}_z k_z) \cdot (\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z) = \mathbf{u}_x k \cdot (\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z) = kx$ ; en lugar de  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$  escribiremos  $(kx - \omega t)$ . Expresemos a  $\mathbf{E}$  como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_y + \mathbf{E}_z = \mathbf{u}_y E_y + \mathbf{u}_z E_z = \mathbf{u}_y E_{0y} \sin(kx - \omega t) + \mathbf{u}_z E_{0z} \sin(kx - \omega t + \Delta\phi_{zy}). \quad (2.17)$$

$\Delta\phi_{zy}$  es el desfase entre las ondas  $E_z$  y  $E_y$ . Veamos las diferentes polarizaciones según el valor de este desfase.

### 1. $\mathbf{E}_y$ y $\mathbf{E}_z$ en Fase

Estar en fase dos variables quiere decir que las dos alcanzan *simultáneamente*, cada una, su máximo valor, o su mínimo, o cero:  $\Delta\phi_{zy} = 0$  (Fig. 2.2). Por ejemplo, en un péndulo la altura y la energía potencial están en fase.

De la Ec. (2.17),  $E_y = E_{0y} \sin(kx - \omega t)$  y  $E_z = E_{0z} \sin(kx - \omega t)$ . Haciendo el cociente  $E_y/E_z$  y despejando  $E_y$ ,  $E_y = (E_{0y}/E_{0z})E_z$ . Esta es la ecuación de una recta con pendiente  $E_{0y}/E_{0z}$ .

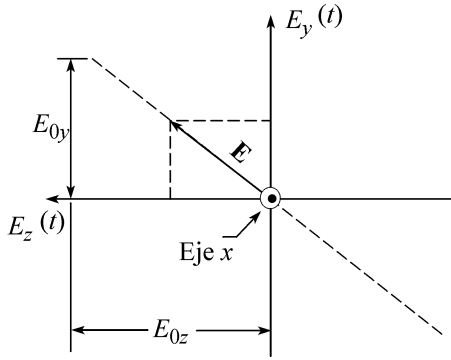
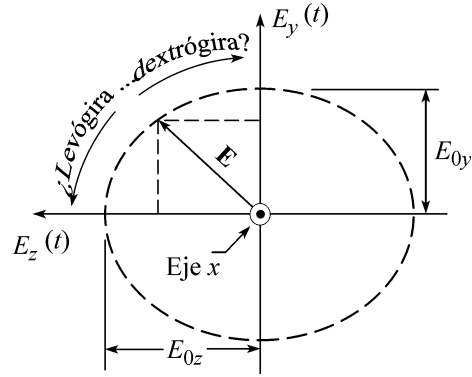
La onda tiene polarización rectilínea: su campo  $\mathbf{E}$  oscila, en el punto  $\mathbf{r}$  donde se hace el presente análisis, siempre en la misma dirección. En el gráfico vemos que cuando  $E_y = E_{0y}$ ,  $E_z = E_{0z}$ ; cuando  $E_y = -E_{0y}$ ,  $E_z = -E_{0z}$ ; y también simultáneamente se hacen cero  $E_y$  y  $E_z$ .

La intensidad instantánea es, según la Ec. 2.15,

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) &= c\epsilon_0 E^2 = c\epsilon_0 (E_y^2 + E_z^2) = c\epsilon_0 [E_{0y}^2 \sin^2(kx - \omega t) + E_{0z}^2 \sin^2(kx - \omega t)] \\ &= c\epsilon_0 (E_{0y}^2 + E_{0z}^2) \sin^2(kx - \omega t). \end{aligned}$$

El promedio temporal es

$$I = c\epsilon_0 (E_{0y}^2 + E_{0z}^2) \langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 (E_{0y}^2 + E_{0z}^2).$$

Figura 2.2 Desfase de cero entre  $E_y$  y  $E_z$ .Figura 2.3 Desfase de  $\pi/2$  entre  $E_y$  y  $E_z$ .

## 2. $E_y$ y $E_z$ en Cuadratura o Desfasados $\pi/2$

Estar desfasadas  $90^\circ$  dos variables quiere decir que en el instante que una alcanza su máximo o su mínimo valor, la otra vale cero:  $\Delta\phi_{zy} = \pm\pi/2$  (Fig. 2.3). Esto se logra describiendo a una variable con la función seno y a la otra con la función coseno (examine los gráficos de estas funciones). Por ejemplo, en el oscilador armónico simple bloque-resorte la elongación y la velocidad están desfasadas  $\pi/2$ . De la Ec. (2.17),  $E_z = E_{0z} \sin(kx - \omega t \pm \pi/2) = \pm E_{0z} \cos(kx - \omega t)$ . Despejando  $E_z/E_{0z}$ , elevando al cuadrado y sumando con  $(E_y/E_{0y})^2$ ,

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_z^2}{E_{0z}^2} = \sin^2(kx - \omega t) + \cos^2(kx - \omega t) = 1.$$

Esta es la ecuación de una elipse; decimos que la onda tiene polarización elíptica. En el gráfico vemos que cuando  $E_y = E_{0y}$ ,  $E_z = 0$ ; cuando  $E_y = -E_{0y}$ ,  $E_z = 0$ ; cuando  $E_z = E_{0z}$ ,  $E_y = 0$ ; cuando  $E_z = -E_{0z}$ ,  $E_y = 0$ . Si  $E_{0y} = E_{0z} \equiv E_0$ , la ecuación de la elipse cambia a la ecuación de la circunferencia  $E_y^2 + E_z^2 = E_0^2$ ; decimos que la onda tiene polarización circular. Cuando la polarización es elíptica o circular, se puede preguntar por el sentido de la polarización, ¿dextrógira o levógira? En un ejemplo posterior veremos un método de determinarlo.

La intensidad instantánea es, según la Ec. 2.15,

$$I(\mathbf{r}, t) = c\epsilon_0 E^2 = c\epsilon_0 (E_y^2 + E_z^2) = c\epsilon_0 [E_{0y}^2 \sin^2(kx - \omega t) + E_{0z}^2 \cos^2(kx - \omega t)];$$

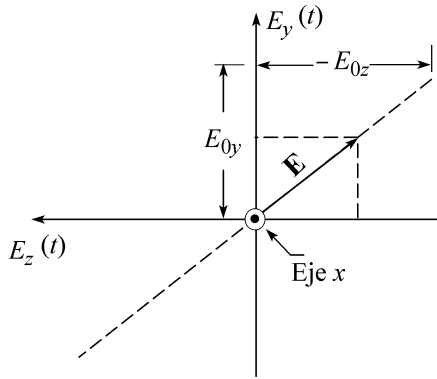
el promedio temporal es

$$I = c\epsilon_0 [E_{0y}^2 \langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle + E_{0z}^2 \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle] = \frac{1}{2} c\epsilon_0 (E_{0y}^2 + E_{0z}^2).$$

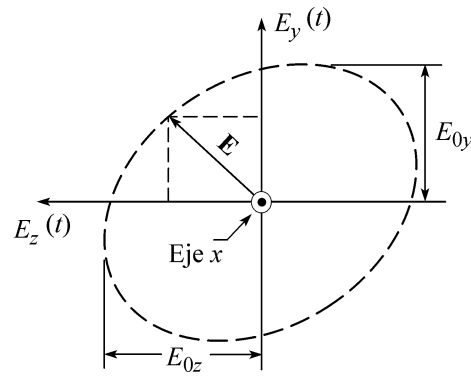
En la polarización circular,  $E_{0y} = E_{0z} = E_0$ , y la intensidad instantánea es

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) &= c\epsilon_0 [E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) + E_0^2 \cos^2(kx - \omega t)] = c\epsilon_0 E_0^2 [\sin^2(kx - \omega t) + \cos^2(kx - \omega t)] \\ &= c\epsilon_0 E_0^2. \end{aligned}$$

Vemos que es igual a la intensidad promedio, pues no depende de  $t$  (ni de  $\mathbf{r}$ ).



**Figura 2.4** Desfase de  $\pm\pi$  entre  $E_y$  y  $E_z$ .



**Figura 2.5** Desfase  $\neq 0, \pm\pi/2, \pm\pi$  entre  $E_y$  y  $E_z$ .

### 3. $E_y$ y $E_z$ en Contrafase

Estar en contrafase dos variables quiere decir que en el instante que una variable alcanza su máximo valor, la otra está en su mínimo; y que las dos se hacen cero simultáneamente:  $\Delta\phi_{zy} = \pm\pi$  (Fig. 2.4). Por ejemplo, en el oscilador armónico simple bloque-resorte la elongación y la aceleración están en contrafase. De la Ec. (2.17),  $E_z = E_{0z} \sin(kx - \omega t \pm \pi) = -E_{0z} \sin(kx - \omega t)$ . De donde  $E_y = -(E_{0y}/E_{0z})E_z$ . Esta es la ecuación de una recta con pendiente  $-E_{0y}/E_{0z}$ . La onda tiene polarización rectilínea: su campo  $\mathbf{E}$  oscila, en el punto  $\mathbf{r}$  donde se hace el presente análisis, siempre en la misma dirección. En el gráfico vemos que cuando  $E_y = E_{0y}$ ,  $E_z = -E_{0z}$ ; cuando  $E_y = -E_{0y}$ ,  $E_z = +E_{0z}$ ; y también simultáneamente se hacen cero  $E_y$  y  $E_z$ .

### 4. $E_y$ y $E_z$ con Desfase Diferente a los Anteriores Valores

Cuando  $\Delta\phi_{zy} \neq 0, \pm\pi/2, \pm\pi$ , se puede probar que el campo eléctrico puede ser descrito con una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes  $y$  y  $z$  (Fig. 2.5). Cuando una variable se hace máxima, cero o mínima, la otra lo hace un tiempo después diferente a 0 (desfase de 0), a  $\frac{1}{4}P$  (desfase de  $\pm\pi/2$ ), y a  $P/2$  (desfase de  $\pm\pi$ ).

### 5. $E_y$ y $E_z$ con Desfase Aleatorio

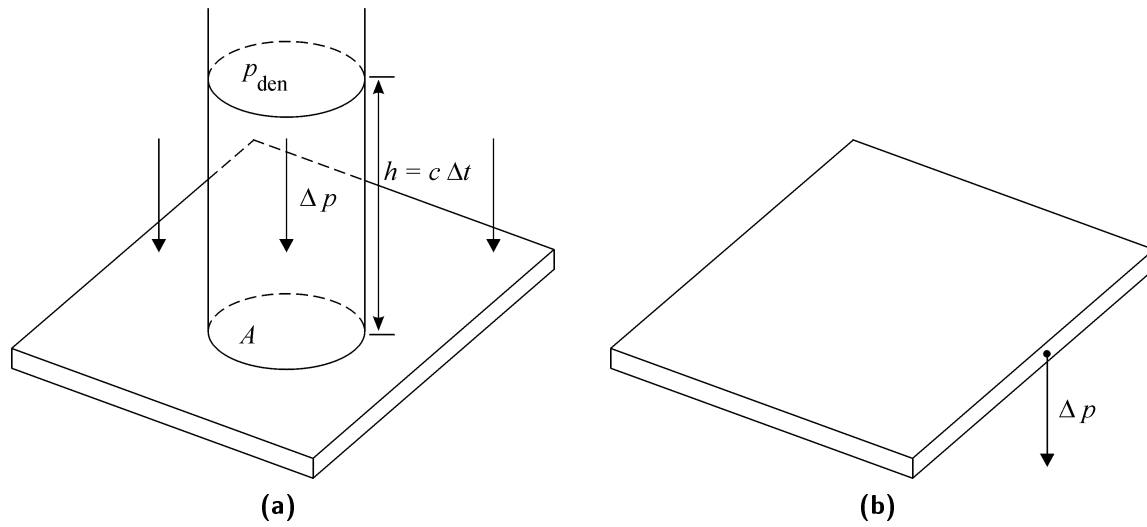
Realmente, para la luz más común o luz natural —por ejemplo la luz del Sol, de una llama o de una lámpara—  $\Delta\phi_{zy}$  en un punto del espacio cambia *aleatoriamente con el tiempo* por intervalos de cerca de  $10^{-8}$  s, y sólo por este tiempo la onda mantiene una polarización definida. Esta polarización —o más bien, despolarización— se llama *aleatoria*.

## 2.6. Presión de Radiación

Por conservación del momento lineal  $\mathbf{p}$ , el cambio de momento lineal  $\Delta p_{\text{onda}}$  de una onda cuando es reflejada o absorbida por un medio, es igual al negativo del cambio del momento lineal del medio,  $\Delta p_{\text{medio}}$ :

$$\Delta p_{\text{onda}} = -\Delta p_{\text{medio}}. \quad (2.18)$$

**Incidencia Normal sobre una Superficie Absorbente.** Consideremos primero la situación más sencilla: el caso de una onda electromagnética con un ángulo de incidencia de  $0^\circ$  sobre una superficie perfectamente negra, esto es, que absorbe el 100 % de la onda. En la Fig. 2.6a se ilustra,



**Figura 2.6** Absorción para incidencia normal. (a) Antes de la absorción, (b) después de la absorción.

antes de la absorción, un cilindro de luz de altura  $h$ , sección transversal  $A$ , volumen  $V$  y densidad de momento lineal  $p_{\text{den}}$  (momento lineal por unidad de volumen). El cilindro es absorbido por la superficie con una velocidad  $c$ , en un tiempo  $\Delta t$ ; esto lleva a que  $h = c\Delta t$ . En la Fig. 2.6b se ilustra la situación después de la absorción, donde ha desaparecido el cilindro, pero su momento se ha transferido a la superficie.

El momento dentro del cilindro es

$$\Delta p = p_{\text{den}} V = p_{\text{den}} A h = p_{\text{den}} A c \Delta t.$$

Según la Ec. 2.18, este momento es el que se transfiere a la superficie en el mismo  $\Delta t$ . De acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza que la onda le ejerce a la superficie es

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_{\text{den}} A c \Delta t}{\Delta t} = p_{\text{den}} A c.$$

La presión  $P_{\text{rad}}$  que la onda o radiación ejerce sobre la superficie es así

$$P_{\text{rad}} = \frac{F}{A} = \frac{p_{\text{den}} A c}{A} = p_{\text{den}} c. \quad (2.19)$$

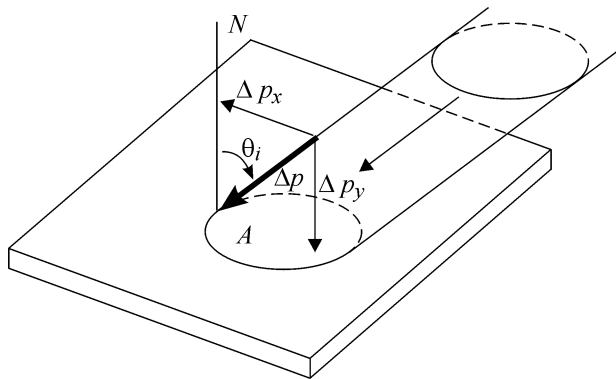
Según la relatividad especial, la energía  $E$  del cilindro y su inercia  $m$  están relacionadas por la célebre ecuación  $E = mc^2 = (mc)c$ . El paréntesis es el momento lineal  $\Delta p$  del cilindro de luz,  $E = (\Delta p)c$ . Dividiendo por el volumen del cilindro,  $(E/V) = (\Delta p/V)c$ . El primer paréntesis es la densidad de energía  $\epsilon$  y el segundo es la densidad de momento lineal  $p_{\text{den}}$ :  $E = p_{\text{den}} c$ . Igualando con la Ec. 2.19,

$$P_{\text{rad}} = E. \quad (2.20)$$

Vemos que la presión ( $\text{N}/\text{m}^2$ ) y la densidad de energía ( $\text{J}/\text{m}^3$ ) tienen unidades equivalentes. Recuerde que  $E = I/v$  y  $E = \frac{1}{2}\epsilon E_0^2$  (polarización lineal); en el vacío,

$$\epsilon = \frac{I}{c} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2.$$





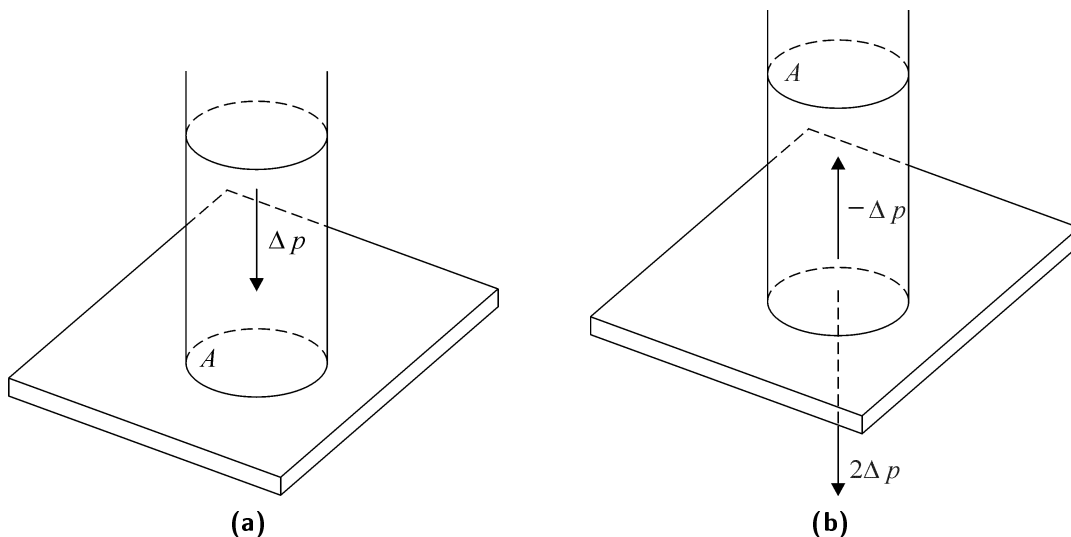
**Figura 2.7** Absorción para incidencia oblicua.

**Incidencia Oblicua sobre una Superficie Absorbente.** En la Fig. 2.7 la luz incide sobre una superficie totalmente absorbente. El ángulo de incidencia  $\theta_i$  se define como el ángulo entre la normal  $N$  en el punto de incidencia y un rayo. El momento lineal se puede descomponer en una componente  $\Delta p_x$  paralela a la interfase y una componente perpendicular  $\Delta p_y$ . Puesto que solo la componente perpendicular,  $\Delta p_y = \Delta p \cos \theta_i$ , produce una presión, basta con introducir  $\cos \theta_i$  en la Ec. 2.20,

$$P_{\text{rad}} = E \cos \theta_i. \quad (2.21)$$

La incidencia normal,  $\theta_i = 0$ , es un caso particular de la Ec. 2.20.

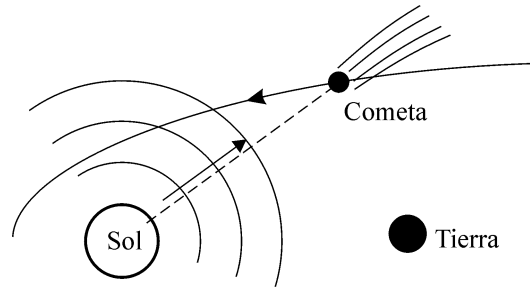
**Incidencia Normal sobre una Superficie Reflectiva.** En la Fig. 2.8 se ilustra una onda que incide normalmente sobre una superficie totalmente reflectiva, esto es, que refleja el 100 % de la energía de la onda.



**Figura 2.8** Reflexión para incidencia normal.

Se selecciona de la onda un cilindro de luz con momento lineal  $\Delta p$  antes de la reflexión (Fig. 2.8a). Después de un tiempo  $\Delta t$ , el cilindro es totalmente reflejado, y tiene un momento  $-\Delta p$  (Fig. 2.8b). Como el momento lineal se conserva, el momento del sistema cilindro-superficie antes y después de la absorción debe ser constante. Esto lleva a que la superficie después de la absorción

**Figura 2.9** La cola de los cometas está en la línea Sol-cometa.



adquiere un momento lineal  $2\Delta p$ :

$$\begin{aligned} p_{\text{antes}} &= p_{\text{después}}, \\ (p_{\text{cilindro}} + p_{\text{superficie}})_{\text{antes}} &= (p_{\text{cilindro}} + p_{\text{superficie}})_{\text{después}}, \\ \Delta p + 0 &= -\Delta p + 2\Delta p. \end{aligned}$$

Vemos que el cambio de momento lineal de la superficie es el doble de cuando hay absorción total, lo que lleva, de acuerdo con la segunda ley de Newton, a que la onda ejerza el doble de fuerza y, en consecuencia, el doble de presión.

$$P_{\text{rad}} = 2E.$$

Una situación parecida se presenta cuando jugamos con un balón: hacemos más fuerza cuando lo rechazamos que cuando lo atrapamos.

**Incidencia Oblicua sobre una Superficie Reflectiva.** Por argumentos ya expuestos, si la incidencia es oblicua basta con introducir la función  $\cos \theta_i$  en la anterior ecuación,

$$P_{\text{rad}} = 2E \cos \theta_i. \quad (2.22)$$

Hace siglos se sabe que la cola de los cometas está en la línea Sol-cometa, en el lado opuesto al Sol (Fig. 2.9). Esto se debe, en parte, al sentido de la fuerza que la radiación hace sobre las partículas de la cola; esta explicación fue dada por Kepler en 1619. Además de la radiación electromagnética, el Sol también emite partículas (*viento solar*) que contribuyen a la orientación de la cola.

## Ejemplos y Problemas

**Ejemplo 2.3.** El campo eléctrico de una onda es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_y E_0 \sin(kx - \omega t) - \mathbf{u}_z E_0 \cos(kx - \omega t).$$

Halle el sentido de la polarización de la onda.

*Solución.* Según la anterior ecuación, en cualquier punto del espacio tridimensional especificado por  $\mathbf{r}$ , la onda se propaga paralelo al eje  $x$ , con componentes

$$E_y(\mathbf{r}, t) = E_0 \sin(kx - \omega t), \quad (2.23)$$

y

$$E_z(\mathbf{r}, t) = -E_0 \cos(kx - \omega t). \quad (2.24)$$

Enfatizamos que es incorrecto decir que la onda se propaga a lo largo del eje  $x$ , pues la onda es plana, y existe en *todo el espacio tridimensional infinito*. Se debe decir,

más bien, que se propaga paralelo al eje  $x$ . Las componentes  $y$  y  $z$  tienen igual amplitud y un desfase de  $90^\circ$ , lo que da lugar, como ya se demostró, a polarización circular (Fig. 2.10). Para hallar el sentido se debe averiguar en qué sentido cambia  $\mathbf{E}$ . Para esto es necesario examinar su variación temporal  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  en algún punto fijo  $\mathbf{r}$  (de manera análoga, cuando se quiere saber el sentido de movimiento de una partícula se examina su velocidad  $d\mathbf{r}/dt$ ).

Un observador ubicado de manera que la onda se le acerque,  $\mathbf{k} \rightarrow \text{O}$ , describe a  $\mathbf{E}$  en un punto  $\mathbf{r}$ , con la Fig. 2.10. Basta con examinar el cambio temporal de una de las componentes de  $\mathbf{E}$  en cualquiera de los 4 cuadrantes.

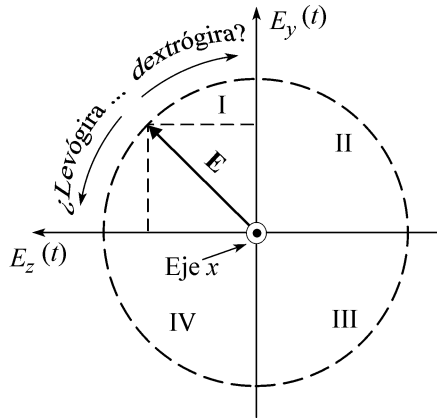


Figura 2.10

Escojamos a  $E_y$  cuando  $\mathbf{E}$  está en el cuadrante I, donde se cumple que  $E_y > 0$  y  $E_z > 0$ . Comparando estas 2 relaciones características del cuadrante I con las Ec. 2.23 y Ec. 2.24, vemos que  $\sin(kx - \omega t) > 0$  y  $\cos(kx - \omega t) < 0$ . Entonces,  $\partial E_y / \partial t = -\omega E_0 \cos(kx - \omega t)$  es positivo, puesto que  $\omega > 0$ ,  $E_0 > 0$  y  $\cos(kx - \omega t) < 0$ . El valor positivo de la derivada nos indica que  $E_y$  está aumentando, y por lo tanto el diagrama final es el de la Fig. 2.11, correspondiente a polarización dextrógira. A la misma conclusión llegamos si analizamos la rapidez con que cambia  $E_z$ ,  $\partial E_z / \partial t$ .

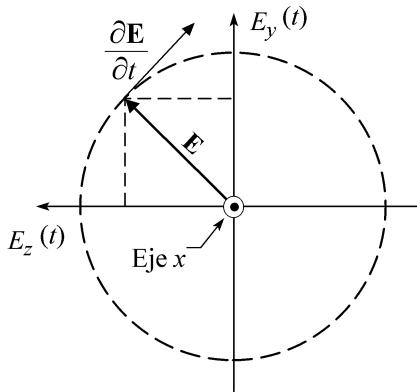


Figura 2.11 Sentido de la polarización.

Este ejemplo lo podemos transformar en uno sobre ondas elásticas. Imagínese al eje  $x$  coincidente con una cuerda; las ondas transversales son vibraciones de los puntos de la cuerda en planos paralelos al plano  $yz$ . Cambie a  $\mathbf{E}$  por el campo de desplazamiento  $\xi$  y a  $E_0$  por  $\xi_0$ .

◀ Problema 2.5. Resuelva el ejemplo anterior, pero repitiendo el análisis en los cuadrantes II, III y IV.

**Ejemplo 2.4.** Una onda plana armónica polarizada linealmente, con longitud de onda  $\lambda = 6,0 \times 10^{-7} \text{ m}$ , se propaga en el vacío. La intensidad promedio de la onda

es  $0,5 \text{ W/m}^2$ . La dirección de propagación es paralela al plano  $xz$ , a  $30^\circ$  con el eje  $x$ . El campo eléctrico oscila paralelo al eje  $y$ . Escriba, en forma vectorial, las ecuaciones que describen los campos eléctrico y magnético de la onda.

