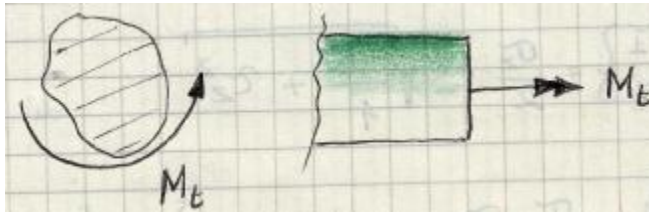


Introduzione alle verifiche di resistenza nel solido di De Saint Venant - Parte V

Claudio Pedrazzi, ultimo aggiornamento: 24/4/2004

Torsione



Nei casi precedenti (sforzo normale centrato, flessione retta e deviata, pressotenso flessione) si è sempre avuto modo $S_z \neq 0$, $t_z = 0$. Lo stato tensionale di torsione pura inverte la situazione, ovvero si ha per la prima volta $S_z = 0$, $t_z \neq 0$.

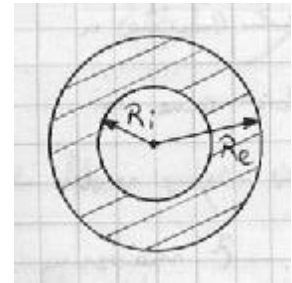
Questo stato tensionale si può risolvere analiticamente solo in un numero limitato di casi, che sono peraltro quelli di maggiore interesse pratico: sezioni circolari o corone circolari; sezioni sottili chiuse; sezioni sottili aperte. Si intende normalmente che una sezione è "sottile" se le dimensioni principali sono almeno 10 volte più grandi degli spessori.

Sezioni circolari o corone circolari

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{zr} = \frac{M_z}{J_t} \cdot r$$

$$J_t = \pi \cdot \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{2}$$



Dove:

M_z = Momento applicato (coppia torcente) intorno all' asse z [F*L]

J_t = Momento di inerzia polare della sezione [L⁴]

r = Distanza del punto generico dal centro (raggio generico) [L]

R_e = Raggio esterno della sezione circolare [L]

R_i = