

Introduzione alle verifiche di resistenza nel solido di De Saint Venant - Appendice

Claudio Pedrazzi, ultimo aggiornamento: 7/5/2004

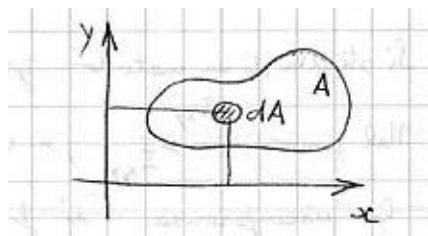
Cenni di geometria delle aree (o delle masse)

Per poter applicare concretamente le formule introdotte nei capitoli precedenti, dedicati alle verifiche di resistenza nel solido di De Saint Venant, occorre possedere alcune conoscenze elementari di geometria delle aree (o delle masse). Si tratta di un capitolo della geometria che definisce alcune proprietà "utili" di un'area, che per così dire si "aggiungono" a quelle piuttosto note come il baricentro e la sua superficie.

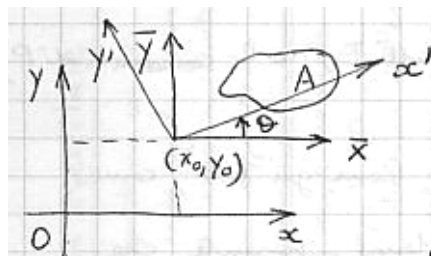
Questa branca della geometria si chiama anche "delle masse", perché se immaginiamo che l'area sia "ritagliata" da un foglio di materiale di spessore uniforme, avente una densità costante ed assegnata, tutte queste grandezze, moltiplicate per la densità stessa, acquistano immediatamente un preciso significato fisico, correlato alle proprietà statiche e dinamiche (inerziali) del corpo (2D o 3D che sia). E' a questo significato fisico che faremo riferimento nel seguito per rendere meno "astratta" la definizione di tali proprietà.

E' pur vero che i sistemi CAD permettono la rapida valutazione numerica di queste proprietà per un'area disegnata di qualsiasi forma. La loro definizione "matematica" resta però insostituibile quando si desidera risolvere un problema "inverso", in cui quindi la sezione sollecitata non è dimensionalmente nota in anticipo, ma è proprio l'incognita stessa del problema.

Consideriamo un'area di forma generica "A" nel piano cartesiano x,y , e il suo "elementino infinitesimale" " dA " come in figura:



E' anche spesso necessario essere in grado di esprimere le proprietà che verranno definite nel seguito, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano traslato nel punto x_0, y_0 ($\underline{x}, \underline{y}$) o rototraslato di un angolo θ (x', y') rispetto al sistema originale, come in figura:



Per ragioni tipografiche indicheremo nel seguito:

- gli assi **traslati** con X_t, Y_t e
- quelli **ruotati** con X_r, Y_r

Momenti statici

$$S_x = \int_A y \, dA \qquad S_y = \int_A x \, dA$$

Si tratta di grandezze definite rispetto ad un **asse**. Dimensionalmente $S = [L^3]$.
Se "G" é il baricentro dell'area "A", si ha anche che le sue coordinate sono:

$$x_G = \frac{S_y}{A} \qquad y_G = \frac{S_x}{A}$$

Come si vede, il momento statico é quindi nullo quando l'asse rispetto al quale viene calcolato é passante per il baricentro. Ciò aiuta anche nell'attribuzione di un significato fisico a questa grandezza: essa é direttamente proporzionale al **disequilibrio** statico che l'area in esame avrebbe, se sospesa e libera di ruotare intorno all'asse desiderato. Quando l'asse passasse per il baricentro, per definizione, l'area sarebbe infatti in equilibrio indifferente (non tenderebbe a ruotare).

Formule di traslazione e rotazione dei momenti statici

$$S_{xt} = S_x - y_0 \cdot A$$

$$S_{yt} = S_y - x_0 \cdot A$$

$$S_{xt'} = S_{xt} \cdot \cos(\theta) - S_{yt} \cdot \sin(\theta)$$

$$S_{yt'} = S_{yt} \cdot \cos(\theta) + S_{xt} \cdot \sin(\theta)$$

Momenti di inerzia

$$I_x = \int_A y^2 \, dA \qquad I_y = \int_A x^2 \, dA \qquad I_{xy} = \int_A x \cdot y \, dA$$

Si tratta di grandezze definite rispetto ad un **sistema di riferimento**. Dimensionalmente $I = [L^4]$. Talvolta vengono anche indicati come "momenti del secondo ordine", a causa dell'elevamento al quadrato che compare nella loro definizione.

Si definisce anche il cosiddetto "momento di inerzia polare" come segue:

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) \, dA = \int_A r^2 \, dA = I_x + I_y$$

Come si vede, grazie all'elevamento al quadrato, non esiste un'area di dimensioni finite che possa avere momento di inerzia nullo, indipendentemente dal sistema di riferimento prescelto. Un riferimento baricentrico ha però la proprietà di minimizzare i momenti di inerzia calcolati rispetto ad esso. Dal punto di vista fisico la denominazione "d'inerzia" é legata al comportamento

dinamico dell'area in esame, se immaginata sospesa e libera di ruotare intorno ad un asse: la "fatica" che si fa per accelerare o rallentare la rotazione intorno a quell'asse é direttamente proporzionale al momento d'inerzia dell'area rispetto a quell'asse. Il momento centrifugo esprime invece lo "squilibrio" dinamico dell'area, se messa in rotazione: se non é nullo, si genereranno forze non perpendicolari all'asse di rotazione.

Formule di traslazione e rotazione dei momenti d'inerzia

$$I_{xt} = I_x + y_0^2 \cdot A - 2 \cdot y_0 \cdot S_x$$

$$I_{yt} = I_y + x_0^2 \cdot A - 2 \cdot x_0 \cdot S_y$$

$$I_{xtyt} = I_{xy} + x_0 \cdot y_0 \cdot A - x_0 \cdot S_x - y_0 \cdot S_y$$

$$I_{xt} = I_{xt} \cdot \cos(\theta)^2 + I_{yt} \cdot \sin(\theta)^2 - 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot I_{xtyt}$$

$$I_{yt} = I_{xt} \cdot \sin(\theta)^2 + I_{yt} \cdot \cos(\theta)^2 + 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot I_{xtyt}$$

$$I_{xryr} = I_{xtyt} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \frac{1}{2} \cdot (I_{xt} - I_{yt}) \cdot \sin(2 \cdot \theta)$$

Momenti principali d'inerzia

Dato un generico sistema di riferimento (x,y) **baricentrico**, e supponendo noti i momenti di inerzia dell'area **A** rispetto ad esso, esiste sempre un sistema di riferimento "speciale" (ξ, η), anche esso centrato sul baricentro **G** di questa area, e ruotato di un angolo θ_0 , nel quale il momento centrifugo **I_{xh}** si **annulla**, e i due momenti restanti **I_x** e **I_h** sono il **massimo** ed il **minimo** possibile. Tale sistema di riferimento é quello degli "**assi principali di inerzia**", e i momenti **I_ξ** e **I_η** prendono il nome di "**momenti principali di inerzia**".

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \cdot \text{atan} \left(\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} \right)$$

$$I_{\xi} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2}$$

$$I_{\eta} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2}$$

Si sottolinea che affinché queste formule siano valide, occorre che gli assi iniziali (x,y) siano già baricentrici.

Dal punto di vista fisico, gli assi principali di inerzia sono i due assi (fra loro sempre ortogonali) di rotazione "preferenziali" dell'area immaginata libera di ruotare intorno ad un asse. Infatti per una rotazione intorno a questi assi non si avrebbero forze centrifughe squilibrate. Si tratta anche, se immaginiamo che l'area in esame sia una "trave" vista in sezione, dei due orientamenti di massima e minima resistenza alla flessione.