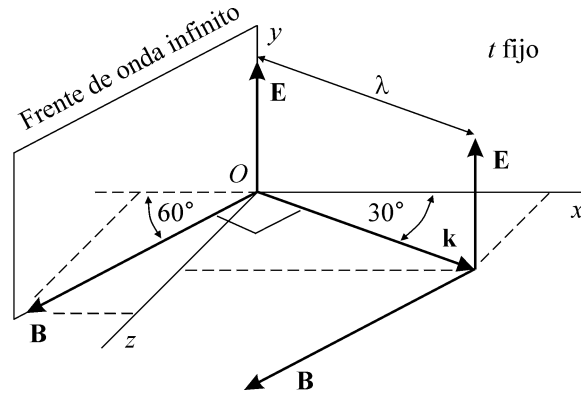


Figura 2.12

**Solución.** En la Fig. 2.12 se muestran, en el origen y para cierto instante, los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{k}$ . El vector  $\mathbf{B}$  se halla con la regla de la mano derecha: según la Ec. 2.9, tiene el mismo sentido que el producto  $\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ .

Los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  están en fase, y vibran con una frecuencia  $\nu = c/\lambda = 3 \times 10^8 / 6 \times 10^{-7} = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ . Esto quiere decir que al cabo de un tiempo  $t = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2 \cdot 5 \times 10^{14}} \text{ s}$  tales vectores tendrán un sentido opuesto al mostrado en la figura. Como la onda es plana,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  se deben trasladar a todos los puntos del frente de onda, que es el plano infinito donde están  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , perpendicular a  $\mathbf{k}$ ; también se deben trasladar a todos los puntos de los planos a una distancia, a lo largo de  $\mathbf{k}$ ,  $n\lambda$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ ) del plano que pasa por el origen.

En un plano infinito separado  $\lambda/2$  del plano mostrado, los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  se deben dibujar con sentido opuesto. Como la polarización es lineal,  $\mathbf{E}$  siempre es paralelo a  $y$ ; si fuera elíptica,  $\mathbf{E}$  (y por supuesto  $\mathbf{B}$  también) rotaría alrededor de  $\mathbf{k}$ , espacial y temporalmente, a la vez que cambiaría de magnitud. Si fuera circular, rotaría sin cambiar de magnitud.

El campo eléctrico para una onda plana, armónica y con polarización lineal se puede escribir como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \mathbf{u}_E, \quad (2.25)$$

donde  $\mathbf{u}_E$  es un vector unitario con la dirección de  $\mathbf{E}$ .

Halleemos los valores o expresiones de (a)  $E_0$ , (b)  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , (c)  $\omega$  y (d)  $\mathbf{u}_E$  que hacen de la ecuación general (2.25) una ecuación específica para este ejemplo:

(a) De la Ec. 2.16, p. 26,

$$\begin{aligned} E_0 &= \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}} \\ &= \sqrt{\frac{2(0,5 \text{ W/m}^2)}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})(8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)}} \\ &= 19,4 \text{ V/m}. \end{aligned}$$

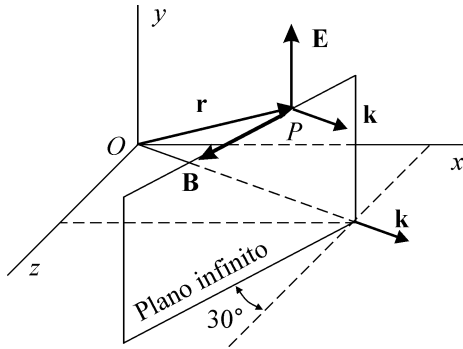
(b) Como la onda es transversal,  $\mathbf{k}$  no puede tener componente en la dirección de  $\mathbf{E}$ :  $\mathbf{k}_y = 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}_x + \mathbf{k}_y + \mathbf{k}_z = \mathbf{k}_x + \mathbf{k}_z = \mathbf{u}_x k_x + \mathbf{u}_z k_z \\ &= \mathbf{u}_x k \cos 30^\circ + \mathbf{u}_z k \sin 30^\circ = \mathbf{u}_x \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{u}_z \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{\lambda} (\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z). \end{aligned}$$

De esta ecuación vemos que  $k_x = \sqrt{3}\pi/\lambda$ , y  $k_z = \pi/\lambda$ .

La onda descrita por la Ec. 2.25 existe en *todo el espacio infinito tridimensional*. El vector  $\mathbf{r}$  especifica el punto  $P$  de ese espacio donde se está analizando la onda (Fig. 2.13), y su expresión es

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z.$$



**Figura 2.13** La onda en un punto  $P$  arbitrario.

Hallemos el producto escalar,

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} &= \frac{\pi}{\lambda} (\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z) \cdot (\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z) \\ &= \frac{\pi}{\lambda} (\sqrt{3}x + z). \end{aligned}$$

(c) La frecuencia angular es

$$\omega = 2\pi c/\lambda.$$

(d) Como la polarización es lineal,  $\mathbf{u}_E$  no depende del tiempo,

$$\mathbf{u}_E = \mathbf{u}_y.$$

Reemplazando los valores hallados de  $E_0$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ ,  $\omega$  y  $\mathbf{u}_E$  en la Ec. 2.25, llegamos a la expresión final para el campo eléctrico,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 19,4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \sin \left[ \frac{\pi}{\lambda} (\sqrt{3}x + z) - \frac{2\pi c}{\lambda} t \right] \mathbf{u}_y \\ &= 19,4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z - ct \right) \mathbf{u}_y \quad (2.26) \\ &= E_y \mathbf{u}_y. \end{aligned}$$

Para hallar la componente magnética de la onda utilizamos la Ec. 2.9,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ k_x & 0 & k_z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\omega} (-\mathbf{u}_x E_y k_z + \mathbf{u}_z k_x E_y) \\ &= \frac{E_y k}{\omega} (-\mathbf{u}_x \sin 30^\circ + \mathbf{u}_z \cos 30^\circ) \\ &= \frac{E_y}{c} \left( -\frac{1}{2}\mathbf{u}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{u}_z \right). \end{aligned}$$

De esta ecuación se desprende que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_x(\mathbf{r}, t) &= -\frac{E_y}{2c} \mathbf{u}_x \\ &= -\frac{19,4 \text{ V}}{2c} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z - ct \right) \mathbf{u}_x, \end{aligned}$$

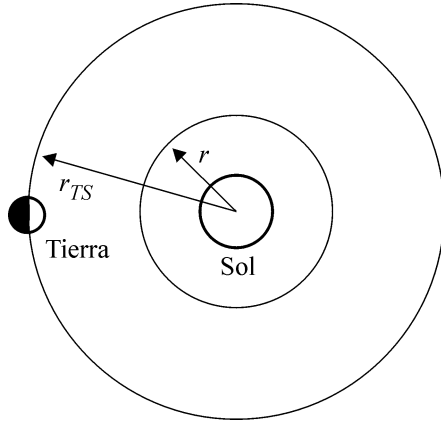
y

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_z(\mathbf{r}, t) &= \frac{\sqrt{3}E_y}{2c} \mathbf{u}_z \\ &= \frac{19,4\sqrt{3} \text{ V}}{2c} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z - ct \right) \mathbf{u}_z. \end{aligned}$$

Vemos que  $\mathbf{B}_x$  y  $\mathbf{B}_z$  son generados por  $\mathbf{E}_y$ . En las ecuaciones (2.26) y posteriores notamos que la dirección de avance de la onda está en la fase, que la fase no contiene la dirección del campo, la cual es dada por el vector unitario que acompaña a la amplitud del campo. En dichas ecuaciones tampoco aparece la coordenada  $y$ , no porque  $y = 0$ , sino porque  $k_y = 0$ . Recuerde que en general  $y \neq 0$ , pues  $y$  es la coordenada respectiva de un punto cualquiera del espacio:  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$ ,  $z \in (-\infty, +\infty)$ .

**Ejemplo 2.5.** La radiación electromagnética solar cae sobre la Tierra a razón de  $1400 \text{ W/m}^2$ . (a) Asumiendo que la radiación se pueda considerar como ondas planas, estime la amplitud de los campos eléctrico y magnético de la onda; (b) halle la potencia emitida por el Sol en ondas electromagnéticas; (c) ¿cuánta masa (inercia) por segundo pierde el Sol debido a la radiación?; (d) halle entre qué límites está la fuerza que dicha radiación ejerce sobre la Tierra, y compare con la fuerza de atracción gravitacional entre ambos astros.

**Solución.** La distancia de la Tierra al Sol ( $r_{TS}$ ) es, aproximadamente, 150 millones de kilómetros (a esta distancia se le define como una unidad astronómica, U. A., de distancia). En metros,  $r_{TS} = 1,5 \times 10^{11}$  m. El Sol se puede aproximar a una fuente puntual que emite ondas esféricas, pero la curvatura de las ondas cuando nos movemos en la superficie terrestre es indetectable, y suponemos que el frente de onda es plano localmente, entendiendo por *localmente* desplazamientos muy pequeños en comparación con  $r_{TS}$ .



**Figura 2.14** Emisión de radiación solar.

(a) Según los datos,  $I(r_{TS}) = 1400 \text{ W/m}^2$ . Despejando a  $E_0$  de la Ec. 2.16, p. 26,

$$E_0 = \sqrt{\frac{2(1400 \text{ W/m}^2)}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})(8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)}} = 1027 \text{ V/m}.$$

Despejando a  $B_0$  de la Ec. 2.10, p. 24,

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1027 \text{ V/m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3,42 \times 10^{-6} \text{ T} = 3,42 \mu\text{T}.$$

(b) La potencia que pasa a través de una esfera de radio  $r$  dentro de la que esté el Sol es constante, sin importar  $r$ . Nos piden hallar cuántos Joules, en promedio, pasan cada segundo a través de una esfera de radio  $r_{TS}$  (Fig. 2.14). A esta distancia la intensidad es  $1400 \text{ W/m}^2$ , lo que quiere decir que por cada  $\text{m}^2$  pasan en un segundo 1400 J. Debemos hallar entonces el área de una esfera de radio  $r_{TS}$ :

$$\begin{aligned} P &= I(r)A(r) = I(r_{TS})4\pi r_{TS}^2 \\ &= (1400 \text{ W/m}^2)4\pi(1,5 \times 10^{11} \text{ m})^2 \\ &= 4 \times 10^{26} \text{ J/s}. \end{aligned}$$

Como la energía se conserva, esta potencia es igual a la disminución de energía del Sol cada segundo:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{Sol}} = -4 \times 10^{26} \text{ J/s}.$$

(c) Según la relatividad especial,  $E = mc^2$ . Derivando respecto al tiempo,  $dE/dt = c^2 dm/dt$ ; de donde

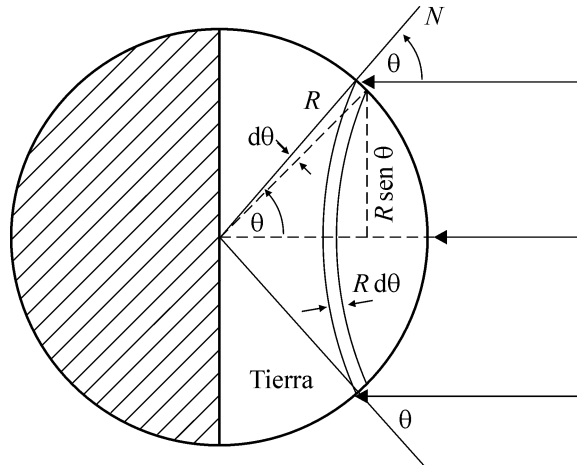
$$\begin{aligned} \left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{Sol}} &= \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} = -\frac{4 \times 10^{26} \text{ J/s}}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} \\ &= -4,52 \times 10^9 \text{ kg/s}. \end{aligned}$$

El Sol pierde una masa (entendida como inercia, no porque pierda átomos o moléculas) de 4.5 millones de toneladas cada segundo, la que se transforma en ondas electromagnéticas.

(d) La Tierra no absorbe ni refleja el 100% de la radiación que le llega (el porcentaje de reflectividad de un planeta se llama su *albedo*), por lo que la presión de radiación sobre ella es mayor que si fuera totalmente absorbente, y menor que si fuera totalmente reflectiva:

$$E < P_{\text{rad}} < 2E.$$

Halleemos la fuerza suponiendo que la Tierra absorbe toda la radiación; en este caso la presión la da la Ec. 2.21, p. 31. Sea  $R$  el radio de la Tierra. La Fig. 2.15 muestra como elemento de área sobre la superficie terrestre a un anillo concéntrico con la línea  $TS$ , y de ancho infinitesimal. El ángulo entre un rayo proveniente del Sol y la normal  $N$  al infinitesimal es  $\theta$ . El radio del elemento es  $R \sin \theta$  y su ancho es  $R d\theta$ ; su área es entonces el perímetro por el ancho:  $da = (2\pi R \sin \theta)(R d\theta) = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$ . La fuerza sobre el infinitesimal es



**Figura 2.15** Presión de radiación sobre la Tierra.

$$\begin{aligned} dF &= P_{\text{rad}} da = (E \cos \theta)(2\pi R^2 \sin \theta d\theta) \\ &= 2\pi R^2 E \sin \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Para hallar la fuerza total, debemos integrar entre 0 y  $\pi/2$ . Sobre la superficie terrestre la densidad de energía  $E$  es casi constante y sale de la integral:

$$\begin{aligned} F &= 2\pi R^2 E \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2\pi R^2 E \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) = 2\pi R^2 E \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \pi R^2 E. \end{aligned}$$

En esta ecuación  $\pi R^2$  es el área de la proyección del hemisferio iluminado sobre un plano perpendicular a la dirección de la luz. La función  $\cos \theta$  en las ecuaciones para la presión de radiación (Ecs. 2.21 y 2.22) realiza la proyección. En la Fig. 2.16 se ilustra entre líneas gruesas un elemento de área  $da$ , y su proyección en un plano perpendicular a la luz, con líneas punteadas.

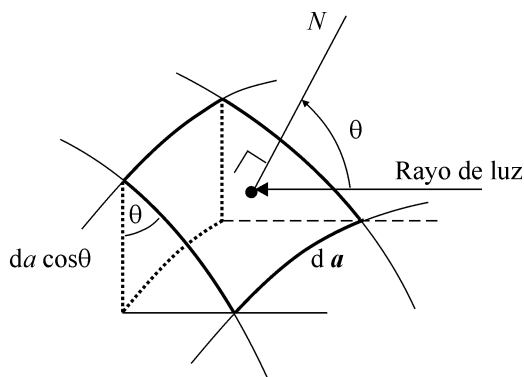


Figura 2.16 Proyección de un elemento de área.

El radio terrestre es  $R = 6370 \text{ km} = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ , la densidad de energía es  $E = I/v \approx I/c$ . Reemplazando en la última ecuación para  $F$ ,

$$\begin{aligned} F &= \pi (6,37 \times 10^6 \text{ m})^2 \frac{1400 \text{ W/m}^2}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \\ &\approx 6 \times 10^8 \text{ N}. \end{aligned}$$

La presión de radiación cuando la superficie es 100 % reflectiva es el doble que cuando es 100 % absorbente, por consiguiente, la fuerza sería el doble de lo hallado. La respuesta a este numeral (d) es

$$6 \times 10^8 \text{ N} < F < 12 \times 10^8 \text{ N}.$$

La masa de la Tierra es  $6 \times 10^{24} \text{ kg}$ , la del Sol es  $2 \times 10^{30} \text{ kg}$ ; la fuerza de atracción gravitacional  $F_G$  es

$$\begin{aligned} F_G &= G \frac{m_{\text{Sol}} m_{\text{Tierra}}}{r_{TS}^2} \\ &= 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \frac{(6 \times 10^{24} \text{ kg})(2 \times 10^{30} \text{ kg})}{(1,5 \times 10^{11} \text{ m})^2} \\ &= 3,6 \times 10^{22} \text{ N}. \end{aligned}$$

$F_G$  es, aproximadamente,  $\frac{10^{22}}{10^9} = 10^{13}$  veces mayor que la fuerza debida a la radiación electromagnética.

# 3

## REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

### 3.1. Definiciones

**Plano de Incidencia. Ángulos de Incidencia, Reflexión y Refracción.** Cuando la luz incide en una interfase, parte se refleja y parte se refracta.\* Donde están la luz incidente y la luz reflejada se define como el medio 1; donde está la luz refractada es el medio 2 (Fig. 3.1). El plano definido por el rayo incidente  $\mathbf{k}_i$  y la normal  $N$  en el punto de incidencia se llama el *plano de incidencia*.

*Al abordar una situación donde haya reflexión y refracción, lo primero que se debe hacer es localizar el plano de incidencia.*

$N$  y la línea de intersección entre el plano de incidencia y la interfase dividen el plano de incidencia en cuatro cuadrantes: El cuadrante I, donde está el rayo incidente; el II, adyacente al I en el medio 1; el III, diagonalmente opuesto al I; y el IV, diagonalmente opuesto al II. *El rayo reflejado está siempre en II y el transmitido en III.*

El ángulo de incidencia  $\theta_i$  es el ángulo del rayo incidente con  $N$ ,  $\theta'_r$  es el ángulo del rayo reflejado  $\mathbf{k}'_r$  con  $N$ , y  $\theta_r$  es el ángulo del rayo refractado  $\mathbf{k}_r$  con  $N$ .

**Índice de Refracción.** El índice absoluto de refracción de un medio se define como  $n = c/v$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío, y  $v$  es la velocidad en el medio. Como  $v \leq c$ , entonces  $n \geq 1$ .

**Leyes de Reflexión y Refracción.** Las leyes de reflexión y refracción establecen que

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_r \text{ y } \mathbf{k}_r & \text{ son coplanares con el plano de incidencia;} \\ \theta_i &= \theta'_r : \text{ ley de reflexión;} \\ n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta_r : \text{ ley de refracción, o ley de Snell.} \end{aligned} \quad (3.1)$$

En la ley de Snell,\*\*  $n_1$  es el índice del medio donde está el rayo que *llega* a la interfase, y  $n_2$  es el índice del medio donde está el rayo que *sale* por refracción de la interfase.

\* Hay casos particulares donde no hay reflexión o transmisión.

\*\* Descubierta empíricamente por Willebrord Snel en 1621, con lo que se inició la óptica moderna aplicada. En el siglo XVII se halló teóricamente la ley con base en un modelo corpuscular, en el que era necesario que la rapidez de la luz aumentara al pasar del aire al agua; también se halló con base en un modelo ondulatorio, en el que era necesario que tal rapidez disminuyera. Solo en 1850 Foucault, con un arreglo de espejos rotantes, constató que disminuía. La velocidad de la luz fue medida por primera vez a partir del trabajo de Ole Römer en 1676 con los eclipses de Io, un satélite de Júpiter; Newton obtuvo 240 000 km/s.

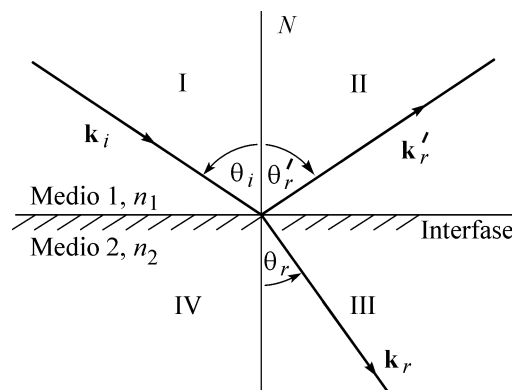
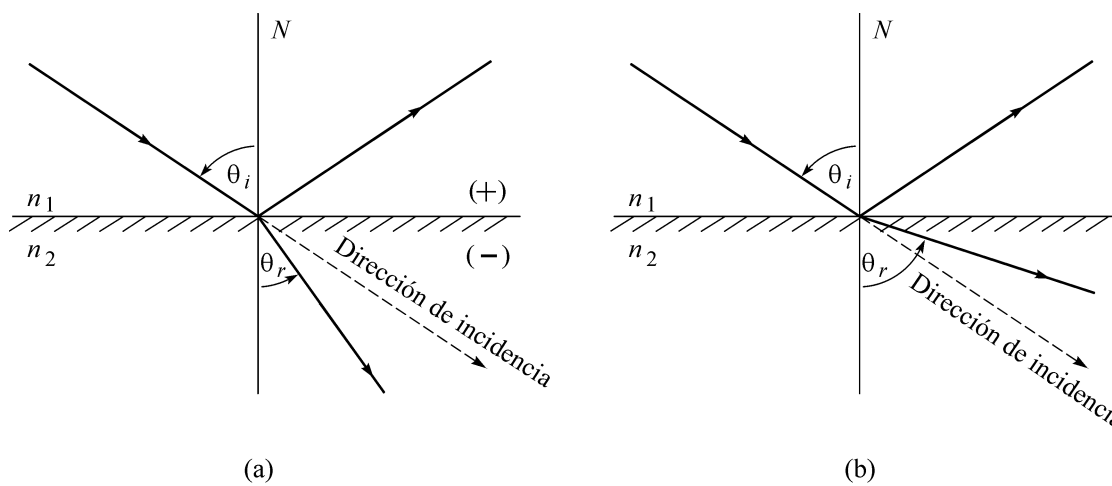


Figura 3.1  $\mathbf{k}_i$  define el medio 1.

Si  $\theta_i = 0$ ,  $\theta_r$  también es cero. Sólo en este caso el rayo refractado no se desvía. Para  $\theta_i \neq 0$ , el rayo refractado se desvía respecto a la dirección del rayo incidente. Decimos que se acerca a la normal si  $\theta_r < \theta_i$ , y que se aleja de la normal si  $\theta_r > \theta_i$ . De la Ec. 3.1, vemos que  $\theta_r < \theta_i$  implica que  $n_2 > n_1$  y que  $\theta_r > \theta_i$  implica que  $n_2 < n_1$ . En resumen,

El rayo refractado se acerca a la normal si  $n_2 > n_1$ ; el rayo refractado se aleja de la normal si  $n_2 < n_1$  (Fig. 3.2).



**Figura 3.2** (a) El rayo refractado se acerca a la normal,  $\theta_r < \theta_i$ , cuando  $n_1 < n_2$ ; (b) se aleja de la normal,  $\theta_r > \theta_i$ , cuando  $n_1 > n_2$ .

### 3.2. Ángulo Crítico

Cuando  $n_1 > n_2$ ,  $\theta_r > \theta_i$ . El máximo  $\theta_r$  es  $90^\circ$ , que se obtiene cuando [Ec. 3.1]  $\text{sen } \theta_i = (n_2/n_1) \text{sen } 90^\circ = n_{21}$ . A este ángulo de incidencia se le denomina el *ángulo crítico*  $\theta_c$ ,

$$\text{sen } \theta_c = n_{21}.$$

Para ángulos de incidencia mayores que el ángulo crítico, el seno del ángulo de refracción daría mayor que uno. Este absurdo matemático lo interpretamos como que no hay luz refractada, toda la luz incidente se refleja, y la onda permanece así dentro del medio 1; decimos que se presenta *reflexión total interna*; fue descubierta por Kepler (1571-1630). El fenómeno de reflexión total tiene una aplicación importante en la comunicación a través de fibras ópticas.

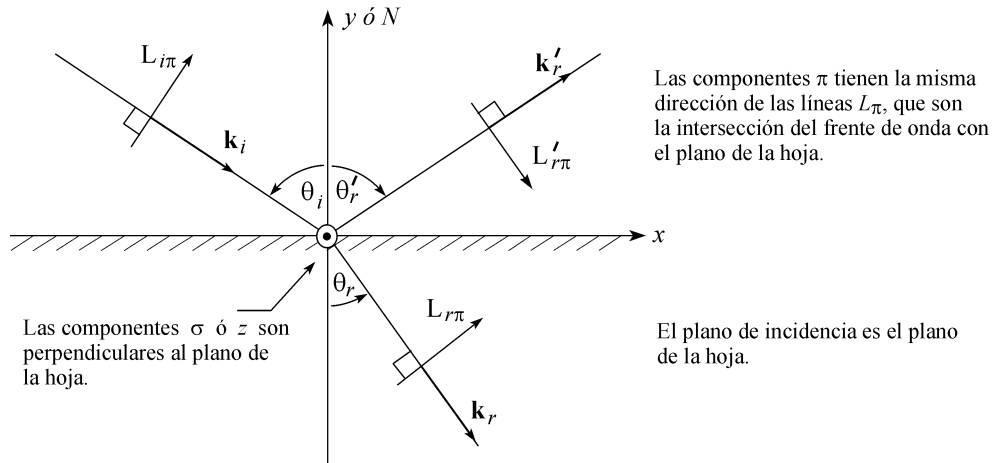
### 3.3. Coeficientes de Fresnel

Averiguar la dirección de las ondas reflejada y transmitida es sencillo con las leyes de reflexión y refracción. Pero lo único que cambia en la reflexión y la transmisión no es el ángulo, también cambian la energía y la polarización. En los libros se ilustran gráficamente los cambios de dirección; lo que no se suele representar son los cambios energéticos y de polarización. ¿Cómo se relacionan



la energía y los campos reflejados y transmitidos con los de la onda incidente; cómo cambia la polarización de las ondas reflejada y transmitida respecto a la incidente? La respuesta, que ya no es tan sencilla, la obtenemos con los *coeficientes de Fresnel*. Para hallarlos aplicamos las condiciones de frontera que deben cumplir **E** y **B**.

Como origen de coordenadas escogamos cualquier punto de los infinitos puntos de la interfase, el plano  $xz$ ; sea  $xy$  el plano de incidencia. Para descomponer los campos utilizamos la dirección  $z$  y la línea determinada por la intersección del frente de onda con el plano de incidencia; esto es, un campo lo representamos como la superposición de dos campos mutuamente perpendiculares y con polarización lineal.



**Figura 3.3** Sistema de referencia para descomponer los campos.

La componente en  $z$  la llamamos la componente perpendicular o componente  $\sigma$  y a la otra la llamamos la componente paralela al plano de incidencia o componente  $\pi$ . Por onda  $\pi$  entendemos a  $\mathbf{E}_\pi$  junto con  $\mathbf{B}_\sigma$ , por onda  $\sigma$  entendemos a  $\mathbf{E}_\sigma$  junto con  $\mathbf{B}_\pi$ . Note que la componente  $\sigma$  es paralela o tangente a la interfase. Así, cada onda, la incidente, reflejada y transmitida, la descomponemos en dos ondas, una  $\pi$  y otra  $\sigma$ . De acuerdo con esto\* (Fig. 3.5),

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \mathbf{E}_{i\pi} + \mathbf{E}_{i\sigma}, & \mathbf{B}_i &= \mathbf{B}_{i\pi} + \mathbf{B}_{i\sigma}, \\ \mathbf{E}'_r &= \mathbf{E}'_{r\pi} + \mathbf{E}'_{r\sigma}, & \mathbf{B}'_r &= \mathbf{B}'_{r\pi} + \mathbf{B}'_{r\sigma}, \\ \mathbf{E}_r &= \mathbf{E}_{r\pi} + \mathbf{E}_{r\sigma}, & \mathbf{B}_r &= \mathbf{B}_{r\pi} + \mathbf{B}_{r\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Sea  $\beta$  el ángulo entre un **E** y el plano de incidencia. Para  $\mathbf{E}_i$  es  $\beta_i$ , para  $\mathbf{E}'_r$  es  $\beta'_r$ , y para  $\mathbf{E}_r$  es  $\beta_r$ .

Vea la Fig. 3.11, p. 48, y no confunda a  $\theta_i$  con  $\beta_i$ , a  $\theta'_r$  con  $\beta'_r$ , ni a  $\theta_r$  con  $\beta_r$ . Son ángulos independientes entre sí.

Definimos los coeficientes de Fresnel para la amplitud (se pueden definir coeficientes para la

\*Para visualizar las componentes  $\pi$  y  $\sigma$  es conveniente poner una hoja perpendicular al rayo que estemos examinando. Cualquier vector en esta hoja puede representar el campo. La proyección de este vector en  $z$  es la componente  $\sigma$  y la proyección a lo largo de la intersección de la hoja con el plano de incidencia es la componente  $\pi$ .

potencia; Ejemplo 3.2, p. 45) como

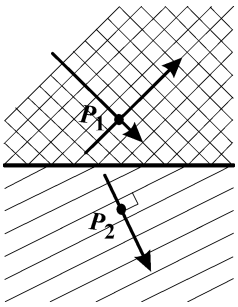
$$\left. \begin{aligned} R_\pi &= \frac{E'_{0r,\pi}}{E_{0i,\pi}}, & R_\sigma &= \frac{E'_{0r,\sigma}}{E_{0i,\sigma}}, \\ T_\pi &= \frac{E_{0r,\pi}}{E_{0i,\pi}}, & T_\sigma &= \frac{E_{0r,\sigma}}{E_{0i,\sigma}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Una condición de frontera nos dice que

$$\mathbf{E} \text{ paralelo a la interfase es continuo,}^* \quad (3.4)$$

y la otra condición de frontera nos dice que, para dieléctricos con  $\mu \cong \mu_0$  —caso muy común—

$$\mathbf{B} \text{ paralelo a la interfase es continuo.} \quad (3.5)$$



**Figura 3.4** Puntos para aplicar las condiciones de frontera,  $\overline{P_1 P_2} \rightarrow 0$ .

Para aplicar las condiciones (3.4) y (3.5) debemos examinar los campos en los puntos  $P_1$  (en el medio 1) y  $P_2$  (en el medio 2) separados entre sí una distancia infinitesimal  $\overline{P_1 P_2} \rightarrow 0$ . En  $P_1$ , por haber ondas incidente y reflejada, debemos dibujar  $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_r, \mathbf{E}_{i\pi}, \mathbf{E}_{i\sigma}, \mathbf{B}_{i\pi}, \mathbf{B}_{i\sigma}, \mathbf{E}'_{r\pi}, \mathbf{E}'_{r\sigma}, \mathbf{B}'_{r\pi}$  y  $\mathbf{B}'_{r\sigma}$ : ¡10 vectores para representar en un sólo punto! Esta congestión de vectores la resolvemos como se ilustra en los 4 diagramas de la Fig. 3.5, pero se debe mantener presente que todos los puntos  $P_1$  son un mismo punto del espacio. Con  $P_2$  hay menos problema porque en el medio 2 solo existe la onda transmitida, pero tampoco se debe olvidar que todos los puntos  $P_2$  son un mismo punto del espacio. O con otras palabras: Podemos imaginar 4 transparencias —vea la figura citada—, y luego trasladar horizontalmente de manera que los puntos  $P_1$  se superpongan, y también los puntos  $P_2$ . —Los vectores de la Fig. 3.5 se deben imaginar en cada uno de los puntos cercanos a la interfase, puesto que toda la interfase está siendo iluminada con una onda plana, y toda onda estrictamente plana

tiene un frente de onda que es un plano infinito. Según la condición (3.4) y las Figs. 3.5a y b,  $E_{i\pi} \cos \theta_i + E'_{r\pi} \cos \theta_i = E_{r\pi} \cos \theta_r$ . Reemplazando los campos por ondas planas armónicas,

$$E_{0i,\pi} \text{sen}(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t) \cos \theta_i + E'_{0r,\pi} \text{sen}(\mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{r} - \omega'_r t + \alpha'_{r\pi}) \cos \theta_i = E_{0r,\pi} \text{sen}(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \alpha_{r\pi}) \cos \theta_r.$$

Las  $\alpha$  son constantes de fase relativas a la fase de  $E_{i\pi}$ . Como la última igualdad se cumple en todo  $\mathbf{r}$  de la interfase y en todo  $t$ , las cantidades entre paréntesis deben ser iguales, y las podemos cancelar; y para eliminar la dependencia del tiempo en la condición de frontera, es necesario que  $\omega_i = \omega'_r = \omega_r \equiv \omega$ .

$$E_{0i,\pi} \cos \theta_i + E'_{0r,\pi} \cos \theta_i = E_{0r,\pi} \cos \theta_r.$$

Dividiendo por  $E_{0i,\pi}$  y según las Ecs. (3.3),

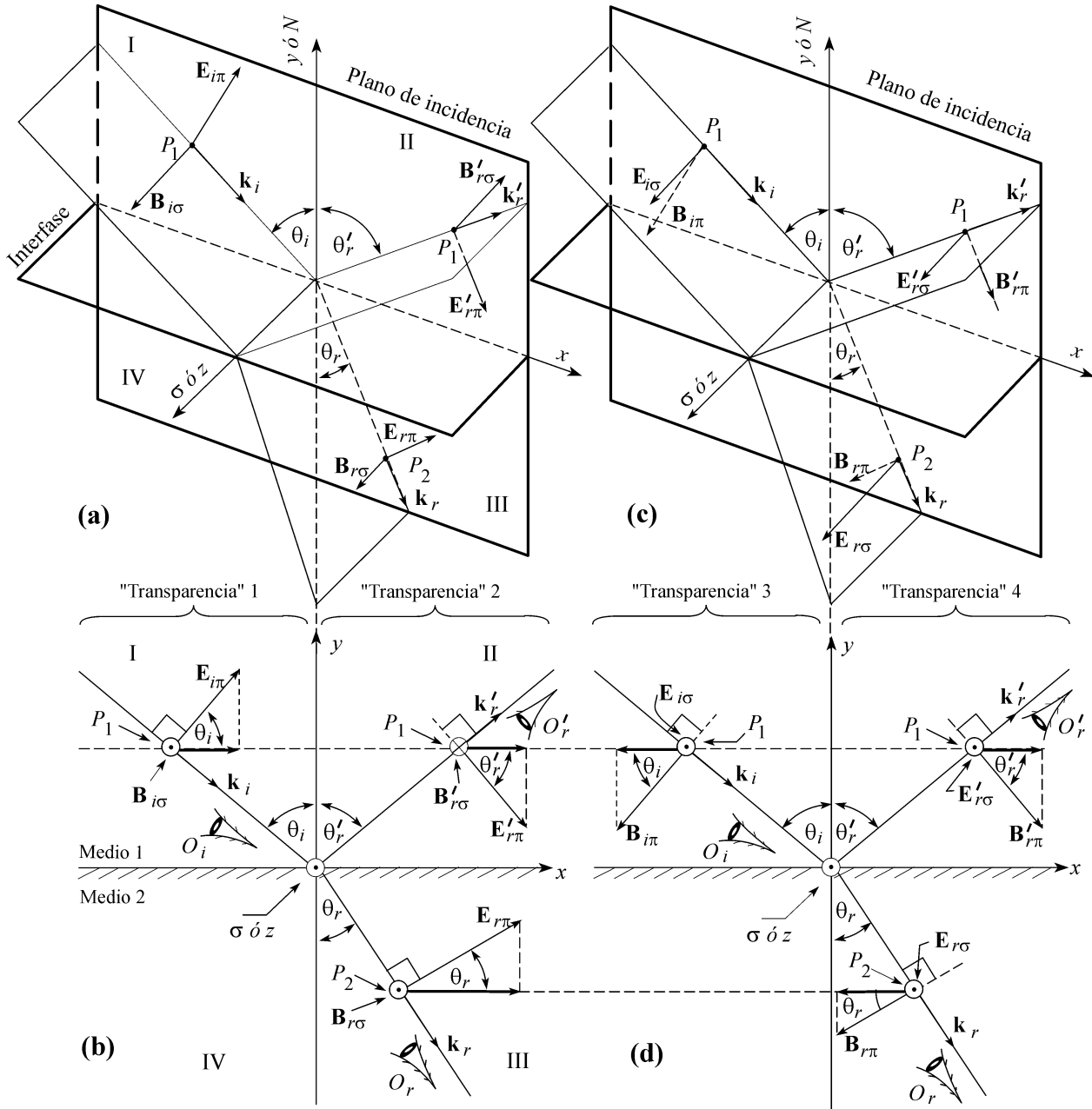
$$\cos \theta_i + R_\pi \cos \theta_i = T_\pi \cos \theta_r. \quad (3.6)$$

Según la condición (3.5) y las Figs. 3.5a y b,

$$B_{i\sigma} - B'_{r\sigma} = B_{r\sigma},$$

$$B_{0i,\sigma} \text{sen}(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) - B'_{0r,\sigma} \text{sen}(\mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha'_r) = B_{0r,\sigma} \text{sen}(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_r).$$

\*De esta condición de frontera es posible deducir las leyes de reflexión y refracción.



**Figura 3.5** (a) y (b): Diagrama de la onda  $\pi$  ( $E_\pi$  y su  $B_\sigma$ ). (c) y (d): Diagrama de la onda  $\sigma$  ( $E_\sigma$  y su  $B_\pi$ ). El diagrama (b) es igual a (a) pero visto de frente, sin perspectiva. (d) es igual a (c), pero visto de frente, sin perspectiva.

Cancelando las funciones seno,

$$B_{0i,\sigma} - B'_{0r,\sigma} = B_{0r,\sigma}. \quad (3.7)$$

Puesto que para una onda plana  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  ( $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$  :  $\mathbf{B}_\sigma = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_\pi$  :  $\mathbf{E}_\pi$  genera a  $\mathbf{B}_\sigma$  y viceversa), entonces cada amplitud  $B_{0\sigma}$  está relacionada con su amplitud asociada  $E_{0\pi}$ :  $B_{0\sigma} =$

$E_{0\pi}/v$ ; introduciendo esta igualdad en la Ec. 3.7,

$$\frac{E_{0i,\pi}}{v_1} - \frac{E'_{0r,\pi}}{v_1} = \frac{E_{0r,\pi}}{v_2}.$$

Multiplicando por  $c$  y reemplazando a  $c/v$  por  $n$ , obtenemos

$$n_1 E_{0i,\pi} - n_1 E'_{0r,\pi} = n_2 E_{0r,\pi}.$$

Dividiendo por  $E_{0i,\pi}$  y según las Ecs. (3.3),

$$n_1 - n_1 R_\pi = n_2 T_\pi. \quad (3.8)$$

Despejando las incógnitas  $R_\pi$  y  $T_\pi$  de las Ecs. (3.6) y (3.8), obtenemos

$$R_\pi = \frac{E'_{0r,\pi}}{E_{0i,\pi}} = \frac{n_1 \cos \theta_r - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i}, \quad T_\pi = \frac{E_{0r,\pi}}{E_{0i,\pi}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i}. \quad (3.9)$$

Hallemos ahora los coeficientes  $\sigma$ .

Según la condición (3.4) y las Figs. 3.5c y d,

$$E_{i,\sigma} + E'_{r,\sigma} = E_{r,\sigma}. \quad (3.10)$$

Reemplazando los campos por ondas planas armónicas,

$$E_{0i,\sigma} \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_\sigma) + E'_{0r,\sigma} \sin(\mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha'_{r\sigma}) = E_{0r,\sigma} \sin(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_{r\sigma})$$

Para que esta ecuación se cumpla en todo  $\mathbf{r}$  de la interfase y en todo  $t$ , las cantidades entre paréntesis deben ser iguales, y las podemos cancelar,

$$E_{0i,\sigma} + E'_{0r,\sigma} = E_{0r,\sigma}.$$

Dividiendo por  $E_{0i,\sigma}$  y según las Ecs. (3.3),

$$1 + R_\sigma = T_\sigma. \quad (3.11)$$

Según la condición (3.5) y las Figs. 3.5c y d —después de cancelar funciones seno—,

$$-B_{0i,\pi} \cos \theta_i + B'_{0r,\pi} \cos \theta_i = -B_{0r,\pi} \cos \theta_r.$$

Reemplazando a  $B_{0\pi}$  por  $E_{0\sigma}/v$ ,

$$-\frac{E_{0i,\sigma} \cos \theta_i}{v_1} + \frac{E'_{0r,\sigma} \cos \theta_i}{v_1} = \frac{E_{0r,\sigma} \cos \theta_r}{v_2}.$$

Multiplicando por  $c$  y reemplazando a  $c/v$  por  $n$ ,

$$-n_1 E_{0i,\sigma} \cos \theta_i + n_1 E'_{0r,\sigma} \cos \theta_i = -n_2 E_{0r,\sigma} \cos \theta_r.$$

Dividiendo por  $E_{0i,\sigma}$  y según las Ecs. (3.3),

$$-n_1 \cos \theta_i + n_1 R_\sigma \cos \theta_i = -n_2 T_\sigma \cos \theta_r. \quad (3.12)$$

Despejando las incógnitas  $R_\sigma$  y  $T_\sigma$  de las Ecs. (3.11) y (3.12), obtenemos

$$R_\sigma = \frac{E'_{0r,\sigma}}{E_{0i,\sigma}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r}, \quad T_\sigma = \frac{E_{0r,\sigma}}{E_{0i,\sigma}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r}. \quad (3.13)$$

### 3.4. Interpretación de los Signos de los Coeficientes

Los signos de  $R$  y  $T$  se deben interpretar de acuerdo con la convención implícita en la Fig. 3.5, pues fue la figura utilizada para hallarlos:

Si  $R_\pi > 0$ ,  $\mathbf{E}_{i\pi}$  y  $\mathbf{E}'_{r\pi}$  estarán orientados en el mismo  $t$  como se muestra en las Figs. 3.5a y b, o cada uno en sentido opuesto al ilustrado; los respectivos  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B}_{i\sigma}$  y  $\mathbf{B}'_{r\sigma}$ ) estarán siempre antiparalelos, o sea en contrafase. Si  $R_\pi < 0$ , solo uno de ellos ( $\mathbf{E}_{i\pi}$  o  $\mathbf{E}'_{r\pi}$ ) tendrá sentido opuesto al ilustrado. Los respectivos  $\mathbf{B}$  estarán siempre paralelos, o sea en fase.

Si  $R_\sigma > 0$ ,  $\mathbf{E}_{i\sigma}$  y  $\mathbf{E}'_{r\sigma}$  estarán siempre paralelos en el mismo  $t$ : cuando uno esté saliendo de la hoja, el otro también lo hará; cuando uno esté entrando a la hoja, el otro también (Figs. 3.5c y d); los respectivos  $\mathbf{B}$  estarán como se ilustra, o ambos con sentido opuesto al ilustrado. Si  $R_\sigma < 0$ ,  $\mathbf{E}_{i\sigma}$  será antiparalelo a  $\mathbf{E}'_{r\sigma}$ . Sólo uno de los  $\mathbf{B}$  asociados ( $\mathbf{B}_{i\sigma}$  o  $\mathbf{B}'_{r\sigma}$ ) tendrá sentido opuesto al ilustrado. Si  $R_\pi$  y  $R_\sigma$  tienen igual signo, y la onda incidente tiene polarización dextrógira, la onda reflejada tendrá polarización levógira, y viceversa. Si  $R_\pi$  y  $R_\sigma$  tienen signos opuestos, no cambiará el sentido de la polarización. Dextrógira es sinónimo de derecha u horaria:  $\odot$ ; levógira es sinónimo de izquierda o contrarreloj:  $\ominus$ .

Puesto que para cualquier  $\theta_i$ ,  $T_\pi \geq 0$  y  $T_\sigma \geq 0$ , no habrá cambios respecto a las orientaciones definidas para los campos transmitidos en la Fig. 3.5; pero no pierda de vista que dichos campos son oscilantes, generalmente cambian millones de veces cada segundo. El sentido de la polarización no puede cambiar por transmisión; si la onda incidente tiene polarización dextrógira o levógira, igual será la polarización de la onda transmitida. Los observadores adecuados para juzgar la polarización son  $O_i$ ,  $O'_r$  y  $O_r$ .

### 3.5. Ángulo de Polarización. Ley de Brewster

La amplitud de los campos eléctricos de la onda reflejada, según las Ecs. (3.3), p. 40, están dados por

$$E'_{0r,\pi} = R_\pi E_{0i,\pi} \quad \text{y} \quad E'_{0r,\sigma} = R_\sigma E_{0i,\sigma}. \quad (3.14)$$

Existe un ángulo de incidencia, llamado *el ángulo polarizante o ángulo de Brewster*  $\theta_B$ , para el que  $R_\pi$  es cero, lo que lleva a que la onda reflejada no tenga componente  $\pi$ , sin importar el valor de  $E_{0i,\pi}$ , Ec. 3.14. O sea que para dicho ángulo la onda reflejada queda polarizada linealmente en dirección  $\sigma$ , *cualquiera sea la polarización de la onda incidente*.

Halleemos el valor de  $\theta_i \equiv \theta_B$  que hace cero a  $R_\pi$ . Según la Ec. 3.9,  $n_1 \cos \theta_r = n_2 \cos \theta_B$ ; según la ley de Snell,  $n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_r$ . De dividir entre sí estas dos últimas ecuaciones obtenemos que  $\sin \theta_B \cos \theta_B = \sin \theta_r \cos \theta_r$ , ó  $\sin 2\theta_B = \sin 2\theta_r$ . Una solución trivial es  $\theta_B = \theta_r$ , lo que implica que no hay cambio de medio; otra solución es  $\theta_B = \pi/2 - \theta_r$  ó  $\theta_B + \theta_r = \pi/2$ .

**Ley de Brewster:** Cuando los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí,  $R_\pi = 0$  y, cualquiera sea la polarización incidente, la luz reflejada tiene polarización lineal, perpendicular al plano de incidencia (Fig. 3.6).

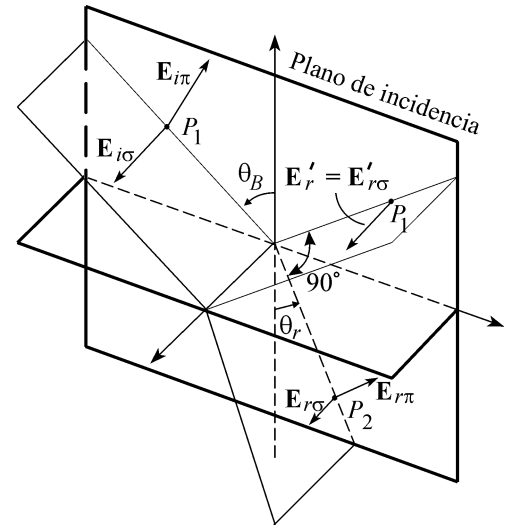


Figura 3.6 Polarización por reflexión.

\*Sir David Brewster (pronúciase *brúster*), físico escocés, 1781-1868, descubrió experimentalmente esta ley en 1812. Inventó el caleidoscopio.

Como  $\theta_B + \theta_r = \pi/2$ , entonces  $\sin \theta_r = \cos \theta_B$ . Reemplazando en la ley de Snell,  $n_i \sin \theta_B = n_2 \cos \theta_B$ , de donde

$$\tan \theta_B = n_{21}.$$

Un caso muy especial en el que no hay onda reflejada, pero sí transmitida, es cuando  $\theta_i = \theta_B$ , lo que elimina a  $E'_{0r,\pi}$ . Si además la onda incidente no tiene componente  $\sigma$  (o sea que tiene polarización  $\pi$ ),  $E_{0i,\sigma} = 0$  y, según la Ec. 3.14, la onda reflejada tampoco la puede tener. Se puede demostrar que no existe  $\theta_i$  para el que  $R_\sigma$  sea cero.

El ejemplo más notable de polarización por reflexión es el arco iris. La luz solar tiene polarización aleatoria; al incidir en las goticas de agua se dispersa y sufre como mínimo una reflexión dentro de las goticas antes de regresar al aire. En esta reflexión la componente  $E'_{0r,\pi}$  se hace muy pequeña, y la luz queda con polarización lineal. Esto se comprueba con el arco iris diario de la fuente de la Universidad de Antioquia, que se presenta aproximadamente

antes de las 9 a. m. y después de las 3 p. m. Cuando se mira a través de una lámina o vidrio polarizado —estos polarizadores están disponible en el Almacén de Física— hay una posición del polarizador para la cual se observa con la máxima intensidad el arco iris con el paisaje como fondo. Cuando el polarizador se rota  $90^\circ$ , desaparece el arco iris (o mejor, los arcos iris, el primario y el secundario) y solo se observa el paisaje.

## Ejemplos y Problemas

◀► **Problema 3.1.** Explique cuál es el error cuando se escribe (a)  $\vec{E}_{0i} = \vec{E}_{0i,\pi} + \vec{E}_{0i,\sigma}$ , (b)  $E_{0i} = E_{0i,\pi} + E_{0i,\sigma}$ , (c)  $E_i = E_{i,\pi} + E_{i,\sigma}$ .

**Ejemplo 3.1.** Una onda plana sonora y una onda plana luminosa inciden a  $10^\circ$  sobre la superficie de un lago (Fig. 3.7). Las flechas más cortas y oscuras representan rayos de luz, mientras que las más largas y claras representan rayos de sonido. Asuma que el sonido se propaga en el aire a 340 m/s y en el agua a 1450 m/s. (a) ¿Cuál es el ángulo entre las direcciones de propagación de ambas ondas en el agua? (b) ¿A partir de qué ángulo de incidencia no se transmite sonido al agua?

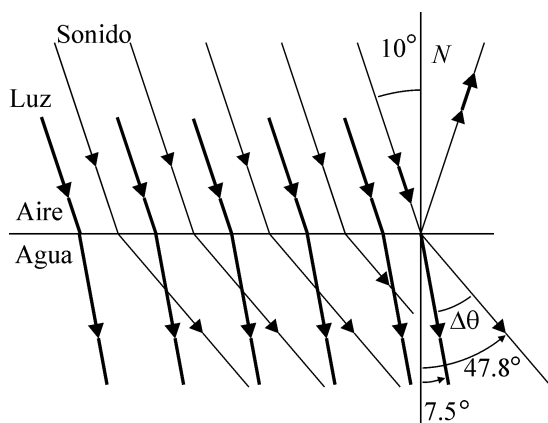


Figura 3.7

*Solución.*

(a) En la figura se ilustran ambas ondas, con un ángulo de incidencia de  $10^\circ$ . Con la ley de Snell hallamos  $\theta_r$  para

la luz,

$$\begin{aligned}\theta_r &= \arcsen[(n_{\text{aire}}/n_{\text{agua}}) \sen \theta_i] \\ &= \arcsen[(1,00/1,33) \sen 10^\circ] = 7,5^\circ.\end{aligned}$$

Para el sonido no podemos aplicar directamente la Ec. 3.1, ya que el índice de refracción se define para ondas electromagnéticas, no para las mecánicas. Sin embargo, de dicha ecuación se puede recuperar la ley de Snell para cualquier onda, recordando que  $n = c/v$ ,

$$v_2 \sen \theta_i = v_1 \sen \theta_r.$$

El ángulo de refracción para el sonido es

$$\begin{aligned}\theta_r &= \arcsen[(v_2/v_1) \sen \theta_i] \\ &= \arcsen[(1450/340) \sen 10^\circ] = 47,8^\circ.\end{aligned}$$

El ángulo pedido es

$$\Delta\theta = \theta_{r,\text{sonido}} - \theta_{r,\text{luz}} = 47,8^\circ - 7,5^\circ = 40,3^\circ.$$

(b) Para el sonido el ángulo crítico es

$$\begin{aligned}\theta_c &= \arcsen[(v_1/v_2) \sen 90^\circ] = \arcsen(340/1450) \\ &= 13,6^\circ.\end{aligned}$$

No hay sonido transmitido si  $\theta_i > 13,6^\circ$ . Como la luz, al contrario del sonido, disminuye de velocidad al pasar del aire al agua, para cualquier  $\theta_i < 90^\circ$  habrá luz transmitida al agua.

◀► **Problema 3.2.** Sabiendo que  $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ , muestre que  $B_{\pi,\sigma} = E_{\sigma,\pi}/v$ .

**Ejemplo 3.2.** Un haz de luz incide sobre una interfase. (a) Halle expresiones para las fracciones de potencia reflejada y transmitida en función de  $R$ . A la fracción reflejada se le llama la reflectancia  $\mathcal{R}$ , y a la fracción transmitida la transmitancia  $\mathcal{T}$ :  $\mathcal{R} \equiv P'_r/P_i$ ,  $\mathcal{T} \equiv P_r/P_i$ . (b) Evalúe los coeficientes de Fresnel y la reflectancia y la transmitancia para incidencia normal. (c) Evalúe los porcentajes de energía —por unidad de tiempo— reflejada y transmitida si la incidencia es normal, el medio 1 es aire y el medio 2 agua, vidrio o diamante.

**Solución.**

(a) Si consideramos un haz incidente de área transversal  $A_i$  (Fig. 3.8), el área transversal del haz reflejado es  $A'_r = A_i$  puesto que  $\theta'_r = \theta_i$ .

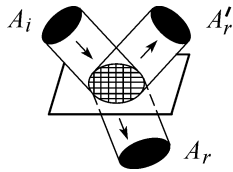


Figura 3.8

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{P'_r}{P_i} = \frac{I'_r A'_r}{I_i A_i} = \frac{I'_r}{I_i} = \frac{v_1 E'_r}{v_1 E_i} = \frac{E'_r}{E_i} = \frac{\frac{1}{2} \epsilon_1 E'^2_{0r}}{\frac{1}{2} \epsilon_1 E^2_{0i}} \\ &= \frac{E'^2_{0r}}{E^2_{0i}} = \left( \frac{E'_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = R^2.\end{aligned}$$

Por conservación de la energía, la energía promedio por unidad de tiempo que pasa a través de  $A_i$  debe ser igual a la energía promedio por unidad de tiempo que pasa a través de  $A'_r$  más la energía promedio por unidad de tiempo que pasa a través del área transversal del haz transmitido  $A_r$ :  $P_i = P'_r + P_r$ , ó, dividiendo por  $P_i$ ,  $1 = P'_r/P_i + P_r/P_i = \mathcal{R} + \mathcal{T}$ ; de donde  $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R} = 1 - R^2$ . En resumen,

$$\mathcal{R} = R^2, \quad \mathcal{T} = 1 - R^2.$$

Las anteriores expresiones se cumplen para cada onda  $\pi$  ó  $\sigma$  y para todo  $\theta_i$ .

(b) Reemplazando  $\theta_i = 0$  y  $\theta_r = 0$  en las Ecs. (3.9) y (3.13), obtenemos

$$R_\pi = R_\sigma = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad T_\pi = T_\sigma = \frac{2n_1}{n_1 + n_2};$$

por lo tanto, las ondas reflejadas  $\pi$  y  $\sigma$  tienen igual intensidad ya que las reflectancias  $\pi$  y  $\sigma$  son iguales, al igual que las áreas transversales de los haces. Lo mismo ocurre con las ondas transmitidas  $\pi$  y  $\sigma$  si la incidencia es normal.

$$\mathcal{R}_{\pi \text{ ó } \sigma} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad \mathcal{T}_{\pi \text{ ó } \sigma} = \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2$$

(c)  $\%P'_r = 100\mathcal{R} = 100R^2$ ,  $\%P_r = 100\mathcal{T} = 100(1 - R^2)$ . Para aire-agua ( $n_1 \approx 1,00$  y  $n_2 = 1,33$ ) obtenemos,

$$\%P'_r = 2\%, \quad \%P_r = 98\%;$$

para aire-vidrio ( $n_1 \approx 1,0$  y vidrio de  $n_2 = 1,5$ ) obtenemos,

$$\%P'_r = 4\%, \quad \%P_r = 96\%;$$

para aire-diamante ( $n_1 \approx 1,0$  y  $n_2 = 2,4$ ) obtenemos,

$$\%P'_r = 17\%, \quad \%P_r = 83\%.$$

**Ejemplo 3.3.** Un haz de luz de sección transversal  $A_i$  incide sobre una interfase plana. Si la sección transversal del haz refractado es  $A_r$ , demuestre que

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{\cos \theta_r}{\cos \theta_i}.$$

**Solución.** En la Fig. 3.9 mostramos las secciones transversales de los haces incidente, reflejado y transmitido.

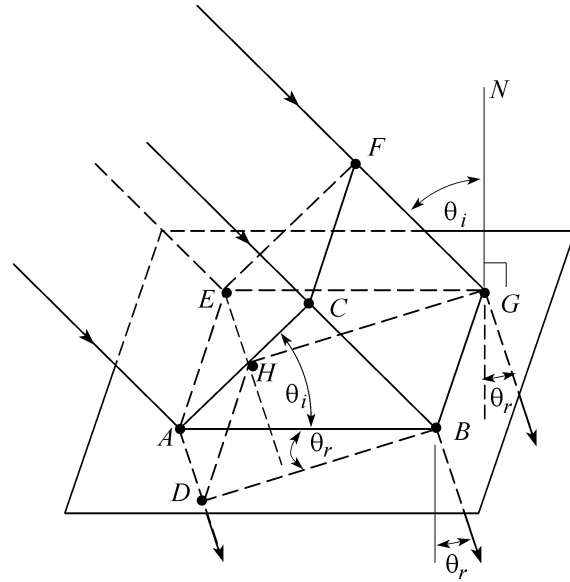


Figura 3.9

La sección transversal del haz incidente  $A_i$  es el área del rectángulo  $ACFE$ , para el haz refractado es la del rectángulo  $DBGH$ ,

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{(\overline{BG})(\overline{DB})}{(\overline{AE})(\overline{AC})}. \quad (3.15)$$

Pero  $\overline{BG} = \overline{AE}$ ,  $\overline{AC} = \overline{AB} \cos \theta_i$  y  $\overline{DB} = \overline{AB} \cos \theta_r$ . Reemplazando en la Ec. 3.15,

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{\cos \theta_r}{\cos \theta_i}. \quad (3.16)$$

►► **Problema 3.3.** ¿Es válida la Ec. 3.16 cualquiera sea la forma de la sección transversal del haz, o lo es únicamente para una sección rectangular (Fig. 3.9)?

**Ejemplo 3.4.** ¿Cuándo se cumple que  $I_i = I'_r + I_r$ ?

*Solución.* Por conservación de la energía,

$$\begin{aligned} P_i &= P'_r + P_r, \\ I_i A_i &= I'_r A'_r + I_r A_r. \end{aligned}$$

Sólo si  $A_i = A'_r = A_r$  se puede obtener  $I_i = I'_r + I_r$ . Y las áreas sólo son iguales para incidencia normal,  $\theta_i = 0$  (vea el Ejemplo 3.3). En el caso de una cuerda compuesta, también se halla que  $I_i = I'_r + I_r$  solo si los radios de las secciones 1 y 2 de la cuerda son iguales.

►► **Problema 3.4.** Demuestre que, en las direcciones  $\pi$  ó  $\sigma$ ,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_{\pi \text{ ó } \sigma} &= R_{\pi \text{ ó } \sigma}^2 \\ \mathcal{T}_{\pi \text{ ó } \sigma} &= \frac{n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i} T_{\pi \text{ ó } \sigma}^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

La conservación de la energía exige que  $P'_r/P_i + P_r/P_i = 1$ . Utilice este hecho para probar también que  $R_{\pi \text{ ó } \sigma}^2 + \frac{n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i} T_{\pi \text{ ó } \sigma}^2 = 1$ .

**Ejemplo 3.5.** Evalúe los coeficientes de Fresnel para incidencia rasante e interprete los resultados.

*Solución.* Incidencia rasante quiere decir  $\theta_i \rightarrow 90^\circ$ ; reemplazando en las Ecs. (3.9) y (3.13),

$$\begin{aligned} \lim_{\theta_i \rightarrow 90^\circ} R_\pi &= \frac{n_1 \cos \theta_r - n_2 \cos 90^\circ}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos 90^\circ} = \frac{n_1 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_r} = 1, \\ \lim_{\theta_i \rightarrow 90^\circ} R_\sigma &= \frac{n_1 \cos 90^\circ - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos 90^\circ + n_2 \cos \theta_r} = \frac{-n_2 \cos \theta_r}{n_2 \cos \theta_r} = -1, \\ \lim_{\theta_i \rightarrow 90^\circ} T_\pi &= \frac{2n_1 \cos 90^\circ}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos 90^\circ} = \frac{0}{n_1 \cos \theta_r} = 0, \\ \lim_{\theta_i \rightarrow 90^\circ} T_\sigma &= \frac{2n_1 \cos 90^\circ}{n_1 \cos 90^\circ + n_2 \cos \theta_r} = \frac{0}{n_2 \cos \theta_r} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto las amplitudes reflejadas no cambian por ser de magnitud 1 los coeficientes de reflexión, ni el sentido de la polarización por tener signos opuestos  $R_\pi$  y  $R_\sigma$ . La intensidad de la luz transmitida tiende a cero a medida que  $\theta_i \rightarrow 90^\circ$ ; toda la luz se refleja. Esto está de acuerdo con la observación cotidiana con un vidrio: aunque sea transparente para incidencia normal (solo refleja el 4%, y por lo tanto es malo como espejo), para incidencia oblicua es sumamente reflectivo y actúa como un buen espejo.

**Ejemplo 3.6.** Una onda plana polarizada linealmente incide sobre una superficie de agua ( $n = 1,33$ ), con un ángulo de  $20^\circ$ . La amplitud del campo eléctrico incidente es 100 V/m. Determine la amplitud de las ondas reflejada y transmitida y sus fases relativas a la fase de

la onda incidente, si el ángulo entre  $\mathbf{E}_i$  y el plano de incidencia es  $90^\circ$ .

*Solución.* Por defecto, el otro medio es aire,  $n_1 = 1,00$ . De la ley de Snell obtenemos que  $\theta_r = \arcsen\left(\frac{1,00 \sen 20^\circ}{1,33}\right) = 14,9^\circ$ .

Los campos eléctricos del ejemplo se muestran en la Fig. 3.10. Diferencie claramente entre  $\theta_i$  y el ángulo entre  $\mathbf{E}_i$  y el plano de incidencia, pues son totalmente independientes entre sí.

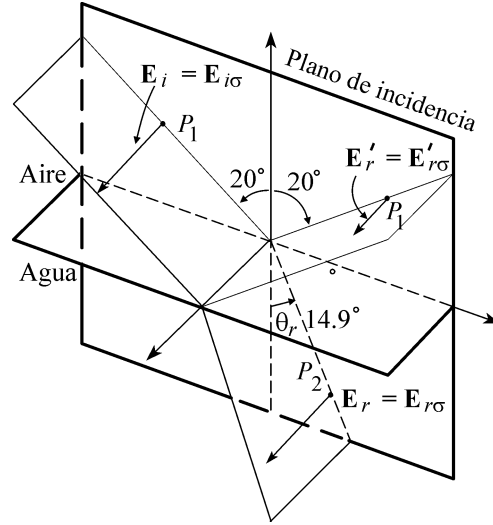


Figura 3.10

El que el ángulo entre  $\mathbf{E}_i$  y el plano de incidencia sea  $90^\circ$  quiere decir que  $E_{i\pi} = 0$  y en consecuencia  $E_{0i,\pi} = 0$ . Según las Ecs. (3.2), p. 39,  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i\sigma}$ .

Según las Ecs. (3.3),  $E'_{0r,\pi} = R_\pi E_{0i,\pi} = R_\pi 0 = 0$  y  $E_{0r,\pi} = T_\pi E_{0i,\pi} = T_\pi 0 = 0$ . Estas amplitudes son cero, cualquiera sean los valores de  $R_\pi$  y  $T_\pi$ ; **no es necesario conocer el valor de estos dos coeficientes**. Sin embargo, cuando se evalúan con las Ecs. (3.9), p. 42, se obtiene  $R_\pi = -0,128$  y  $T_\pi = 0,848$ . Como no hay luz reflejada ni transmitida  $\pi$ , se suele decir que estos coeficientes son cero, pero vemos claramente que no es cierto. No hay luz reflejada ni transmitida  $\pi$  porque la luz incidente no trae componente  $\pi$ , no porque los respectivos coeficientes sean cero.

Falta evaluar  $R_\sigma$  y  $T_\sigma$ . Aplicando las Ecs. (3.13), p. 42,

$$\frac{E'_{0r,\sigma}}{E_{0i,\sigma}} = R_\sigma = -0,155, \quad \frac{E_{0r,\sigma}}{E_{0i,\sigma}} = T_\sigma = 0,845.$$

$R_\pi$  y  $R_\sigma$  tienen igual signo, pero como la polarización es lineal es absurdo decir que el sentido de la polarización cambia.

Las amplitudes pedidas son

$$E'_{0r,\sigma} = R_\sigma E_{0i,\sigma} = -0,155 \times 100 = -15,5 \text{ V/m},$$

$$E_{0r,\sigma} = T_\sigma E_{0i,\sigma} = 0,845 \times 100 = 84,5 \text{ V/m}.$$



El signo  $(-)$  no significa que  $E'_{0r,\sigma}$  sea negativa (las amplitudes siempre son positivas) sino que  $\mathbf{E}_i$  y  $\mathbf{E}'_r$  están en contrafase,  $\delta = \pm\pi$ : cuando un vector entra al plano de incidencia, el otro sale, al contrario de lo que muestra la figura. Como  $T$  siempre es positivo,  $\mathbf{E}_i$  y  $\mathbf{E}_r$  siempre están en fase: ambos vectores salen del plano de incidencia, se hacen cero, o entran al plano de incidencia simultáneamente.

El campo eléctrico neto en  $P_1$  es  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}'_r$  (ambos vectores están en mismo punto a una distancia infinitesimal de la interfase). La amplitud de  $\mathbf{E}_1$ ,  $E_{01}$ , se puede hallar con la ley del coseno, pero escribiendo la amplitud  $E'_{0r,\sigma}$  con valor absoluto, pues le estamos dando la posibilidad de estar antecedida por el signo  $(-)$ :

$$\begin{aligned} E_{01} &= \sqrt{E_{0i,\sigma}^2 + 2E_{0i,\sigma}|E'_{0r,\sigma}|\cos\delta + E_{0r,\sigma}^2} \\ &= \sqrt{E_{0i,\sigma}^2 - 2E_{0i,\sigma}|E'_{0r,\sigma}| + E_{0r,\sigma}^2} = E_{0i,\sigma} - |E'_{0r,\sigma}| \\ &= 100 - | -15,5 | = 84,5 \text{ V/m.} \end{aligned}$$

Vemos que, efectivamente, la condición de frontera expresada por la Ec. 3.10, p. 42, sí se cumple.

**Ejemplo 3.7.** Un haz de luz polarizada circularmente, de 1 W de potencia, incide sobre una superficie de vidrio ( $n = 1,5$ ) con un ángulo de  $45^\circ$ . (a) Describa con detalle el estado de polarización de los haces reflejado y refractado. (b) Halle la reflectancia y la transmitancia. (c) Halle la potencia reflejada y la transmitida.

*Solución.*

(a) Los cambios en la polarización los determinan los coeficientes de Fresnel. Debemos suponer que el medio 1 es aire,  $n_1 = 1,0$ ;  $n_2 = 1,5$ ,  $\theta_i = 45^\circ$ .

De la ley de Snell,

$$\theta_r = \arcsen\left(\frac{1,0 \sen 45^\circ}{1,5}\right) = 28,13^\circ.$$

Reemplazando los anteriores valores en las Ecs. (3.9) y (3.13), obtenemos

$$\begin{aligned} R_\pi &= -0,092, & T_\pi &= 0,728, \\ R_\sigma &= -0,303, & T_\sigma &= 0,697. \end{aligned}$$

Como la luz incidente tiene polarización circular,  $E_{0i,\pi} = E_{0i,\sigma}$ . Así,

$$\begin{aligned} E'_{0r,\pi} &= R_\pi E_{0i,\pi} = -0,092 E_{0i,\pi} \\ E'_{0r,\sigma} &= R_\sigma E_{0i,\sigma} = -0,303 E_{0i,\sigma}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $E'_{0r,\pi} \neq E'_{0r,\sigma}$ : la onda reflejada tiene polarización elíptica, con la amplitud  $\sigma$  3.3 veces la amplitud  $\pi$  ( $E'_{0r,\sigma}/E'_{0r,\pi} = 0,303/0,092 = 3,3$ ). Como  $R_\pi$  y  $R_\sigma$  tienen signos iguales, el sentido de la polarización sí cambia, juzgado por el observador  $O'_r$  de las Figs. 3.5b y d.

Con argumentación análoga a la del anterior párrafo, concluimos que  $E_{0r,\pi} \neq E_{0r,\sigma}$ . Pero la elipse correspondiente al campo eléctrico transmitido es mucho menos excéntrica que la reflejada:  $E_{0r,\sigma}/E_{0r,\pi} = 0,697/0,728 = 0,96$ . Como  $T_\pi$  y  $T_\sigma$  siempre son positivos, el *sentido de la polarización* de la onda refractada nunca cambia —aunque pueda pasar de circular a elíptica—, juzgado por el observador  $O_r$  de las Figs. 3.5b y d.

(b) Según la Ec. 3.17 del Problema 3.4,

$\mathcal{R}_\pi = 0,092^2 = 0,0085$ : el 0.85 % de la energía de la onda incidente  $\pi$  se refleja.

$\mathcal{R}_\sigma = 0,303^2 = 0,092$ : el 9.2 % de la energía de la onda incidente  $\sigma$  se refleja.

$\mathcal{T}_\pi = \frac{1,5 \cos 28,13^\circ}{1,0 \cos 45^\circ} 0,728^2 = 0,9915$ : el 99.15 % de la energía de la onda incidente  $\pi$  se refracta.

$\mathcal{T}_\sigma = \frac{1,5 \cos 28,13^\circ}{1,0 \cos 45^\circ} 0,697^2 = 0,908$ : el 90.8 % de la energía de la onda incidente  $\sigma$  se refracta.

(c) Como la onda incidente tiene polarización circular, la amplitud de la onda incidente  $\pi$  es igual a la de la onda incidente  $\sigma$ , y esto lleva que sus potencias sean iguales:

$$1 \text{ W} = P_{i\pi} + P_{i\sigma} = 2P_{i\pi} = 2P_{i\sigma},$$

de donde

$$P_{i\pi} = P_{i\sigma} = 0,5 \text{ W},$$

$$\begin{aligned} P'_r &= P'_{r\pi} + P'_{r\sigma} = \mathcal{R}_\pi P_{i\pi} + \mathcal{R}_\sigma P_{i\sigma} \\ &= 0,0085 \times 0,5 + 0,092 \times 0,5 \\ &= 0,05 \text{ W}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_r &= P_{r\pi} + P_{r\sigma} = \mathcal{T}_\pi P_{i\pi} + \mathcal{T}_\sigma P_{i\sigma} \\ &= 0,9915 \times 0,5 + 0,908 \times 0,5 \\ &= 0,95 \text{ W}. \end{aligned}$$

De la energía incidente se refleja el 5 % y se transmite el 95 %.

**Ejemplo 3.8.** Un haz de luz polarizada linealmente incide sobre una superficie de vidrio de índice de refracción 1.5, con un ángulo de  $45^\circ$ . El ángulo  $\beta_i$  entre  $\mathbf{E}_i$  y el plano de incidencia es de  $30^\circ$  (Fig. 3.11). Halle (a) el ángulo  $\beta'_r$  entre  $\mathbf{E}'_r$  y el plano de incidencia, (b) el ángulo  $\beta_r$  entre  $\mathbf{E}_r$  y el plano de incidencia.

*Solución.* Los coeficientes de Fresnel tienen los mismos valores del Ejemplo 3.7. De la figura vemos que (a)

$$\begin{aligned} \tan \beta'_r &= \frac{E'_{0r,\sigma}}{E'_{0r,\pi}} = \frac{R_\sigma E_{0i,\sigma}}{R_\pi E_{0i,\pi}} = \frac{R_\sigma E_i \sen \beta_i}{R_\pi E_i \cos \beta_i} = \frac{R_\sigma}{R_\pi} \tan \beta_i \\ &= \frac{-0,303}{-0,092} \tan 30^\circ = 1,9, \end{aligned}$$

de donde

$$\beta'_r = \arctan 1,9 = 62,9^\circ.$$

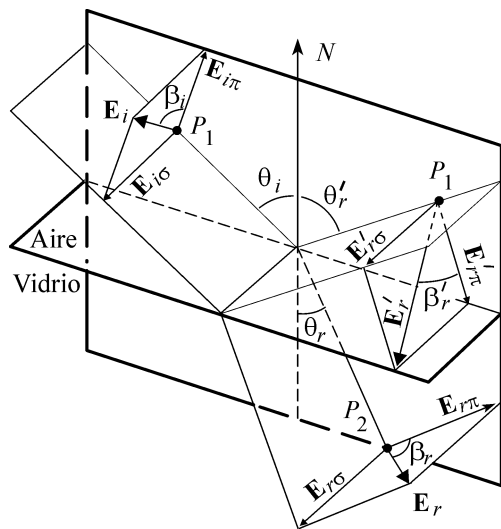


Figura 3.11

Debido a los signos negativos de  $R_\pi$  y  $R_\sigma$ ,  $E'_r$  tie-

ne dirección opuesta a la mostrada en la figura, en los instantes en que  $E_i$  está orientado como se ilustra.

(b)

$$\begin{aligned}\tan \beta_r &= \frac{E_{0r,\sigma}}{E_{0r,\pi}} = \frac{T_\sigma E_{0i,\sigma}}{T_\pi E_{0i,\pi}} = \frac{T_\sigma E_i \sin \beta_i}{T_\pi E_i \cos \beta_i} = \frac{T_\sigma}{T_\pi} \tan \beta_i \\ &= \frac{0,697}{0,728} \tan 30^\circ = 0,55,\end{aligned}$$

de donde

$$\beta_r = \arctan 0,55 = 28,9^\circ.$$

◀► **Problema 3.5.** Si en el Ejemplo 3.7,  $E_i(\mathbf{r}, t) = E_{i\pi} + E_{i\sigma} = \mathbf{u}_\pi E_0 \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \mathbf{u}_\sigma E_0 \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ , donde  $\mathbf{u}_\pi$  es un vector unitario en la dirección  $L_{i\pi}$  de la Fig. 3.3, y  $\mathbf{u}_\sigma = \mathbf{u}_z$  es un vector unitario en la dirección  $\sigma$  ó  $z$ , halle el sentido de polarización de la onda incidente.

Ayuda. Este problema es igual al Ejemplo 2.3, p. 32; basta con cambiar al eje  $x$  por  $\mathbf{k}_i$ , a  $E_z$  por  $E_{i\sigma}$  y a  $E_y$  por  $E_{i\pi}$ .

# 4

## ÓPTICA GEOMÉTRICA

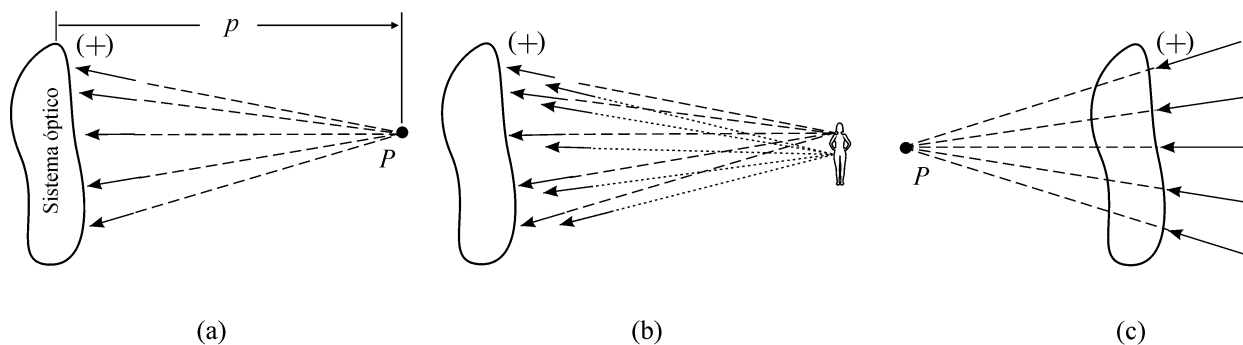
La propagación de la luz en un medio y lo que le ocurre cuando llega a una superficie o interfase donde comienza un medio distinto, se puede investigar con las ecuaciones de Maxwell. Generalmente esto es de una gran complejidad, y en muchas situaciones parte de la información que se obtiene puede lograrse con un método mucho más sencillo que se llama *Óptica Geométrica*, donde hay que saber poco de la física de la luz. Por ejemplo, no es necesario saber que es una onda, que tiene campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , que es transversal; no es necesario tampoco hablar de fase, ni de polarización, ni de coeficientes de Fresnel. De física solo son necesarias las leyes de reflexión y de refracción, el resto es geometría euclidiana.

La óptica geométrica se cumple siempre que la longitud de onda de la luz sea mucho menor que los objetos con los que la luz interacciona. El concepto fundamental es el de *rayo*; se debe mantener presente que un rayo tiene dirección y sentido: los de la propagación de la luz.

Lo más importante en la óptica geométrica es hallar los cambios en la dirección de propagación de los rayos a medida que se encuentra con cambios en el medio. Para lograrlo, nos valemos de los conceptos de *objeto* ( $P$ ) y de *imagen* ( $Q$ ).

**Convención de Signos.** Un sistema óptico es un dispositivo físico al que le llega luz, y del que sale luz. En la Fig. 4.1a lo representamos con una curva cerrada, y puede ser una superficie reflectiva o refractiva, o una combinación de estas como un microscopio o un telescopio.

El lado positivo de un sistema es por donde le llegue la luz, negativo es el lado opuesto (muchos textos siguen una convención diferente). En la Fig. 3.2a, p. 38, vemos que la luz que sale por reflexión *siempre* está en lado positivo (por ejemplo, en espejos) y la que sale por refracción *siempre* está en el lado negativo (por ejemplo, en lentes o la luz que penetra en el ojo).



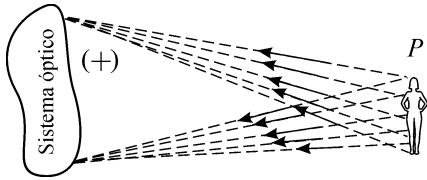
**Figura 4.1** Sistema óptico y objeto. (a) Objeto puntual y real, (b) Objeto macroscópico real, (c) Objeto puntual y virtual.

**Objeto Real o Virtual.** Un *objeto óptico*  $P$  es el lugar de intersección de los rayos que llegan al sistema.\* Debemos diferenciarlo de un *objeto físico*, que es un conglomerado de partículas. Cuando en óptica hablamos de *objeto*, debemos sobreentender que nos referimos a un objeto óptico y

\*La idea de que los rayos emanan en todas las direcciones desde cada punto de un objeto físico se debe a Francesco Maurolico de Messina, 1494-1575. Vasco Ronchi, *Optics. The Science of Vision*, p. 39, Ed. Dover, 1991.

no a un objeto físico. En cambio, en la vida cotidiana cuando hablamos de *objeto* nos referimos a objetos físicos. A veces un objeto óptico coincide con un objeto físico, pero con frecuencia no es así.

Si los rayos que llegan al sistema se intersecan físicamente, o **mediante prolongaciones**, en un punto, el objeto es puntual. A menudo hablamos de objetos puntuales, aunque en la realidad los objetos no lo sean, pues tienen algún volumen. Pero esto no es una limitación, pues la superficie del objeto macroscópico o extendido la consideramos conformada por un infinito número de objetos puntuales. En la Fig. 4.1b ilustramos dos de esos puntos.



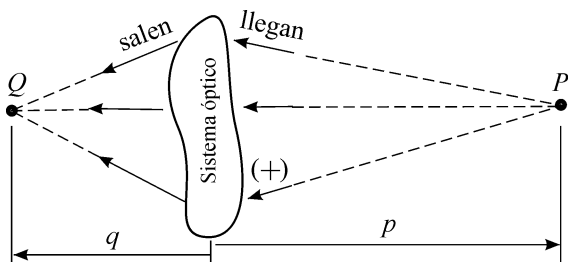
**Figura 4.2** A cada punto del sistema le llega información de todo el objeto.

Al sistema de cada punto le llegan infinito número de rayos, y hay infinitos puntos. Basta, como dijimos, con considerar un solo punto, pues a los demás les aplicamos el mismo análisis. El recíproco de lo anterior también es cierto: a cada punto del lado del sistema por donde entra la luz llega un rayo de cada uno de los puntos del objeto; o con otras palabras: *a cada punto del sistema le llega información de todo el objeto* (Fig. 4.2).

Si los rayos llegan divergentes (esto es, alejándose entre sí en el sentido en que se propaga la luz), el objeto puntual  $P$  se denomina un *objeto real*, y es el caso ilustrado en la Fig. 4.1a, donde el lugar de intersección está en sentido opuesto al de aproximación de los rayos al sistema. Necesariamente  $P$  está en el lado positivo, y su distancia  $p$ , llamada la *distancia objeto*, es  $(+)$ :  $p = |p|$ .

Si llegan convergentes (esto es, acercándose entre sí en el sentido en que se propaga la luz), se denomina un *objeto virtual* (Fig. 4.1c), y el lugar de intersección necesariamente está en el mismo sentido en que se aproximan los rayos. O sea que  $P$  está al otro lado del sistema por donde llega la luz, el lado negativo, y  $p$  es  $(-)$ :  $p = -|p|$ .

Se debe evitar la fuerte tendencia a pensar al *objeto* (óptico, por supuesto) como el lugar de donde salen físicamente los rayos; a veces es así, pero a veces no. En su lugar, *se debe pensar como el lugar de intersección de los rayos que llegan al sistema, así sea con prolongaciones, como se ilustra mediante las líneas a trazos de las figuras*. Dicha tendencia se origina en que los rayos provenientes de un punto de un objeto físico sí salen del punto, y siempre llegan divergentes al sistema. En consecuencia, *todo objeto físico es un objeto (óptico) real*,  $p > 0$  (pero no viceversa).



**Figura 4.3** Los rayos llegan al sistema con cierta inclinación, el sistema los transforma, y salen con diferente ángulo.

Sea consciente de que con las palabras *objeto real* en óptica no nos referimos a lo que se quiere decir en la vida cotidiana, que es un objeto físico que sí existe, en oposición a un objeto imaginado. En óptica queremos decir que los rayos asociados a  $P$  llegan divergentes al sistema, como lo harían si los rayos provinieran de un objeto físico situado en  $P$  (Fig. 4.1a).

**Imagen Real o Virtual.** Llamamos *imagen*  $Q$  al lugar de intersección de los rayos que salen del sistema y *distancia imagen*  $q$  a la distancia de  $Q$  al sistema (Fig. 4.3).

Se debe evitar la fuerte tendencia a pensar la imagen como el lugar donde físicamente se intersecan los rayos que salen; a veces es así, pero a veces no. En cualquier caso, es la intersección de las prolongaciones de los rayos que salen, como se ilustra mediante las líneas a trazos de las figuras.

El problema principal de la óptica geométrica es: ¿Cuál es el lugar de intersección de los rayos

que salen del sistema, conocidos el lugar de intersección de los rayos que llegan y las características del sistema? O de otra manera: ¿qué  $Q$  le corresponde a  $P$ ?

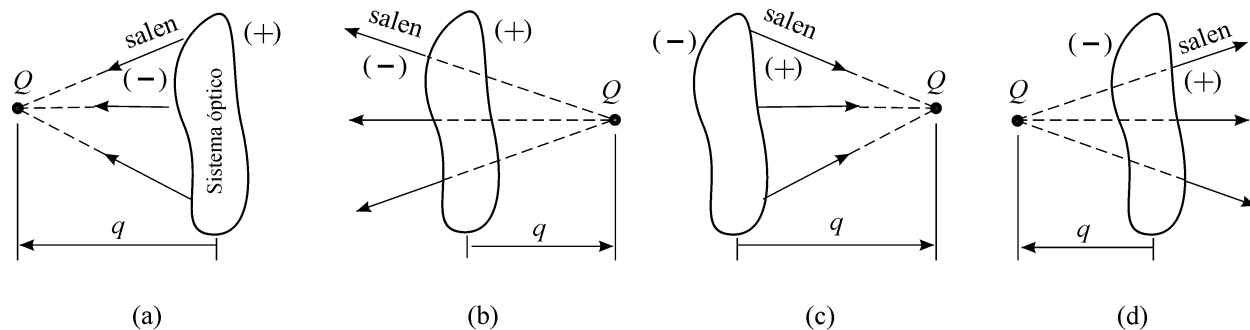
Vemos que la función de un sistema óptico consiste en recibir unos rayos, procesarlos, y entregarlos con direcciones diferentes.

Si a un objeto puntual le corresponde una imagen puntual, el sistema se denomina un *sistema óptico perfecto*. Pero la perfección no es de este mundo, y los rayos que salen nunca se intersecan en un solo punto. Decimos entonces que el sistema sufre de *aberraciones* o defectos. Entre menos se aleje del ideal de que a  $P$  puntual le corresponda una  $Q$  puntual, o sea que tenga menos aberraciones, mejor y mas costoso es el sistema.

Cuando se vea en *Óptica Física* el tema de *Difracción*, se verá que a un objeto puntual nunca le corresponde una imagen puntual, no por una aberración del sistema, sino como una manifestación intrínseca de la naturaleza ondulatoria de la luz.

En los cuatro dibujos de la Fig. 4.4 se ilustran rayos que salen del sistema óptico; no se muestran los que llegan, que son los que definen el lado (+). La luz puede salir por el lado opuesto por donde entró (figuras a y b), como en una lente o la luz mediante la que vemos, que es la que penetra al ojo. También puede salir por el mismo lado por donde llegó (figuras c y d), como la luz que se refleja en las caras de una lente, o la que se refleja en el ojo y produce las imágenes que vemos cuando miramos a los otros a los ojos. Una interfase puede producir simultáneamente imágenes por reflexión y por refracción.

Si los rayos salen convergentes, o sea acercándose entre sí en el sentido en que avanza la luz, la imagen se denomina una *imagen real*. En la Fig. 4.4a se ilustra cuando los rayos salen por el lado opuesto por donde llega la luz; como salen convergentes, el lugar de intersección está en el sentido en que avanza la luz, en el lado (-), y  $q$  es (-) :  $q = -|q|$ . En la Fig. 4.4c, se ilustra cuando salen por el mismo lado por donde llega la luz al sistema y, por ser convergentes, se intersecan en el mismo sentido de los rayos, en el lado (+), y  $q$  es (+) :  $q = |q|$ .

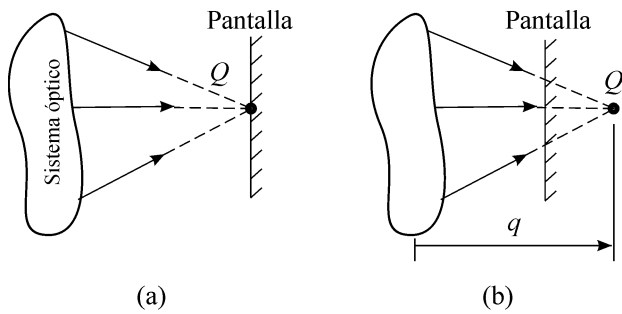


**Figura 4.4** (a) y (c) son imágenes reales, (b) y (d) son virtuales.

Si los rayos salen divergentes, o sea alejándose entre sí en el sentido en que avanza la luz, la imagen se denomina una *imagen virtual*. En la Fig. 4.4b se ilustra cuando los rayos salen por el lado opuesto por donde llega la luz; como salen divergentes, el lugar de intersección es el sentido opuesto en el que avanza la luz, en el lado (+), y  $q$  es (+). En la Fig. 4.4d, se ilustra cuando salen por el mismo lado por donde llega la luz al sistema y, por ser divergentes, se intersecan en el lado (-), y  $q$  es (-).

Se comprenderá que no es posible proyectar las imágenes virtuales (o sea rayos divergentes, Figs. 4.4b y d) en una pantalla, pues la luz de la imagen asociada con cada punto del objeto se abre cada vez más dando una imagen borrosa. La pantalla habría que ponerla en  $Q$  para observar una

imagen nítida, pero en  $Q$  no hay luz asociada con la imagen.



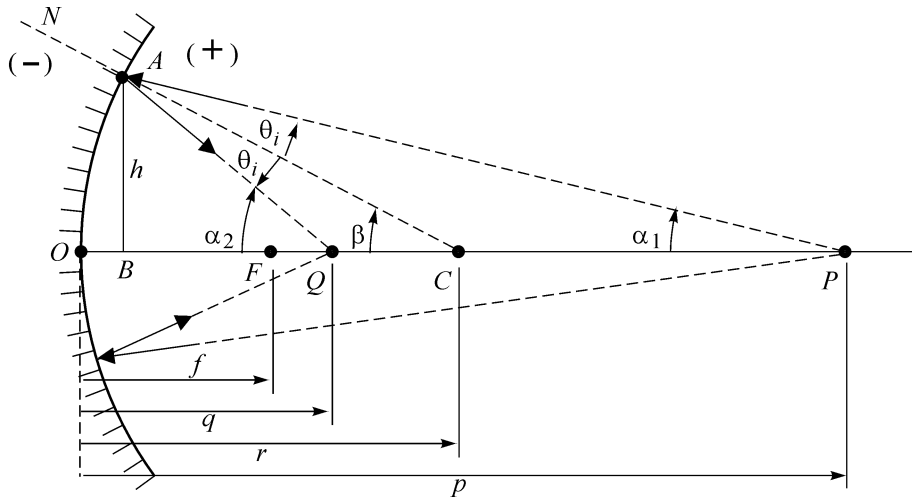
**Figura 4.5** Ubicación de una pantalla para observar una imagen real.

La imagen real sí es posible, poniendo la pantalla en el lugar dado por  $Q$  (Fig. 4.5a). Pero si no se ubica en  $Q$  (Fig. 4.5b), lo que se observe en ella no es la imagen, aunque en la vida cotidiana se le llame así; *la imagen, a pesar de no ser visible, sigue siendo real y ubicada en  $Q$ !*

**Más sobre los Signos.** Con mayúsculas, por lo general, denotamos puntos, y con minúsculas la distancia de los puntos al sistema. Las distancias las tratamos algebraicamente, esto es, intrínsecamente pueden ser negativas, cero o positivas. Por ejemplo, con la letra  $q$  denotamos la distancia de  $Q$ . Si  $Q$  está al otro lado de donde llega la luz, es negativa y aún en este caso es-

cribimos  $q$  y no  $-q$ . Escribiendo  $-q$  no garantizamos que la distancia imagen sea negativa, porque si  $q$  es negativa,  $-q$  es positiva. La forma correcta de garantizar que  $q$  sea negativa es escribiendo  $q = -|q|$ , y no  $|q| = -q$ ; y para garantizar que sea positiva,  $q = |q|$ .

## 4.1. Reflexión en una Superficie Esférica



**Figura 4.6** Geometría de la reflexión de rayos.

Sea nuestro sistema un cascarón esférico reflectivo con radio de curvatura  $r$ , y centro de curvatura  $C$ . Los rayos que llegan se intersecan en un punto  $P$ , los rayos reflejados se intersecan en  $Q$  (Fig. 4.6).

Para ángulos pequeños o rayos paraxiales (paraxiales quiere decir *casi paralelos* al eje principal, o sea  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  mucho menores que 1 rad o  $57,3^\circ$ ) el segmento  $OB$  es mucho menor que los segmentos  $OQ$ ,  $OC$  y  $OP$  y se pueden hacer las aproximaciones  $BP \approx OP = p$ ,  $BC \approx OC = r$  y  $BQ \approx OQ = q$ . En la aproximación paraxial,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \text{con} \quad f = \frac{r}{2}. \quad (4.1)$$

Vemos que la distancia imagen  $q$  no depende de  $h$ , lo que quiere decir que *todos* los rayos reflejados se intersecan en el mismo punto, bastando así con saber donde se intersecan dos rayos reflejados, para saber por donde pasará el resto de infinitos rayos (o sus prolongaciones). Este es un sistema óptico perfecto, pues a un objeto puntual le corresponde una imagen puntual. Cuando  $q$  depende de  $h$ , la imagen de  $P$  puntual no es puntual sino que son infinitos puntos (Fig. 4.7a). A este defecto del sistema óptico se le llama *aberración esférica*, y las imágenes de dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  se pueden superponer, impidiendo que se distinga una de otra (Fig. 4.7b). O sea que si  $P_1$  y  $P_2$  son puntos de un objeto macroscópico  $P$ , la imagen  $Q$  de  $P$  será borrosa.

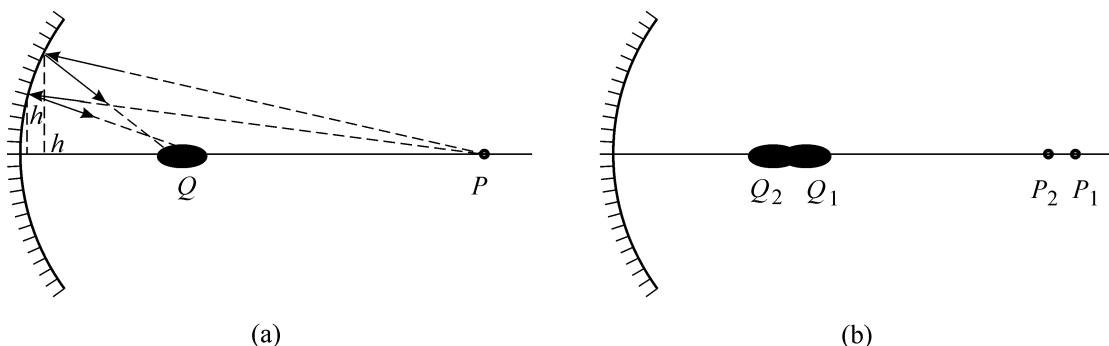


Figura 4.7 Aberración esférica.

**Cantidades que tienden a Infinito o a Cero.** Al tomar medidas,  $p$  puede ser, por ejemplo, 2 m, y considerársele infinito. Desconcierta que a tal distancia se le pueda calificar como  $p \rightarrow \infty$ . Tal vez fuera mejor decir  $q \ll p$ . Con la afirmación matemática de que una variable tiende a infinito, en física lo se quiere decir es que esa variable es mucho mayor que las otras variables involucradas en el problema. Igual ocurre con la afirmación matemática de que una variable tiende a cero; en física lo que se quiere decir es que es mucho menor que las demás variables. En lugar de decir que  $1/p \rightarrow 0$ , es mas apropiado decir  $1/p \ll 1/q$ , y que por lo tanto  $1/p + 1/q \approx 1/q = 1/f$ . Vemos que cuando  $p \rightarrow \infty$  (o sea  $p \gg q$ ),  $q = f$ .

**Aumento o Magnificación.** Para un espejo, el aumento transversal o lateral  $M$  se define como la relación entre la longitud o altura transversal (o sea perpendicular al eje principal) de una imagen,  $h_Q$ , y la altura transversal del objeto respectivo,  $h_P$ ; es igual a

$$M \equiv \frac{h_Q}{h_P} = -\frac{q}{p}. \quad (4.2)$$

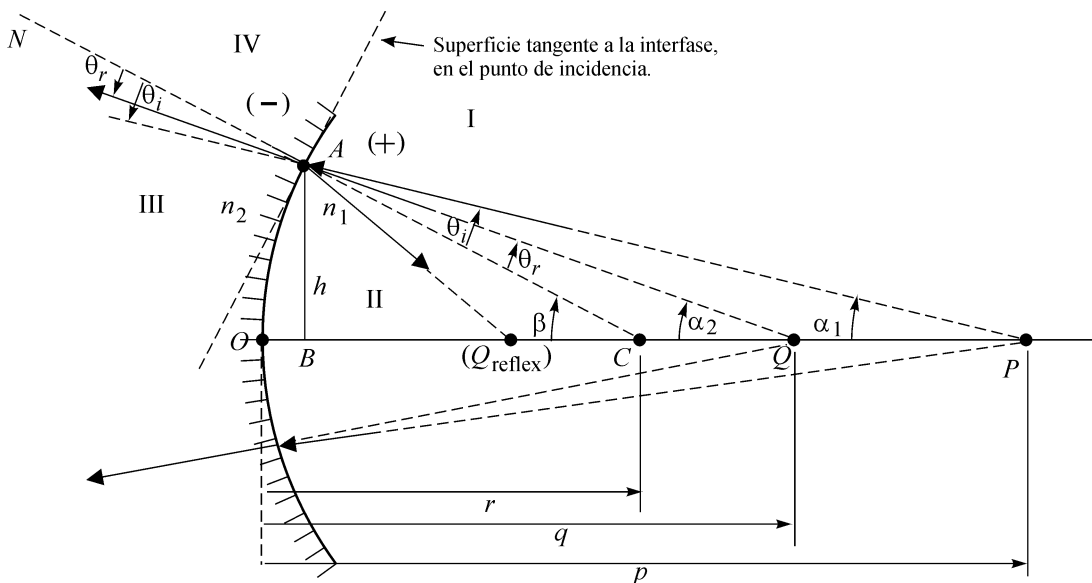
El aumento longitudinal  $M_L$ , que se relaciona con la dirección axial, se define como la relación entre la longitud axial infinitesimal de una imagen y la dimensión axial del objeto infinitesimal respectivo,  $dp$ ; es igual a (vea el Ejemplo 4.7, p. 61)

$$M_L \equiv \frac{dq}{dp} = -M^2. \quad (4.3)$$

## 4.2. Refracción en una Superficie Esférica

Cuando llega luz a una superficie transparente, hay reflexión y refracción (Fig. 4.8). La luz reflejada forma una imagen  $Q_{\text{reflex}}$  según lo visto en la sección anterior; la luz refractada forma una

imagen  $Q$  como lo veremos en esta sección. Note que la Fig. 3.1 se ha rotado y trasladado sobre el punto  $A$  de la Fig. 4.8, con la normal  $N$  pasando por  $C$ . Para  $\theta_i \ll 1$ , que es nuestro caso de aproximación paraxial, los coeficientes de Fresnel para la reflexión  $R_\pi$  y  $R_\sigma$  son mucho menores (suponiendo como medio 1 el aire, y como medio 2 agua o vidrio) que los coeficientes  $T_\pi$  y  $T_\sigma$ , lo que quiere decir que la mayor parte de la energía se transmite, y una pequeña parte se refleja. Las imágenes paraxiales por transmisión son mucho más intensas que por reflexión. (Recordemos que si los medios son aire y agua, solo se refleja el 2 % de la energía para incidencia normal. Aproximadamente esto es lo que ocurre en la córnea del ojo, debido a que su índice de refracción es muy cercano al del agua).



**Figura 4.8** Geometría de la refracción de rayos. El dibujo corresponde a una superficie cóncava,  $n_1 < n_2$ , y objeto real más allá del centro ( $p > r$ ).

La distancia objeto, la distancia imagen, y las propiedades físicas del sistema como son los índices de refracción y el radio de curvatura de la superficie, están relacionados por la *Ecuación de Descartes*,

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r}. \quad (4.4)$$

Vemos que para rayos paraxiales  $q$  no depende de  $h$ , lo que quiere decir que donde se intersecan 2 rayos refractados (o sus prolongaciones), todos los demás se intersecarán; el sistema es perfecto, no presenta aberración esférica. El ojo humano consigue eliminar los rayos no paraxiales permitiendo el paso de la luz solo por la pupila, disminuyendo así notablemente la aberración esférica.\*

La Ec. 4.4 se obtuvo utilizando la ley de Snell, en la que  $n_1$  es el índice de refracción del medio donde está la luz que *llega* a la interfase, y  $n_2$  el índice donde está la luz que *sale* refractada. En consecuencia, en dicha ecuación  $n_1$  no es el índice donde está el objeto, como a veces confusamente se piensa, sino el índice del medio donde están los rayos que llegan a la superficie o interfase; y  $n_2$  no es el índice donde está la imagen, sino el índice del medio donde están los rayos que salen por refracción de la superficie. Por ejemplo, en la Fig. 4.8 la imagen está en el medio 1, pero los rayos que salen refractados están el medio 2, solo que su lugar de intersección o imagen  $Q$  está

\*Fue Kepler, en 1604, quien por primera vez comprendió esta función de la pupila. Op. Cit, p. 43.



en el medio 1. La imagen es virtual y no es posible proyectarla en una pantalla puesta en  $Q$  (ni en ninguna otra parte) pues por  $Q$  no pasan físicamente los rayos, sino solo sus prolongaciones.

La longitud focal objeto  $f_o$  y la longitud focal imagen  $f_i$  cumplen que

$$f_o + f_i = r. \quad (4.5)$$

Cuando  $f_o$  es (+), la superficie refringente es convergente, si es (−) es divergente.

El aumento transversal es

$$M = \frac{n_1 q}{n_2 p}. \quad (4.6)$$

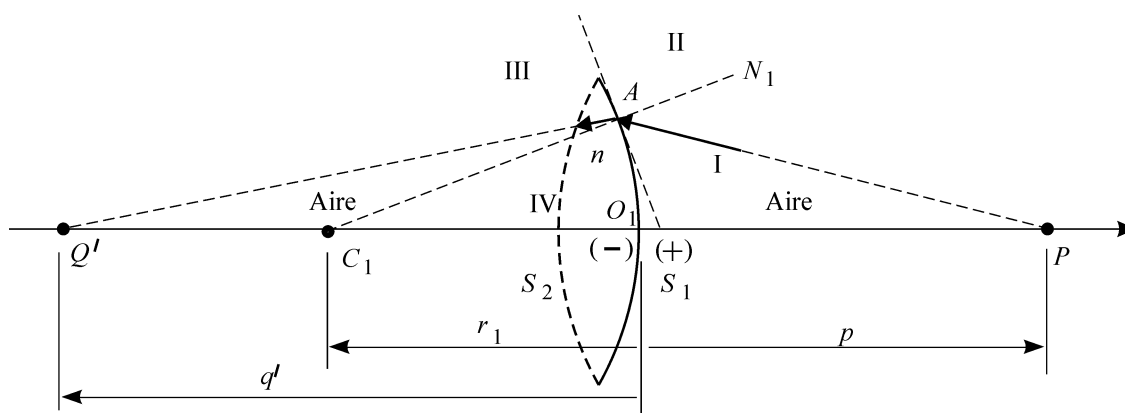
### 4.3. Lentes Delgadas en Aire

Una lente es un sistema óptico compuesto por dos subsistemas refractivos  $S_1$  y  $S_2$ . Por convención, se llama  $S_1$  a la superficie por donde entra la luz a la lente, y  $S_2$  por donde sale de ella (Fig. 4.9). Como el lado positivo es por donde llega la luz, entonces  $S_1$  siempre está en el lado positivo, y  $S_2$  en el lado negativo (vea el Ejemplo 4.11, p. 65).

La siguiente exposición la hacemos para lentes delgadas de índice de refracción  $n$ , rodeadas de aire. No es aplicable entonces a lentes de contacto, pues estas se usan sobre el ojo (más exactamente sobre la córnea), que tiene un índice  $\sim 1,38$ .

Para aplicar la Ec. 4.4 a  $S_1$  identifiquemos primero sus diferentes términos: Como los rayos que le *llegan* están en el aire, este es el medio 1,  $n_1 = n_{\text{aire}} = 1,00029 \approx 1,00$ . Como los rayos que *salen* refractados están en la lente, esta es el medio 2,  $n_2 = n$ . Los rayos que *llegan* se intersecan en  $P$ , entonces  $p = p$ ; los rayos que salen por refracción se intersecan en  $Q'$ ,  $q = q'$  (aunque en esta figura  $Q'$  está en el aire,  $n_2 = n$ ). Dos perpendiculares a  $S_1$  se intersecan en  $C_1$ , entonces  $r = r_1$ ; en la figura este radio de curvatura es negativo, pero ello no es razón para escribir  $-r_1$ , pues  $r_1$  puede ser intrínsecamente negativo; *solo se escribe el signo menos cuando se escriba su valor numérico*. Reemplazando estas igualdades en la Ec. 4.4,

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q'} = \frac{1 - n}{r_1}. \quad (4.7)$$

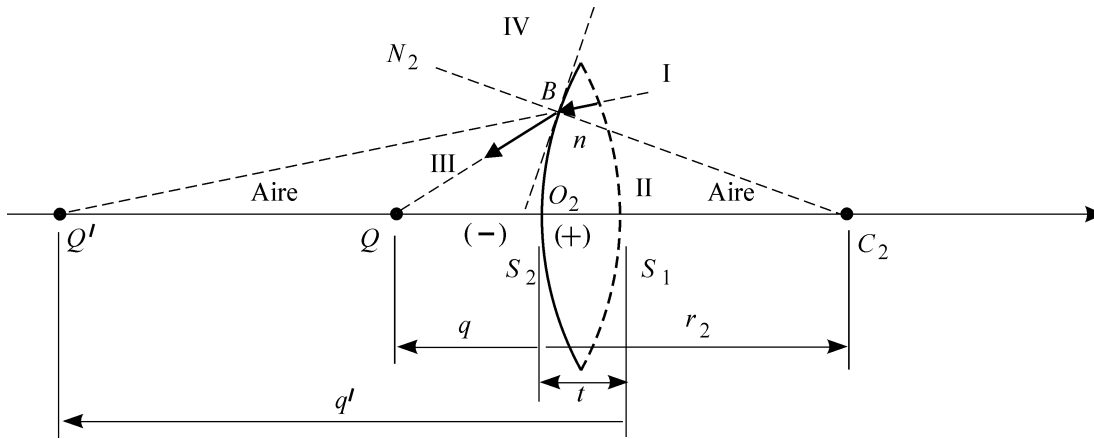


**Figura 4.9** Cambio en la dirección del rayo debido a  $S_1$ .

El grosor de la lente es  $t$ . Identifiquemos ahora los términos para aplicar la Ec. 4.4 a  $S_2$  (Fig. 4.10): Como los rayos que le *llegan* están en la lente, entonces este es el medio 1,  $n_1 = n$ . Los rayos que

salen refractados están en el aire, este es el medio 2,  $n_2 = 1,00$ . Los rayos que *llegan* se intersecan en  $Q'$ , el objeto para  $S_2$  es  $Q'$  y la distancia objeto es  $p = q' - t$ ; la lente es delgada,  $q' \gg t$  y  $p \approx q'$ . Los rayos que salen por refracción se intersecan en  $Q$ ,  $q = q$ . Dos perpendiculares a  $S_2$  se intersecan en  $C_2$ , entonces  $r = r_2$ . Reemplazando en la Ec. 4.4,

$$\frac{n}{q'} - \frac{1}{q} = \frac{n-1}{r_2}. \quad (4.8)$$



**Figura 4.10** Cambio en la dirección del rayo debido a  $S_2$ .

Sumando las Ecs. (4.7) y (4.8) se cancela  $n/q'$ ; factorizando por  $(n-1)$  llegamos a la ecuación de Descartes para lentes,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = (n-1) \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (4.9)$$

Cuando  $q \gg p$ , a  $p$  se le llama la longitud focal de la lente o longitud focal objeto  $f$ , y  $(1/p) - (1/q) \approx (1/p) = (1/f)$ . Reemplazando en la Ec. 4.9, llegamos a la *ecuación del constructor de lentes*,

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = (n-1) \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}. \quad (4.10)$$

El nombre de esta ecuación es muy apropiado, pues a un bloque de material con  $n$  conocido se le pueden desbastar dos caras con radios  $r_1$  y  $r_2$ , obteniendo una lente con la  $f$  deseada.

Reemplazando la Ec. 4.10 en la Ec. 4.9, obtenemos

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \quad (4.11)$$

Cuando  $p \gg q$ , a  $q$  se le denomina la longitud focal imagen  $f_i$ , y  $(1/p) - (1/q) \approx -(1/q) = -(1/f_i) = (1/f)$ ; de donde

$$f = -f_i. \quad (4.12)$$

El aumento de una lente es

$$M = q/p. \quad (4.13)$$

Las lentes con  $f > 0$  se llaman convergentes o positivas, con  $f < 0$  se llaman divergentes o negativas.

La potencia de una lente, que nada tiene que ver con la potencia de energía cuyas unidades son W, excepto que se utiliza el mismo nombre, se define como 1 metro dividido por  $f$ , y el resultado se expresa en dioptrías D,

$$P = 1 \text{ m}/f, \quad \text{en dioptrías D.} \quad (4.14)$$

#### 4.4. El Ojo

El ojo es aproximadamente esférico, formando lo que se llama el *globo ocular* (Fig. 4.11),\* con un radio de  $\sim 1,2$  cm. La parte central externa es un poco más curva, con un radio de curvatura de  $\sim 0,8$  cm, y está formada por una membrana dura y transparente, la *córnea*,\*\* con índice de refracción 1.376. El resto del globo ocular está limitado por la *esclerótica*, que es una capa opaca y blanca, cuya parte en contacto con el aire es visible a simple vista.

Detrás de la córnea hay un líquido A, el *humor acuoso*, en contacto con el *iris* I y el *cristalino* C.

El iris es una arreglo, con un agujero central o *pupila*, de músculos circulares y radiales, cuya acción conjunta determina, según la intensidad de la luz presente, el diámetro de la *pupila*. El color del iris determina el color de los ojos, y su diámetro interior, que es el diámetro de la pupila, la cantidad de luz que penetra al ojo.

El cristalino es una lente compuesta por unas 22 000 capas como una cebolla, de índice de refracción decreciente del centro hacia afuera, entre 1.406 y 1.386; es mantenido en su lugar por unos *ligamentos* L que van unidos al *músculo ciliar* M. La longitud focal del cristalino la varía el músculo ciliar a través de los ligamentos; cuando está relajado, el cristalino es aplanado, cuando está contraído, el cristalino se curva y disminuye su  $f$ . A esta capacidad de variar  $f$  se le llama la *acomodación*.

Detrás del cristalino, el ojo está lleno de un líquido gelatinoso, el *humor vítreo* V, compuesto casi únicamente de agua. El índice de refracción de los humores acuoso y vítreo es de 1.336 y 1.337 respectivamente.

En el fondo del ojo se encuentra la *retina*, una capa extensa donde están las células responsables de transformar la luz en señales eléctricas (células fotosensibles), los *bastones* y los *conos*. El *nervio óptico* conduce las señales eléctricas hasta las neuronas del cerebro responsables de interpretarlas como imágenes. Los bastones,  $\sim 125$  millones, responden a muy baja intensidad de la luz, pero no son sensibles al color, y no posibilitan la percepción de imágenes nítidas; en cambio, los conos,  $\sim 6$  millones, sí son sensible al color y son los responsables de la nitidez. La distribución de ambas células varía ampliamente en la retina; hay un sitio, de  $\sim 0.3$  mm de diámetro, la *fóvea* F, donde sólo hay conos. La mejor visión se logra cuando los rayos de luz se intersecan o enfocan en la fóvea.

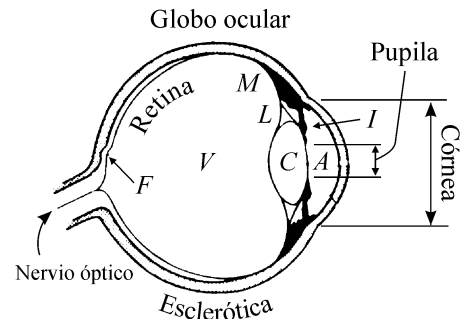


Figura 4.11 El ojo humano.

*Cuando queremos mirar un objeto o una imagen, el ojo se mueve de manera que el objeto o imagen quede en el eje visual del ojo; después el cristalino se acomoda con el objetivo de dirigir los rayos hacia la fóvea.*

\*Esta figura corresponde a un corte horizontal del ojo izquierdo; el derecho quedaría verticalmente abajo.

\*\*Córnea proviene del femenino del adjetivo latino *cōrnĕus*, que quiere decir duro y transparente como el cuerno.

Si esto no se logra, la visión es *deficiente*. Se utilizan lentes y cirugía ocular para lograr el ideal de que la luz que penetra al ojo se enfoque en la fóvea.

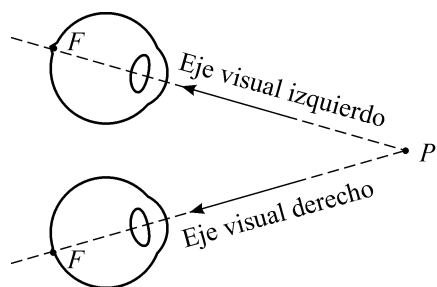


Figura 4.12 Visión binocular.

El *eje visual* del ojo es la línea determinada por la fóvea y el centro del cristalino. En la visión binocular, o sea con los dos ojos, los ejes visuales se deben intersectar en el objeto o imagen que se mire (Fig. 4.12).

La perpendicular en el centro o polo de la córnea es el *eje óptico* del ojo, y no coincide con el eje visual.

La córnea es la componente que hace la mayor parte del trabajo de enfoque, pues es donde los rayos sufren el mayor cambio de dirección. El cristalino hace el trabajo restante, fino, de terminar de dirigir los rayos hacia la fóvea (Ejemplo 4.10).

La luz penetra al ojo por la parte de la córnea que está al frente de la pupila. Por lo tanto, el lado positivo siempre está en el aire, o en el agua si tenemos abiertos los ojos dentro del agua.

Es común encontrar en las fotos tomadas con 'flash' pupilas rojas. Esto se debe a que parte de la luz que penetra en el ojo se refleja en la retina, que es roja por la alta irrigación sanguínea, y sale de regreso hacia la cámara fotográfica. Sólo para esta luz roja el lado positivo de la córnea queda dentro del ojo.

**El Punto Cercano.** Hay una distancia mínima o *distancia óptima* a la que una persona se puede ubicar de lo que mira, para verlo con el máximo detalle posible. Esta distancia se llama *el punto cercano o mínima distancia de visión nítida*  $\delta$  de la persona. Leyendo algún escrito, determine su  $\delta$  personal. A mayor edad, mayor es  $\delta$ , debido al endurecimiento progresivo o pérdida de la acomodación del cristalino. Un valor común para un adulto es  $\delta = 25$  cm. Esta persona, si quisiera ver nítida la Luna y con el máximo detalle, debería acercar sus ojos hasta 25 cm de su superficie, cosa que de ordinario es imposible, pues debe verla desde la Tierra, desde donde se ve nítida, pero con poco detalle.

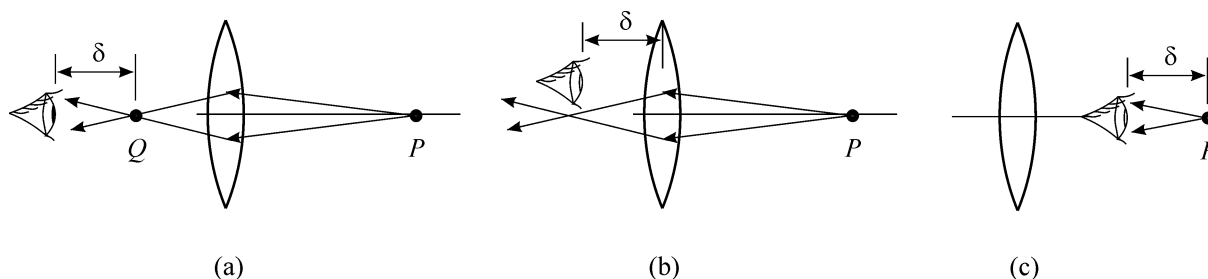


Figura 4.13 El punto cercano del ojo. En (a) el observador mira la imagen, en (b) mira la lente, en (c) mira el objeto.

Si queremos ver con un sistema óptico como una lente o un espejo, los rayos que penetran en nuestros ojos son los que *salen* del sistema, por lo tanto lo que miramos es la imagen producida por el sistema, no al objeto que da lugar a esa imagen. Como nos interesa mirar la imagen, nos ubicamos a  $\delta$  de la imagen si la queremos apreciar lo mejor posible (Fig. 4.13a); si nos interesara mirar el sistema, nos ubicaríamos a  $\delta$  del sistema (Fig. 4.13b), y si quisiéramos mirar el objeto, nos ubicaríamos a  $\delta$  del objeto (Fig. 4.13c).

## Ejemplos y Problemas

Con los siguientes ejemplos queremos aclarar los conceptos de la óptica geométrica; en consecuencia, no nos limitamos a hallar unos valores numéricos, sino que explicamos permanentemente la aplicación de la teoría expuesta. Para ello nos valemos, en la mayoría de los casos, de hechos cotidianos. Los problemas, marcados con dos triángulos negros ◀▶, están intercalados entre los ejemplos, como una extensión de los ejemplos que les preceden.

**Ejemplo 4.1.** ¿Puede un observador a la izquierda de la superficie refringente de la Fig. 4.8, p. 54, ver la imagen por reflexión  $Q_{\text{reflex}}$ ?

**Solución.** No, porque los rayos tienen dirección, la dirección en que avanza la luz, y la luz reflejada solo le llega a un observador a la derecha de la superficie.

◀▶ **Problema 4.1.** (a) ¿Puede un observador a la derecha de la superficie refringente de la Fig. 4.8 ver la imagen por refracción  $Q$ ? (b) Si  $q = +20$  cm y el punto cercano del observador es 35 cm, especifique exactamente donde se debe ubicar el observador sobre el eje principal para ver a  $Q$ . (c) ¿Cómo ve la imagen dicho observador si se ubica a 5 cm a la izquierda de  $O$ ?

◀▶ **Problema 4.2.** Aplicando las definiciones de imagen virtual e imagen real real (Fig. 4.4, p. 51), ¿es positiva o negativa  $q$  para una imagen virtual producida por (a) un espejo y (b) por una lente (o por una superficie refractiva); y para una imagen real?

**Ejemplo 4.2.** Discuta la formación de la imagen de una persona que se mira en un espejo plano.

**Solución.** Este ejemplo es la explicación de la experiencia cotidiana de mirarnos en un espejo casero. Es equivalente al Ejemplo 4.3, pero la longitud focal es ahora infinita. Supongamos que es usted quien se mira en el espejo, y que su  $\delta$  es 25 cm. Si va a mirar el espejo, por ejemplo una mancha en él, se debe ubicar a 25 cm del espejo; pero si va a mirar su imagen, se acerca a  $\frac{1}{2}25$  cm (Fig. 4.14; ya desenfoca el espejo en su retina, pero enfoca su cara), pues de la geometría de la figura se deduce que  $p = -q$  (por favor, compruébelo geoméricamente), o, utilizando la Ec. 4.1, p. 52, con  $f = \infty$ , también se llega a que  $p = -q$ ;  $\delta = p - q = p - (-p) = 2p$ , de donde  $p = \delta/2 = 25/2 = 12,5$  cm.

Aplicando la ley de reflexión, se ve que los rayos se reflejan divergentes entre sí, dando una imagen virtual (lugar de intersección en el sentido opuesto al que se reflejan), con un aumento  $M = -q/p = -(-p)/p = +1$ . El 1 significa que la altura de la imagen es igual a la del objeto; el (+) significa que es derecha, o sea con la misma orientación que el objeto.

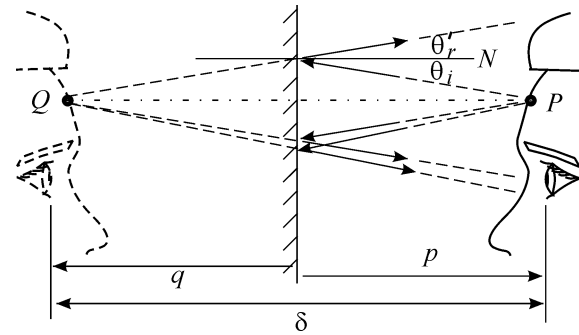


Figura 4.14 Imagen virtual y derecha.

Una nube o una montaña que esté a varios kilómetros enfrente del espejo forma una imagen virtual a esa misma distancia, pero detrás del espejo. Por esto, sus ojos enfocan la imagen, así los 'pegue' al espejo. Obvio que usted no se puede ubicar a  $\delta$  de la imagen de la montaña.

Determine su punto cercano  $\delta$ , consígase un espejo plano y **haga ya las experiencias descritas en este ejemplo, no lo deje para después.**

**Ejemplo 4.3.** Una persona  $P$ , con  $\delta = 25$  cm, se mira en un espejo cóncavo de longitud focal 15 cm. Encuentre la distancia óptima de  $P$  al espejo. ¿Cuál es el aumento?

**Solución.** (En el Almacén del Instituto de Física hay un espejo con esta misma  $f$ , con el que se puede hacer la experiencia descrita en este problema).

La distancia óptima al espejo se presenta cuando  $P$  está a una distancia óptima  $\delta$  de lo que mira, en este caso, su imagen. Se debe diferenciar entre *mirarse en el espejo* y *mirar el espejo*. La diferencia, entre mirar una imagen y mirar el sistema óptico que la produce se explica, pero con una lente, en la Fig. 4.13.

Si  $P$  se acerca al espejo más de lo que muestra la Fig. 4.15, ya no se enfoca; si se aleja, disminuye el detalle con que se ve. Así es como reconoce que está a  $\delta$  de su imagen. Para el caso particular de la Fig. 4.15,  $p - q = \delta$ ; en cambio, en la Fig. 4.13 no hay ecuación que relacione estas 3 cantidades. Despejando,

$$q = p - \delta;$$

reemplazando en la Ec. 4.1,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p - \delta} = \frac{1}{f}.$$

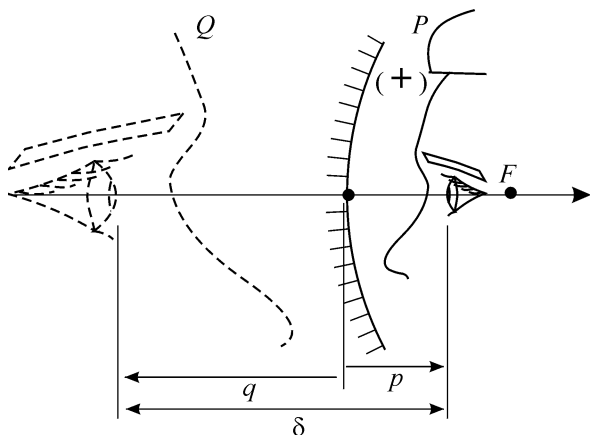


Figura 4.15 Espejo cóncavo, imagen virtual.

Despejando  $p$ , obtenemos la ecuación cuadrática

$$p^2 - p(2f + \delta) + f\delta = 0,$$

con soluciones, después de reemplazar los valores de  $f$  y  $\delta$ ,

$$p_1 = 8 \text{ cm}, \quad p_2 = 47 \text{ cm};$$

a las que les corresponde las respectivas distancias imagen

$$q_1 = -17 \text{ cm}, \quad q_2 = 22 \text{ cm};$$

y aumentos

$$M_1 = 2,1, \quad M_2 = -0,47.$$

En resumen, tenemos la primera solución,  $p_1 = 8 \text{ cm}$ ,  $q_1 = -17 \text{ cm}$ ,  $M_1 = 2,1$ ; y la segunda solución,  $p_2 = 47 \text{ cm}$ ,  $q_2 = 22 \text{ cm}$ ,  $M_2 = 0,47$ .

La imagen de la primera solución es virtual, la persona  $P$  se ve derecha y 2.1 veces mayor; la segunda es real, la persona se ve invertida y con un tamaño casi la mitad. La primera solución corresponde a la Fig. 4.15, la segunda a la Fig. 4.16. **En ambos casos, los ejes visuales del observador convergen en el punto de  $Q$  que  $P$  mire** (en la Fig. 4.12, p. 58, ese punto de  $Q$  corresponde al punto  $P$ ).

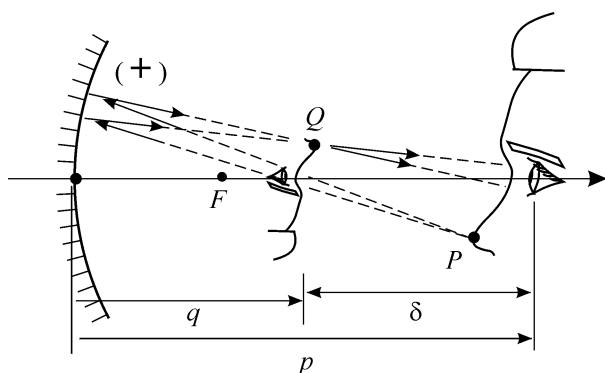


Figura 4.16 Espejo cóncavo, imagen real.

► **Problema 4.3.** ¿En la Fig. 4.15, por qué la relación entre  $p$ ,  $q$  y  $\delta$  no es  $p + q = \delta$ , sino  $p - q = \delta$ ? (Recuerde que esta ecuación no es general; no se cumple en la Fig. 4.13 ni en la Fig. 4.31, p. 68).

**Ejemplo 4.4.** Determine la naturaleza de un espejo que sea útil para la vigilancia en un almacén.

**Solución.** Lo primero a exigir es que el aumento sea positivo, para que la imagen tenga la misma orientación que su respectivo objeto,

$$M > 0. \quad (4.15)$$

Si  $M = +1$ , sería el caso de un espejo plano, con el que la imagen es del mismo tamaño que el objeto, y para dar un buen cubrimiento tendría que ser muy grande, de más de 1 m, pues los estantes y las personas tienen medidas mayores que 1 m. Si  $M > 1$ , la situación empeora, pues imágenes mayores que el objeto no son convenientes porque dan un cubrimiento aún menor que con un espejo plano. En conclusión, para que las imágenes sean derechas y menores que los objetos que se quieren vigilar, y obtener así un mayor cubrimiento o campo de visión mayor,

$$0 < M < 1. \quad (4.16)$$

Las imágenes en el almacén corresponden a objetos físicos, que siempre se comportan como objetos (ópticos) reales,

$$p > 0. \quad (4.17)$$

Reemplazando en la Ec. 4.2, p. 53, las relaciones (4.15) y (4.17),

$$(+)=\frac{-q}{(+)}.$$

de donde  $q < 0$ :  $Q$  es una imagen virtual. Llegamos a lo que se cumple también con las lentes, esto es, que toda imagen derecha de un objeto real es virtual.

De las ecuaciones para espejos,  $M = -q/p$  y  $(1/p) + (1/q) = (1/f)$ , obtenemos  $f = Mp/(M - 1)$ . Reemplazando en esta ecuación las relaciones (4.15), (4.16) y (4.17), obtenemos

$$f < 0.$$

**El espejo tiene que ser convexo o divergente.**

Cuando llega luz a nuestros ojos, hay imágenes por reflexión, que son las que vemos cuando miramos a alguien a los ojos. También hay imágenes por transmisión, que son las que nos dan la visión. Para estas, nuestros ojos se comportan como superficies refractivas convergentes; para aquellas, como espejos convexos o negativos o divergentes que, como acabamos de ver, dan imágenes derechas y menores que el objeto.

**Ejemplo 4.5.** A un objeto real puesto a 1.2 m de un espejo esférico le corresponde una imagen que es virtual y dos veces mayor. (a) Analíticamente, determine la longitud focal y la naturaleza del espejo. (b) Con rayos principales ilustre, a escala, la solución gráfica del problema.

*Solución.*

(a) Como el objeto es real, los rayos llegan divergentes y se intersectan en dirección opuesta a la de ellos,  $p > 0$ . Por ser virtual la imagen, los rayos salen, por reflexión (es un espejo), divergentes y se intersectan en dirección opuesta a ellos,  $q < 0$ . El aumento es 2, pero no sabemos si la imagen es derecha o invertida, entonces usamos valor absoluto,  $|M| = 2$ . Averiguemos si es +2 o -2:

$$M = -\frac{q}{p} = -\frac{(-)}{(+)} = (+) = +2.$$

De donde  $q = -2p$ . Reemplazando en la Ec. 4.1,  $1/p + 1/(-2p) = 1/f$ . Despejando,  $f = 2p = +2,4$  m. El espejo es positivo, o cóncavo, o convergente, pues la longitud focal es positiva.

(b) En la Fig. 4.17 se ilustra la solución gráfica. Del punto más alto del objeto llegan dos rayos divergentes. El rayo superior llega con  $\theta_i = 0$ , el rayo reflejado respectivo sale dirigiéndose hacia C. El rayo inferior llega paralelo, el reflejado sale dirigiéndose hacia F. Vemos que los que salen lo hacen divergiendo. Note que aunque el espejo es convergente, produce rayos divergentes, pues el objeto está entre el polo y el foco.

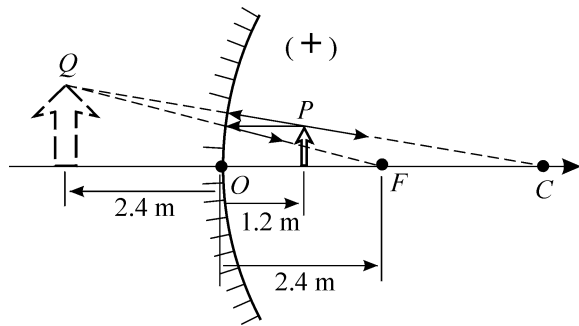


Figura 4.17 Imagen virtual y derecha.

Si un observador quiere mirar el objeto con una distancia óptima, se ubica a  $\delta$  de P, a la derecha o a la izquierda. La imagen no la puede observar a  $\delta$ , pues se forma detrás del espejo, a una distancia mayor que el punto cercano, y la puede ver enfocada en su retina desde cualquier distancia a la derecha del espejo.

**Ejemplo 4.6.** Un objeto se mueve hacia un espejo esférico con una velocidad constante  $v_p$ . Encuentre la velocidad de la imagen como una función de la distancia  $p$  y discuta el resultado.

*Solución.* La velocidad del objeto es  $v_p = dp/dt$ , la de la imagen es  $v_Q = dq/dt$ . Derivando respecto al tiempo

la Ec. 4.1,

$$\frac{dp^{-1}}{dt} + \frac{dq^{-1}}{dt} = \frac{df^{-1}}{dt}.$$

La longitud focal,  $f = r/2$ , la fija el constructor del espejo; como no depende del tiempo, el miembro derecho de la anterior ecuación es cero.

$$-p^{-2} \frac{dp}{dt} - q^{-2} \frac{dq}{dt} = -p^{-2} v_p - q^{-2} v_Q = 0.$$

Despejando,

$$v_Q = -\left(\frac{q}{p}\right)^2 v_p.$$

Como  $(q/p)^2 = (-q/p)^2 = M^2$ ,

$$v_Q = -M^2 v_p. \quad (4.18)$$

El (-) significa que las velocidades son opuestas: si el objeto se mueve hacia la izquierda acercándose al espejo, la imagen se mueve hacia la derecha, acercándose también. También significa que si apuntamos con un dedo al espejo, la imagen del dedo apunta hacia el dedo. Esto lo comprobamos a diario cuando nos acercamos a un espejo plano, para el que se cumple que  $M = 1$ , y  $v_Q = -v_p$ .

De la Ec. 4.1,  $q = fp/(p - f)$ . Reemplazando en la expresión para el aumento lateral,  $M = -q/p = f/(f - p)$ . Reemplazando esta expresión para  $M$  en la Ec. 4.18, obtenemos

$$v_Q = -\left(\frac{f}{f - p}\right)^2 v_p.$$

Para un objeto lejano,  $p \gg f$ , la anterior ecuación predice que  $v_Q \ll v_p$  ( $v_Q \rightarrow 0$ ): Q coincide con F, como era de esperarse. Cuando P se acerca a F, los rayos salen casi paralelos, y la imagen se forma lejos ( $q$  y  $v_Q \rightarrow \infty$ ).

**Ejemplo 4.7.** (a) Halle la expresión para el aumento longitudinal de un espejo, Ec. 4.3, p. 53. (b) Halle el volumen de la imagen de un cubo de 1 cm de lado que está perpendicular al eje principal y a 45 cm del espejo. La longitud focal del espejo es 15 cm.

*Solución.*

(a) Según la Ec. 4.18,

$$\frac{dq}{dt} = -M^2 \frac{dp}{dt}.$$

Cancelando  $dt$  y despejando,

$$\frac{dq}{dp} \equiv M_L = -M^2. \quad (4.19)$$

(b) En la Fig. 4.18 se representan, sin escala con el resto de la figura, el cubo P y su imagen Q.

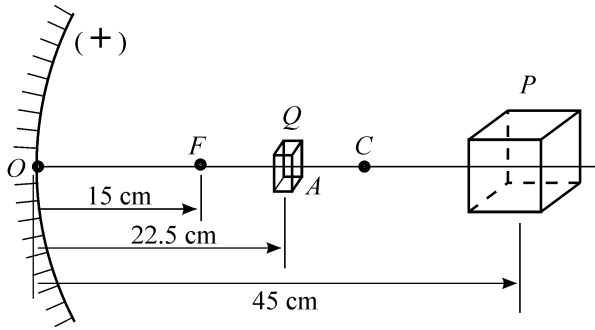


Figura 4.18 Un cubo P y su imagen Q.

Sea  $h_p$  un lado de P; su volumen es  $V_p = h_p^3$ . La altura y el ancho transversal o lateral (esto es, en dirección perpendicular al eje) de la imagen son las de un cuadrado de lado  $h_q = Mh_p$ . El área de este cuadrado es  $A = h_q^2 = M^2 h_p^2$ .

El grosor del objeto es  $\Delta p = h_p$ ; el de la imagen es  $\Delta q$ . Como son pequeños (mucho menores que  $p, q$  y  $f$ ), aproximamos a infinitesimales estos deltas,  $\Delta p \approx dp$ , y  $\Delta q \approx dq$ . De la Ec. 4.19,  $\Delta q \approx M_L \Delta p = M_L h_p = -M^2 h_p$ .

El volumen de la imagen es así,  $V_Q = A|\Delta q| = M^2 h_p^2 \times M^2 h_p = M^4 h_p^3 = M^4 V_p$ .

$$V_Q = M^4 V_p.$$

Halleemos M. De la Ec. 4.1,  $q = fp/(p - f) = 15 \times 45/(45 - 15) = 22.5$  cm.  $M = -q/p = -22.5/45 = -0.5$ . Q tiene una cara A transversal cuadrada de lado  $0.5 \times 1$  cm = 0.5 cm. El grosor es  $0.5^2 \times 1$  cm = 0.25 cm. Q es entonces un paralelepípedo recto de lados, en cm,  $0.5 \times 0.5 \times 0.25$ , y con volumen

$$V_Q = M^4 V_p = (1/2)^4 V_p = \frac{1}{16} V_p = 0.0625 \text{ cm}^3.$$

El que M sea diferente de  $M_L$  lleva a que la imagen del cubo no sea cúbica, ni la imagen de una esfera sea esférica.

**Ejemplo 4.8.** Pruebe que, sin importar su distancia al eje, todos los rayos que llegan paralelos al eje de un espejo parabólico se dirigen hacia el foco después de la reflexión.

**Solución.** El espejo es un paraboloide de revolución. Sea el eje x el eje principal, y el origen de coordenadas el vértice del paraboloide. En la Fig. 4.19 se muestra el corte de un plano que contiene el eje principal, con el paraboloide. Sea este el plano xy. La distancia del foco F de la parábola al vértice es f.

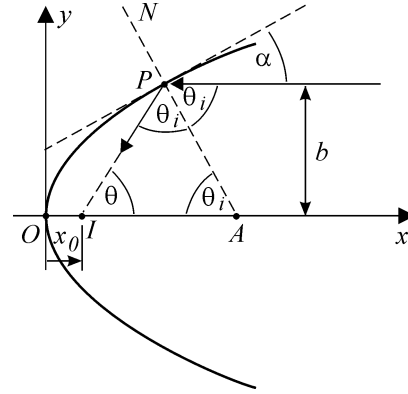


Figura 4.19 Reflexión en un espejo parabólico.

Un rayo incide paralelo al eje x en el punto P y se refleja pasando por el punto  $I(x_0, 0)$ . N es la perpendicular al plano tangente en el punto de incidencia. En la figura se ha aplicado ya la ley de reflexión,  $\theta_r' = \theta_i$ . El rayo incidente se caracteriza por el parámetro de impacto b, o por el ángulo  $\alpha$ .

La demostración la haremos en coordenadas cartesianas, de acuerdo con el siguiente plan: hallamos 1) las coordenadas de P en función de b, 2) la pendiente m del rayo reflejado, 3) la ecuación del rayo reflejado con los datos de los 2 primeros numerales, y 4) la intersección del rayo reflejado con el eje x.

1) La ecuación de la parábola de la figura es  $y^2 = 4fx$ . Despejando a x, y reemplazando a y por b,  $x = b^2/(4f)$ .

Las coordenadas de P son  $P(\frac{b^2}{4f}, b)$ .

2) De la figura vemos que  $\theta_i = 90^\circ - \alpha$  y, en el triángulo IPA,  $\theta = 180^\circ - 2\theta_i = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$ . La pendiente del rayo reflejado es así

$$m = \tan \theta = \tan 2\alpha. \quad (4.20)$$

La pendiente de la parábola en P es  $\tan \alpha = dy/dx = 2f/b$ . Reemplazando esta expresión en la identidad

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha},$$

la Ec. 4.20 nos da que

$$m = \frac{4bf}{b^2 - 4f^2}.$$

3) La ecuación para una línea que pasa por  $P(\frac{b^2}{4f}, b)$  con pendiente m es

$$y = m(x - b^2/4f) + b.$$

4) Haciendo  $y = 0$ ,  $x = x_0$ , y despejando este intercepto,

$$x_0 = f.$$



De donde concluimos que todos los rayos reflejados, sin importar  $b$ , se dirigen hacia el punto  $I(f, 0)$ .  $I$  es entonces el foco  $F$  de la parábola. O sea que el espejo no tiene aberración esférica para los rayos paralelos al eje principal. Está es la explicación de la utilidad de las antenas o espejos parabólicos. En  $F$  se ubica un receptor, donde la densidad de energía es la más alta. En Mount Louis, Francia, hay un horno solar que utiliza un gran espejo parabólico para dirigir los rayos hacia  $F$ , donde se ubica un material que se calienta o se funde a miles de grados centígrados, con contaminación mínima.

◀► **Problema 4.4.** Resuelva, en coordenadas polares, el Ejemplo 4.8.

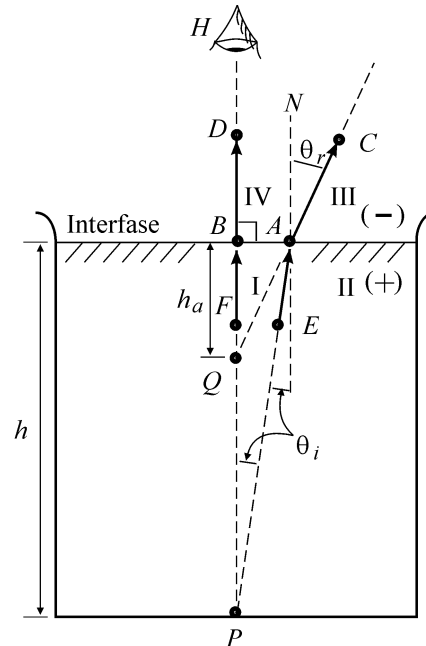
**Ejemplo 4.9.** Un recipiente se llena de agua hasta una profundidad  $h$ . ¿A qué distancia de la superficie, mirando directamente desde arriba, se ve el fondo del recipiente?

Este ejemplo lo llamamos *Profundidad Aparente*, pues discute la observación común de que cuando se observa desde arriba un vaso de agua o una piscina, el fondo parece acercarse al observador, dando la sensación de que la profundidad es menor a la real.

**Solución.** Este ejemplo es sobre formación de imágenes por refracción, cuya solución la encontramos con la Ec. 4.4, p. 54.

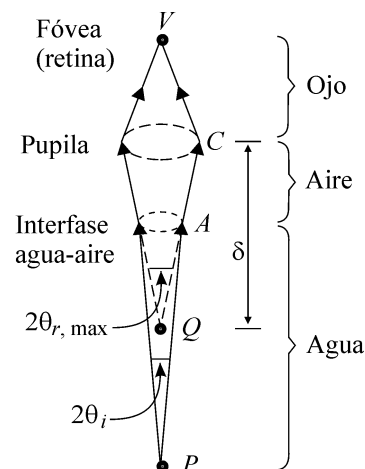
En la Fig. 4.20,  $P$  es un pequeño cuerpo en el fondo y  $H$  es el observador. 'Mirar directamente desde arriba' quiere decir que la línea  $PH$  es perpendicular a la interfase agua-agua. Se muestran el punto de incidencia  $A$ , la normal en  $A$  a la interfase, el rayo incidente  $EA$ , el plano de incidencia definido por  $N$  y  $EA$  y coincidente con el plano de la hoja, los cuadrantes I a IV, los ángulos de incidencia y refracción. Los rayos con igual  $\theta_i$  forman un cono con vértice en  $P$  y de ángulo  $2\theta_i$ , cada uno con su plano de incidencia conteniendo el eje  $PH$ .

Como la óptica que hemos desarrollado es paraxial,  $\theta_i$  y  $\theta_r$  son mucho menores que  $57,3^\circ$ , y el rayo refractado  $AC$  alcanza a penetrar en el ojo, a pesar de que en la figura no sea así. Por claridad, los ángulos están exagerados.



**Figura 4.20** Profundidad aparente.

Los rayos que penetran por la pupila forman un cono de ángulo  $2\theta_{r, \text{máx}}$ , con vértice en  $Q$ , y  $\theta_{r, \text{máx}}$  dado por el rayo  $AC$  que toque el borde de la pupila (Fig. 4.21). Si el observador tiene bien enfocada la imagen  $Q$  ( $Q$  es imagen respecto a la interfase agua-aire, pero objeto respecto al ojo), esta  $Q$  tiene su respectiva imagen en la fovea  $V$ . Dentro del ojo la luz forma un cono con vértice en  $V$  y con la pupila como base. El proceso de la visión humana representado por la Fig. 4.21 lo explicó por primera vez Kepler en 1604, y con ello fundó la óptica moderna.



**Figura 4.21** Los rayos van del objeto a la retina. Por simplicidad no se muestran la córnea ni el cristalino.

Por llegar divergentes a la interfase, los rayos se intersecan en un punto  $P$  en sentido opuesto a ellos, y  $P$  es

real; esto era de esperarse ya que  $P$  es un objeto físico. Los rayos que *llegan* están en el agua, este es el medio 1,  $n_1 = 1,33$ . El lado positivo está por debajo de la interfase.

Los rayos que *salen* por refracción están en el aire,  $n_2 = 1,00029 \approx 1,00$ ; el lado negativo está encima de la interfase. Como salen divergentes, su intersección es en sentido opuesto a ellos y la imagen es virtual. Esto es forzoso, puesto que los rayos que salen refractados siempre están en el cuadrante III; para que la imagen fuera real se necesitaría que salieran convergentes, ¡por el cuadrante IV! Como  $n_1 > n_2$ , la luz refractada se aleja de la normal (Fig. 3.2, p. 38), y  $Q$  está entre  $B$  y  $P$  (Fig. 4.20). Si  $n_1$  fuera menor que  $n_2$ , el rayo refractado se acercaría a la normal, y la imagen estaría por debajo de  $P$ .

Como el agua está quieta, dos perpendiculares a la interfase se intersecan en el infinito o, más exactamente, en el centro de la Tierra, pues la superficie es, considerada rigurosamente, un casquete esférico:  $r = 6370 \text{ km} = 6\,370\,000 \text{ m}$ . Esta cantidad es muchísimo mayor que  $h$  y que  $q$ , entonces el miembro derecho de la Ec. 4.4 es despreciable frente a los dos términos del miembro izquierdo (se suele decir  $r \rightarrow \infty$ , o  $\frac{n_1 - n_2}{r} \rightarrow 0$ ), y podemos aproximar

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} \approx 0.$$

Despejando la distancia imagen, y haciendo las equivalencias  $p = h$  y  $q = h_a$ ,

$$h_a = n_{21}h = \frac{1,00}{1,33}h = \frac{h}{1,33}.$$

Si  $P$  es una moneda en el fondo de un vaso que se ha llenado hasta una profundidad de 7 cm,  $h_a = (7/1,33) = 5,3 \text{ cm}$ : la imagen de la moneda se acerca 1.7 cm hacia el observador, pero sin cambiar de tamaño:

$$M = \frac{n_1 q}{n_2 p} = \frac{n_1 h_a}{n_2 h} = \frac{n_1 (n_2/n_1) h}{n_2 h} = 1.$$

En la aproximación paraxial, una interfase plana no cambia el tamaño de las imágenes formadas por reflexión ni por refracción.

*Haga ya la siguiente experiencia, no la postergue:* Mire una moneda en el fondo de un vaso sin agua. Acérquesele desde arriba hasta cuando la empiece a desenfocar; en este momento la distancia entre sus ojos y la moneda es su punto cercano  $\delta$  (Fig. 4.22a). A esta distancia se pone usted de lo que mira si lo quiere ver con el máximo detalle. A continuación, llene el vaso hasta 7 cm. Ya no puede mirar la moneda, sino su imagen. Acérquese a la imagen hasta cuando empiece a desenfocarla; como está 1.7 cm más cerca de usted que el objeto, notará que se debe alejar del vaso esta misma distancia para ver la imagen de la moneda, respecto a cuando miraba la moneda sin el agua (Fig. 4.22b).

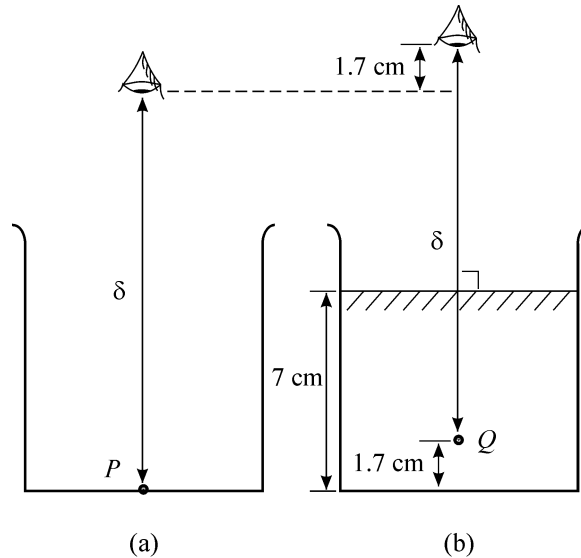


Figura 4.22 La imagen se acerca al observador.

► **Problema 4.5.** Localice la imagen de  $P$  formada por reflexión en el Ejemplo 4.9; ¿es virtual o real; la puede mirar el observador  $H$  de la Fig. 4.20?

**Ejemplo 4.10.** Haga un estimativo de la longitud focal imagen de los ojos de una persona y halle si son convergentes o divergentes, cuando la persona está (a) en el aire y (b) en el agua. Tenga en cuenta solo la refracción en la córnea.

*Solución.*

(a) Debemos utilizar la ecuación para imágenes por refracción,  $(n_1/p) - (n_2/q) = (n_1 - n_2)/r$ . Identifiquemos sus diferentes términos: la luz que llega a la córnea está en el aire,  $n_1 = 1,00$ ; la luz que sale está en la córnea,  $n_2 \approx 1,38$ ; los rayos llegan paralelos,  $p \gg r$  y  $p \gg q$  ( $p \rightarrow \infty$ );  $q = f_i$ ; la córnea es convexa para la luz que le llega desde el aire,  $r = -0,8 \text{ cm}$ . Reemplazando en la Ec. 4.4,

$$\frac{1,00}{p} - \frac{1,38}{f_i} = \frac{1,00 - 1,38}{-0,8} \approx -\frac{1,38}{f_i}. \quad (4.21)$$

Despejando,

$$f_i = -2,9 \text{ cm}.$$

El signo menos significa que los rayos que lleguen paralelos o casi paralelos, se refractan dirigiéndose hacia un punto opuesto al lado por donde llegan, a 2.9 cm de la córnea (Fig. 4.23). Como esto es mayor que el diámetro del ojo, 2.4 cm, no hay una imagen puntual en la retina del objeto lejano, y la imagen sería borrosa. El cristalino hace el trabajo faltante,  $2,9 - 2,4 = 0,5 \text{ cm}$ , de quebrar aún más los rayos y enfocarlos hacia la retina. Vemos que el trabajo mayor de enfoque lo hace la córnea, y el cristalino hace el trabajo fino, de ajuste. Si se tuviera en cuenta el cristalino, la  $f_i$  del ojo debería ser igual al negativo de su diámetro,  $-2,4 \text{ cm}$ .

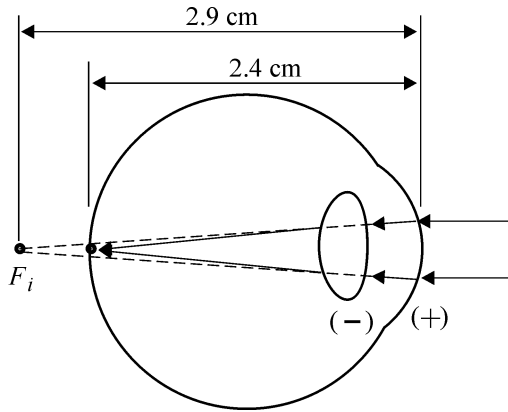


Figura 4.23 Función de la córnea y el cristalino.

Despejando de la Ec. 4.5, p. 55, la longitud focal objeto o primera distancia focal,

$$f_o = r - f_i = -0,8 - (-2,9) = +2,1 \text{ cm.}$$

Como es positiva, entonces el ojo es convergente. El valor para  $f_o$  de +2,1 cm quiere decir que los rayos provenientes de un punto a 2.1 cm del ojo salen paralelos al refractarse en la córnea.

Con la edad el cristalino pierde elasticidad, o sea que disminuye su capacidad de acomodación, y no puede hacer el trabajo fino de enfoque; a esta limitación se le llama *presbicia*. Si el ojo es más largo de lo normal,  $|f_i| < \text{diámetro}$ , los rayos se enfocan más acá de la fovea, y se presenta *miopía*. Si es más corto,  $|f_i| > \text{diámetro}$ , los rayos se enfocan más allá de la fovea, y se presenta *hipermetropía*. Tradicionalmente estos defectos del ojo se han corregido con gafas, pero en su reemplazo ya es común cambiar la curvatura de la córnea mediante cirugía; para la miopía se aplanan un poco la córnea, para la hipermetropía se curva un poco más. La nueva curvatura debe dar la  $f_i$  deseada.

Los peces hacen el trabajo fino de enfoque cambiando la distancia entre el cristalino y la córnea; algunos moluscos cambian el tamaño del ojo; las aves de rapiña cambian, mientras vuelan, la curvatura de la córnea.

(b) Cuando el ojo está dentro del agua, la luz sufre un cambio menor en su dirección que cuando está en el aire, pues el ojo por estar constituido principalmente de agua representa un pequeño cambio para la propagación de la luz. Basta con cambiar en el numeral (a) a  $n_1 = 1,00$  por  $n_1 = 1,33$ ,

$$-\frac{1,38}{f_i} = \frac{1,33 - 1,38}{-0,8}.$$

Despejando,

$$f_i = -22 \text{ cm.}$$

Ya los rayos al salir de la córnea se orientan hacia un punto alejado 22 cm, y no 2.9 cm, y por mucho que se

contraigan los músculos ciliares, el cristalino no logra redirigirlos hacia la fovea, siendo así imposible enfocar cuando el ojo mira dentro del agua, sin ayuda de una careta.

Dentro del agua el ojo sigue siendo convergente, pues  $f_o > 0$ :  $f_o = r - f_i = -0,8 - (-22) = +21,2 \text{ cm.}$

**Ejemplo 4.11.** Si dos personas A y D se miran a los ojos y D usa lentes con caras B y C, determine las caras  $S_1$  y  $S_2$  de las lentes (Fig. 4.24).

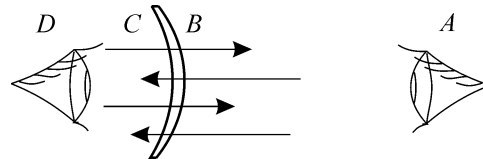


Figura 4.24 Las caras  $S_1$  y  $S_2$  son relativas.

**Solución.** Como para A la luz proveniente de D entra por C y sale por B, entonces, según A, C es  $S_1$  y B es  $S_2$ ; para D es al contrario, pues la luz proveniente de A entra por B y sale por C, siendo así C igual a  $S_1$  y D igual a  $S_2$ , según D.  $S_1$  y  $S_2$  son relativas a la dirección de la luz.

**Ejemplo 4.12.** Para fabricar una lente se dispone de un bloque de caras planas y paralelas, e índice de refracción  $n$ . Las caras se desvastan hasta que queden como casquetes esféricos de radios de curvatura  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente. Dibuje las diferentes lentes que se pueden obtener, y determine si son convergentes o divergentes.

**Solución.** En la Fig. 4.25a se ilustra, con perspectiva, el bloque original y de (b) a (g), sin perspectiva, las diferentes lentes que se pueden obtener desvastando las caras  $S_1$  y  $S_2$ . Suponemos que la luz incide desde la derecha.

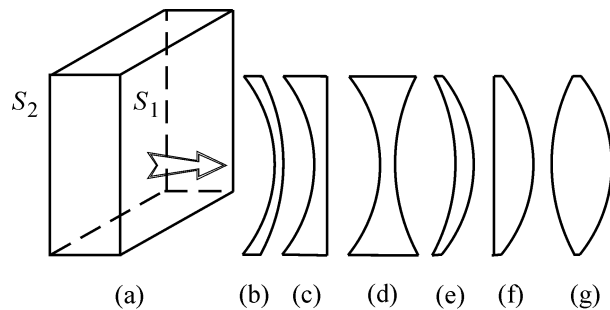


Figura 4.25 Diversas lentes.

Escojamos la lente (b) para hallarle su signo; para las demás lentes se procede de igual manera. La Ec. 4.10, p. 56, aplicada a esta lente nos dirá si es convergente o divergente.

La lente es cóncava-convexa (Fig. 4.26). La perpendicular a  $S_1$  pasa por  $C_1$ , la perpendicular a  $S_2$  pasa por  $C_2$ . Notamos que  $r_1$  y  $r_2$  son negativos, pues ambos centros de curvatura están al lado opuesto por donde le

llega la luz a la lente. Como los radios de curvatura son negativos, debemos escribir  $r_1 = -|r_1|$  y  $r_2 = -|r_2|$ , y no, como se hace a menudo,  $r_1 = -r_1$  y  $r_2 = -r_2$ . Las circunferencias a trazos representan las esferas imaginarias a las que pertenecen los casquetes esféricos  $S_1$  y  $S_2$ .

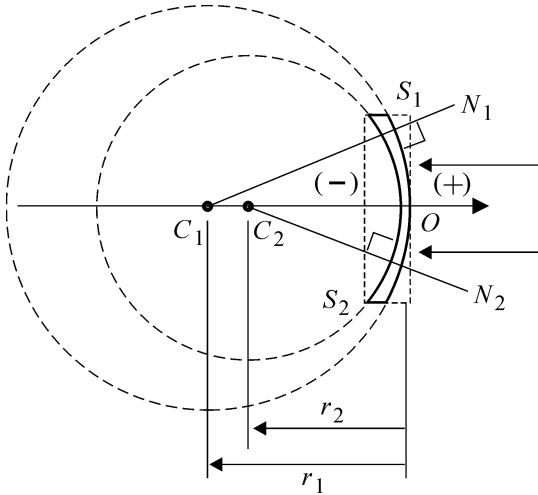


Figura 4.26 Lente de borde grueso.

$S_1$  es más aplanada que  $S_2$ , o sea que  $|r_1| > |r_2|$  (en este caso, la desigualdad no se cumpliría sin los valores absolutos). Esto lleva a que la lente sea más gruesa en los bordes que en el centro, y se le llama *lente de borde grueso*. Con este tipo de lente se corrige la miopía.

Reemplazando a  $r_1 = -|r_1|$  y  $r_2 = -|r_2|$  en la ecuación del constructor de lentes,

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \frac{-|r_1| + |r_2|}{|r_1||r_2|}.$$

Procedamos a analizar los signos en esta ecuación. Como en cualquier medio  $v < c$ , entonces  $n > 1$  y  $(n - 1) = (+)$ . El numerador es negativo, pues, para esta lente,  $|r_1| > |r_2|$ . Es obvio que el denominador es positivo.

$$\frac{1}{f} = (+) \frac{(-)}{(+)} = (-).$$

Como la longitud focal es negativa, la lente es divergente. Las lentes de borde grueso, (b) a (d), son negativas; las lentes de borde delgado, (e) a (g), son positivas, o sea convergentes, y con ellas se corrigen la hipermetropía y la presbicia. Por estética, en las gafas solo se usan las lentes (b) y (e).

Para la lente plano-cóncava (c),  $r_1 = \infty$ . Dividiendo el numerador y el denominador de la Ec. 4.10 por  $r_1$ ,

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \frac{1 - r_2/r_1}{r_2} = (+) \frac{1 - 0}{-|r_2|} = (+) \frac{(-)}{(-)} = (-).$$

Para la lente bicóncava (d),  $C_1$  está por donde llega la luz, y el radio de curvatura de  $S_1$  es positivo,  $r_1 = |r_1|$  (y no  $r_1 = +r_1$ ),  $r_2 = -|r_2|$ . Ya no importa cual de las dos caras es más curva,  $f$  siempre es negativa. Reemplazando en la Ec. 4.10:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \frac{|r_1| + |r_2|}{-|r_1||r_2|} = (+) \frac{(+)}{(-)} = (-).$$

Para las gafas deportivas,  $r_1 = r_2$  (por supuesto, en signo y en magnitud), lo que da un grosor uniforme y  $f = \infty$ . Este valor de  $f$  significa que los rayos salen con la dirección que entran a la lente, que el objeto es la imagen, y que  $M = 1$ .

Aunque la curvatura de ambas caras de las lentes (d) y (g) fueran iguales, diferirían en el signo,  $r_1 = -r_2$ , y  $f \neq \infty$ ;  $f$  es  $(-)$  para (d) y  $(+)$  para (g).

◀ **Problema 4.6.** Demuestre que las lentes de borde delgado cóncava-convexa (e), plano-convexa (f), y bi-convexa (g) de la Fig. 4.25, son positivas o convergentes, esto es, tienen  $f > 0$ . Demuestre también que si la luz llegara por la izquierda, lo que equivale a rotar las lentes  $180^\circ$  (Fig. 4.27), no cambiaría ni el signo ni la magnitud de  $f$ .

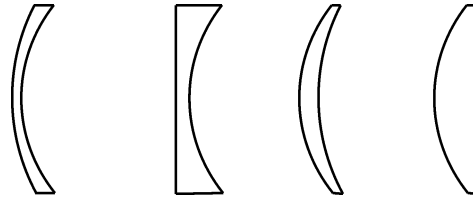


Figura 4.27 Posición diferente de las lentes.

**Ejemplo 4.13.** Los extremos de una barra de vidrio de 10 cm de diámetro e índice de refracción 1.5, se desvistan y pulen como casquetes esféricos de 5 cm de radio en el extremo derecho y 10 cm de radio en el extremo izquierdo. La longitud de la barra entre vértices es 60 cm (Fig. 4.28). Un objeto físico  $P$  de 1 mm de altura se ubica a 20 cm del extremo derecho. (a) ¿Cuál es el objeto y cuál es la distancia objeto para la segunda superficie; es real o virtual, y de qué tamaño? (b) ¿Cuáles son la posición y la altura de la imagen formada por la segunda superficie?

**Solución.** No podemos aplicar la Ec. 4.11, p. 56, pues la barra no se puede tratar como una lente delgada. En su lugar, debemos aplicar la Ec. 4.4, p. 54, a la superficie por donde llega la luz,  $S_1$ , sin tener en cuenta a  $S_2$ . Después la aplicamos a la superficie por donde sale la luz de la barra,  $S_2$ , sin tener en cuenta a  $S_1$ . Si  $S_2$  fuera un espejo, le aplicaríamos, en lugar de dicha ecuación, la Ec. 4.1, p. 52.

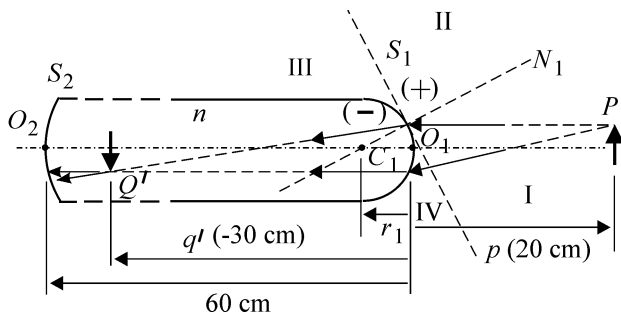


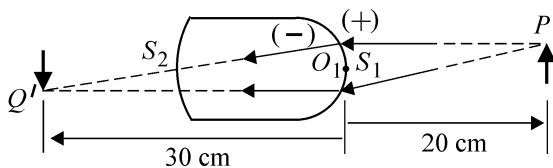
Figura 4.28 Refracción en la primera cara.

(a) En la figura se ilustran dos de los rayos incidentes y refractados en  $S_1$ . Como la luz llega por la derecha de  $S_1$ , este es el lado positivo, y a la izquierda es negativo. Los rayos llegan divergentes, se intersecan en sentido opuesto, el objeto es real, como se sabía de antemano, pues es un objeto físico. Para el rayo superior se muestran los cuadrantes I a IV (vea, además, la Fig. 3.1, p. 37).

Para aplicar la Ec. 4.4, identifiquemos sus términos: la luz que llega está en el aire,  $n_1 = 1,0$ ; la luz que sale está en la barra,  $n_2 = 1,5$ ; los rayos que llegan se intersecan a 20 cm,  $p = +20$  cm; los que salen se intersecan en  $Q'$ ,  $q = q'$ ;  $C_1$  está al otro lado de donde llega la luz,  $r_1 = -|r_1| = -5$  cm. Reemplazando los anteriores valores,

$$\frac{1,0}{20} - \frac{1,5}{q'} = \frac{1,0 - 1,5}{-5}.$$

Despejando, obtenemos  $q' = -30$  cm: los rayos refractados salen hacia un punto al otro lado (signo negativo) de donde llega la luz, a 30 cm del polo  $O_1$ . Como salen convergentes, se intersecan en el mismo sentido de ellos,  $Q'$  es real y, como el medio es homogéneo hasta los 60 cm de  $O_1$ , se intersecan físicamente en  $Q'$ . Pero si la barra tuviera una longitud menor que 30 cm, los rayos ya no se intersecarían físicamente en  $Q'$ , solo sus prolongaciones (Fig. 4.29); la imagen seguiría siendo  $Q'$ , real, y a -30 cm de  $O_1$ .

Figura 4.29 Imagen real  $Q'$  para  $S_1$ .

Los rayos que le llegan a  $S_2$ , y que salieron de  $S_1$ , es obvio que se intersecan en  $Q'$ , siendo este punto el objeto para esa cara. Como la barra tiene más de 30 cm de longitud (Fig. 4.28), los rayos llegan divergentes, se intersecan en una dirección opuesta a ellos y  $Q'$  es un objeto real para  $S_2$ ,  $p > 0$ . Pero si tuviera menos de 30 cm

(Fig. 4.29), los rayos llegarían convergentes, se intersecarían en igual sentido, y el mismo  $Q'$  sería un objeto virtual para  $S_2$ ,  $p < 0$ .

El aumento [Ec. 4.6, p. 55] debido a  $S_1$  es

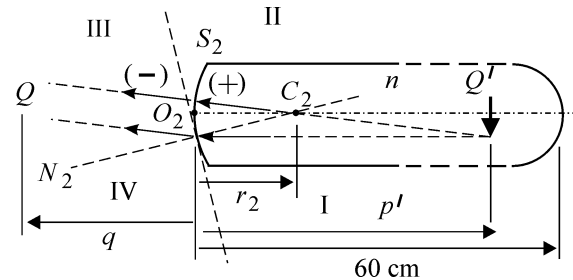
$$M_1 = \frac{1,0(-30)}{1,5 \times 20} = -1.$$

El signo  $(-)$  quiere decir que la imagen tiene sentido opuesto al objeto, el 1 significa que es de igual tamaño, o sea 1 mm. Altura  $h$  de  $Q'$ ,

$$h_{Q'} = M_1 h_P = -1 \times 1 = -1 \text{ mm}.$$

(b) Traslademos el origen de coordenadas a  $O_2$  para aplicar la Ec. 4.4 a  $S_2$ , e identifiquemos sus términos: la luz que le llega a  $S_2$  está en el vidrio,  $n_1 = 1,5$ ; la luz que sale está en el aire,  $n_2 = 1,0$ ; los rayos que llegan se intersecan en el lado por donde llegan, a una distancia horizontal de  $O_2$  igual a  $p' = (60 - 30) = +30$  cm; la distancia imagen final es  $q$  (los que salen se intersecan en  $Q$ );  $C_2$  está en el lado por donde llega la luz,  $r_2 = |r_2| = +10$  cm. Reemplazando estos valores,

$$\frac{1,5}{30} - \frac{1,0}{q} = \frac{1,5 - 1,0}{10}.$$

Figura 4.30 Objeto real  $Q'$  para  $S_2$ .

Despejando,  $q = -\infty$ : los rayos refractados salen paralelos, y no forman una imagen. Esto quiere decir que el objeto original  $P$  está sobre el foco objeto  $F$  de la barra,  $f = +20$  cm. Así, la barra es una lente gruesa convergente. El aumento debido a  $S_2$  es

$$M_2 = \frac{1,5(-\infty)}{1,0 \times 30} = -\infty.$$

La altura de la imagen final  $Q$  es

$$h_Q = M_2 h_{Q'} = M_2 M_1 h_P = -\infty(-1)1 = +\infty.$$

► **Problema 4.7.** Señale  $\theta_i$ ,  $\theta_r$  y  $\theta_t$  para el rayo superior de la Fig. 4.28. Marque los cuadrantes I a IV y los mismos ángulos, pero para el rayo inferior. Señale los ángulos para el rayo inferior de la Fig. 4.30.

**Ejemplo 4.14.** Discuta la formación de la imagen de las letras cuando leemos con una lupa.

**Solución.** Sea el objeto  $P$  una letra, por ejemplo la **E** (Fig. 4.31), cuya imagen queremos ver derecha, aumentada y con el máximo detalle (visión óptima).

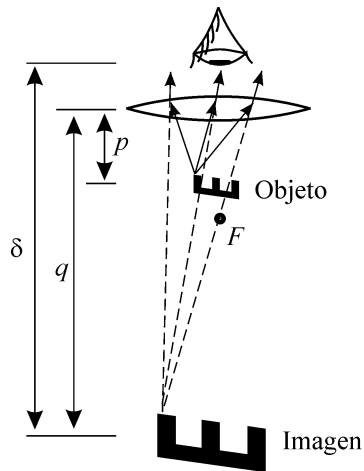


Figura 4.31 Lectura con una lupa.

Deduzcamos primero qué lente debemos usar para que la imagen tenga las características anteriores.

La **E** es un objeto físico extendido (o sea macroscópico, no puntual); de cada uno de sus infinitos puntos llegan a la lente infinitos rayos divergentes, que como se recordará, definen a **E** como un objeto real,  $p > 0$ . Para leer, la imagen debe ser derecha,  $M = q/p > 0$ ; por lo tanto,  $q > 0$ . Esto quiere decir que los rayos salen divergentes, para que se intersequen en dirección opuesta a ellos, al lado donde está el objeto **E**: *la imagen derecha de un objeto real es virtual*. El ejemplo más común de esta situación es cuando nos miramos en un espejo plano.

Dado que la lupa se utiliza para aumentar,  $M$  debe ser mayor que 1, lo que implica  $q > p$ .

De la Ec. 4.11, p. 56,  $f = pq/(q - p) = \frac{(+)}{(+)} = (+)$ : la lupa debe ser de borde delgado.

De las Ecs. (4.11) y (4.13), se halla que  $M = f/(f - p)$ . Despejando,  $p = f - (f/M)$ ; como  $M > 1$ , entonces  $p < f$ : la **E** está entre la lente y  $F$  (Fig. 4.31).

Sea una lupa con  $f = +8$  cm y supongamos que la tenemos 'pegada' al ojo. Podemos entonces hacer la aproximación  $q \approx \delta$ ; reemplazando en la Ec. 4.11,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{f}.$$

Despejando,

$$p = \frac{\delta f}{\delta + f} = \frac{25 \times 8}{25 + 8} = 6,1 \text{ cm}.$$

El aumento es

$$M = \frac{q}{p} = \frac{25}{6,1} = +4,1.$$

En resumen, cuando una persona con  $\delta = 25$  cm lee con una lupa de  $f = 8$  cm, ubica las letras a  $\sim 6$  cm

de la lupa, logrando una imagen virtual, derecha, con un aumento de  $\sim 4$ . (Este ejemplo explica porqué se ve más grande la imagen de los ojos de quienes usan lentes para corregir la hipermetropía o la presbicia).

Si las letras se ubican en el foco, cada uno de los puntos de las letras producen rayos que salen de la lente paralelos hacia el ojo, formando una imagen en el infinito, a lo que le corresponde un aumento infinito. Sin embargo, el ojo logra enfocar estos rayos en la fovea, dando una imagen de tamaño finito, pues **el ojo es un sistema complejo que logra hacer el trabajo de enfoque. Algo muy distinto sería en lugar del ojo poner una pantalla y mirar la pantalla.**

Consígase una lente de borde delgado o cualquier lupa y haga las experiencias descritas en este ejemplo.

► **Problema 4.8.** Se dispone de una lente de borde delgado con  $f$  conocida y de un objeto físico. Para que la imagen sea derecha (y virtual), halle si el objeto debe estar entre la lente y el foco, o más allá del foco; ¿y para que sea invertida (y real)? Compruébelo con una lupa; cuando observe una imagen invertida, *sólo moviendo su cabeza*, acérquese hasta cuando empiece a desenfocar la imagen. En este momento usted está a  $\delta$  de lo que mira, la imagen del objeto (Fig. 4.13a, p. 58).

► **Problema 4.9.** Muestre que la imagen producida de un objeto real, por una lente de borde grueso, es virtual, derecha, con  $M \in (0, 1)$ , para cualquier distancia del objeto a la lente. (Esto explica porqué los objetos se ven más pequeños y derechos cuando se miran a través de lentes para corregir la miopía).

► **Problema 4.10.** Resuelva, pero con una lente delgada, el Ejemplo 4.6, p. 61.

► **Problema 4.11.** Los rayos provenientes de una lente convergen en un punto  $Q$ . Cuando un vidrio de grosor  $t$  e índice de refracción  $n$ , de caras planas y paralelas, se interpone como se muestra en la Fig. 4.32, la imagen se forma a una distancia  $e$  de  $Q$ , en  $Q'$ . Halle a  $t$  en función de  $n$  y  $e$ ; evalúela para  $n = 1,5$  y  $e = 0,5$  cm. [Respuestas:  $t = ne/(n - 1)$ ; 1,5 cm.]

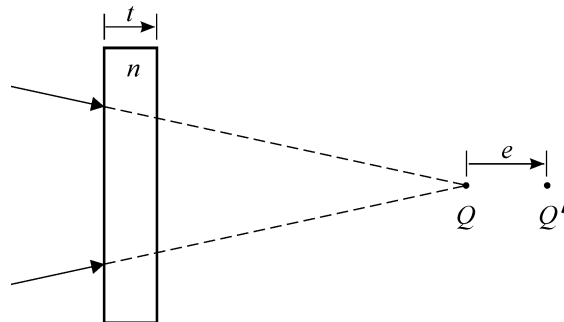
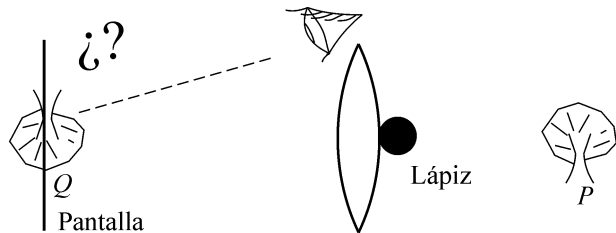


Figura 4.32 Corrimiento de  $Q$  por un vidrio.

◀ **Problema 4.12.** En una pantalla se observa la imagen de un objeto. Explique qué le ocurre a dicha imagen si los rayos que llegan al centro de la lente se bloquean, por ejemplo, con un lápiz, como se muestra en la Fig. 4.33. (La figura está sin escala ni perspectiva. Lo que usted observaría sería muy distinto sin en lugar de mirar a la pantalla situara sus ojos donde está la pantalla). ¿Qué ocurre si se cubre media lente, y tres cuartos de la lente? Haga la experiencia con una lente y un cuaderno como pantalla.



**Figura 4.33** ¿Cómo se afecta la imagen al cubrir parcialmente la lente?

**Ejemplo 4.15.** Un sistema óptico consta de 3 lentes delgadas que se representan mediante los rectángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  de la Fig. 4.34. La luz le llega al sistema desde la derecha y sale por la izquierda. Cada cuadrícula representa un cuadrado de una unidad de longitud u.l. de lado, donde 1 u.l. es cualquier distancia, p. ej., 1 cm, 15 cm o 1 m. El tamaño de las lentes se ha exagerado en aras de la claridad. La imagen que  $\alpha$  forma del objeto puntual  $A$  es  $B$ , la imagen que  $\beta$  forma de  $B$  es  $C$ , y la imagen que  $\gamma$  forma de  $C$  es  $D$ . (a) Escoja dos rayos, uno por encima y otro por debajo del eje principal y trace el recorrido total de ellos (como se trata de lentes, no tenga en cuenta rayos reflejados, sólo transmitidos); caracterice a  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  como objeto real o virtual, e imagen real o virtual, respecto a la lente que sea del caso. Halle la longitud focal de las lentes. (b) ¿Es perfecto el sistema óptico? (c) Si  $A$  tuviera una altura de 2 mm, ¿cuál sería la altura de  $D$ ? (d) ¿Cuál de las imágenes es posible observar en una pantalla? (e) Un observador  $O$  tiene un punto cercano de 25 cm. ¿Si  $O$  se sitúa a la izquierda de  $\gamma$ , puede observar la imagen  $C$ ?, ¿y la imagen  $D$ ? ¿Dónde se debe ubicar para observar con el máximo detalle a  $C$ ? (f) Especifique exactamente dónde se encuentra el foco objeto  $F$  del sistema.

**Solución.** Hemos escogido 2 rayos con un ángulo de incidencia en  $S_{1\alpha}$  notablemente mayor que  $0^\circ$  (ver a la derecha de  $\alpha$ , Fig. 4.35a) para aumentar la claridad del dibujo, aunque las ecuaciones que utilizamos solo son válidas para rayos paraxiales, esto es, con  $\theta_i \ll 1$  ( $1 = 1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$ ). Las caras de las lentes aparecen planas, pero realmente son casquetes esféricos; los rectángulos son meras representaciones.

(a) **Análisis para  $\alpha$ .** El sentido de propagación de la luz determina la convención de signos (+) y (-) que asignamos a las lentes. Los rayos llegan divergentes, por la

derecha de la lente  $\alpha$ , a la superficie  $S_{1\alpha}$  (Fig. 4.35a), dirigiéndose hacia  $A$ ; su intersección, mediante prolongaciones, está en la dirección de propagación.  $A$  es un objeto virtual,  $p_\alpha = -6 \text{ u.l.}$   $A$  puede ser producido por una lente convergente que no se muestra en la Fig. Los rayos refractados salen convergentes por  $S_{2\alpha}$  dirigiéndose hacia  $B$ ; su intersección está en la dirección de propagación.  $B$  es una imagen real,  $q_\alpha = -22 \text{ u.l.}$

Reemplacemos en la ecuación para lentes delgadas rodeadas de aire,  $1/p_\alpha - 1/q_\alpha = 1/f_\alpha$ , los anteriores valores de la distancia objeto y la distancia imagen respecto a  $\alpha$  para obtener

$$\frac{1}{-6} - \frac{1}{-22} = \frac{1}{f_\alpha}.$$

Despejamos la longitud focal y obtenemos que

$$f_\alpha = -8,25 \text{ u.l.}$$

**Análisis para  $\beta$ .** Los rayos que salen convergentes de  $\alpha$  hacia  $B$  son los que llegan convergentes a  $\beta$ ; o sea que  $B$  es imagen real para  $\alpha$  y simultáneamente objeto virtual para  $\beta$ . Los rayos refractados por  $\beta$  salen divergentes, intersecándose mediante prolongaciones en  $C$ , en sentido opuesto al de su propagación, lo que califica a  $C$  como una imagen virtual. El sistema de referencia lo trasladamos del centro  $C_\alpha$  al centro  $C_\beta$ , y obtenemos  $p_\beta = -3 \text{ u.l.}$  y  $q_\beta = +7 \text{ u.l.}$  Reemplazamos en la ecuación  $1/p_\beta - 1/q_\beta = 1/f_\beta$ , despejamos la longitud focal y obtenemos que

$$f_\beta = -2,1 \text{ u.l.}$$

**Análisis para  $\gamma$ .** El punto  $C$  es objeto real para  $\gamma$ ; su distancia a  $C_\gamma$  es  $p_\gamma = 22 \text{ u.l.}$  Además,  $D$  es una imagen real,  $q_\gamma = -6 \text{ u.l.}$  Reemplazamos en la ecuación de lentes delgadas y despejamos la longitud focal para obtener

$$f_\gamma = 4,71 \text{ u.l.}$$

La trayectoria a través del sistema de los dos rayos seleccionados se muestra en la Fig. 4.35b; un rayo está trazado con línea continua y el otro con línea discontinua.

Vemos que  $\alpha$  y  $\beta$  son lentes de borde grueso o divergentes, mientras que  $\gamma$  es de borde delgado o convergente.

(b) La imagen  $D$  del objeto puntual  $A$  también es puntual, por lo tanto el sistema de las 3 lentes es perfecto, esto es, no tiene aberraciones.

(c) Debemos hallar el aumento transversal  $M$  de  $D$  respecto a  $A$ . Una lente es un sistema formado por dos subsistemas: las superficies refringentes  $S_1$  por donde entra la luz, y  $S_2$  por donde sale; su aumento es  $M = M_{S_1} M_{S_2}$ . De igual manera, el aumento de nuestro sistema es el producto (¿por qué no es la suma?) de los

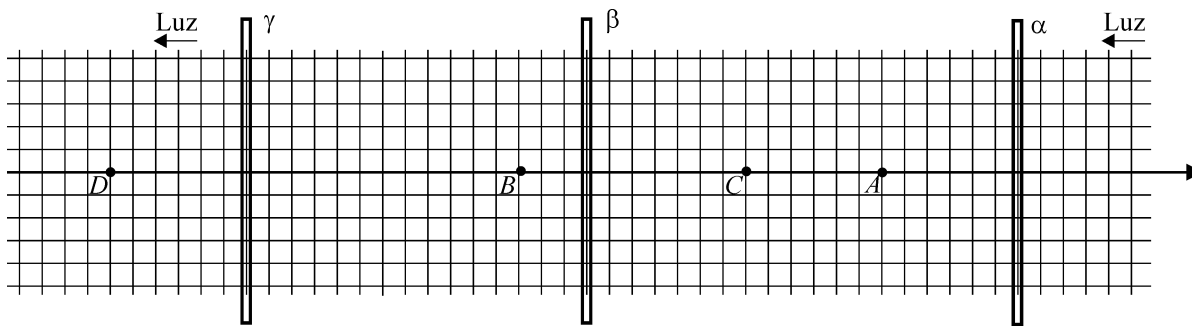


Figura 4.34 Objetos e imágenes.

aumentos parciales que hace cada uno de los subsistemas  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ ,

$$M = M_\alpha M_\beta M_\gamma = \left( \frac{q_\alpha}{p_\alpha} \right) \left( \frac{q_\beta}{p_\beta} \right) \left( \frac{q_\gamma}{p_\gamma} \right) \\ = \left( \frac{-22 \text{ u. l.}}{-6 \text{ u. l.}} \right) \left( \frac{+7 \text{ u. l.}}{-3 \text{ u. l.}} \right) \left( \frac{-6 \text{ u. l.}}{+22 \text{ u. l.}} \right) = \frac{7}{3} \\ \approx 2,33.$$

La altura de  $D$  es

$$h_D = M h_A = 2,33(2 \text{ mm}) \approx 4,7 \text{ mm}.$$

La imagen  $D$  es real, derecha, y 2,33 veces mayor que el objeto inicial  $A$ .

(d) Solo en el punto  $D$  se intersecan físicamente los rayos (Fig. 4.35a y b);  $D$  es la única imagen que es posible observar en una pantalla.

(e) A la izquierda de  $\gamma$  solo está la luz refractada por  $\gamma$ , no la refractada por  $\beta$ ; o sea que  $O$  sí puede observar a  $D$ , ubicándose como mínimo a 25 cm a la izquierda de  $D$ . Para observar a  $C$  tiene que ubicarse entre  $\beta$  y  $\gamma$ , como mínimo a 25 cm de  $C$ .

(f) Debemos hallar la longitud focal objeto  $f$  del sistema, esto es, debemos hallar en que punto sobre el eje principal debe estar un objeto puntual para que su imagen  $D$  se forme en el infinito, o equivalentemente, los rayos de  $\gamma$  salgan paralelos entre sí. Procedemos, al contrario del numeral (a), de izquierda a derecha:

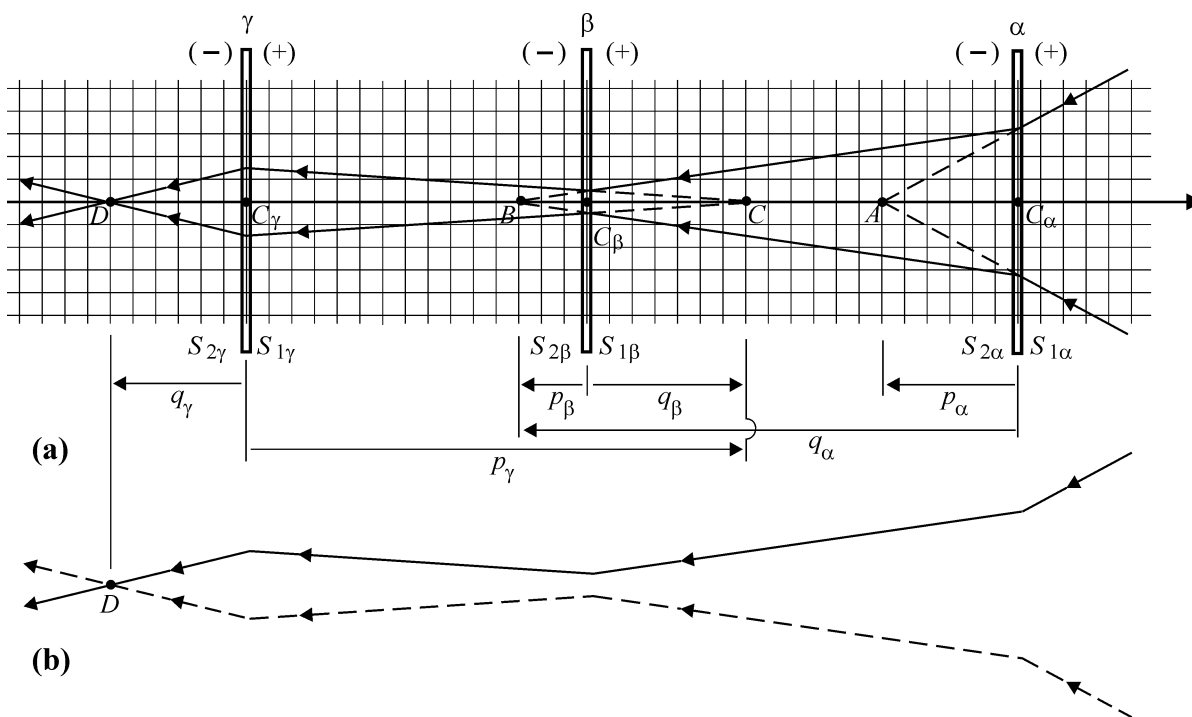


Figura 4.35 Trayectoria a través del sistema de los rayos refractados.



**Análisis para  $\gamma$ .** Reemplacemos en la ecuación de lentes  $1/p - 1/q = 1/f$  a  $q_\gamma = -\infty$  (o mejor,  $|q_\gamma| \gg p_\gamma$ ), y  $f_\gamma = 4,71$  u. l. Despejamos la distancia objeto y obtenemos

$$p_\gamma = f_\gamma = 4,71 \text{ u. l.}$$

**Análisis para  $\beta$ .** La distancia del anterior punto, el foco de  $\gamma$ , a  $\beta$  es  $q_\beta = -(15 - 4,71) = -10,29$  u. l. Además,  $f_\beta = -2,1$  u. l. Reemplazando en la ecuación de lentes y despejando, obtenemos que

$$p_\beta = -1,74 \text{ u. l.}$$

**Análisis para  $\alpha$ .** La distancia del punto con la anterior distancia objeto, a  $\alpha$ , es  $q_\alpha = -[19 - (-1,74)] =$

$-20,74$  u. l. Además,  $f_\alpha = -8,25$  u. l. Reemplazando en la ecuación de lentes y despejando, obtenemos que

$$p_\alpha = -5,9 \text{ u. l.}$$

El punto al que le corresponde esta distancia es el foco objeto  $F$  del sistema de las 3 lentes; está sobre el eje principal, a 5.9 u. l. a la izquierda de  $C_\alpha$ .

◀► **Problema 4.13.** Reubique al azar, sobre el eje principal, los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  de la Fig. 4.34 y, conservando el resto de la información, repita el Ejemplo 4.15. (Si los rayos caen fuera de alguna lente, reduzca el ángulo de incidencia en  $S_{1\alpha}$ ).

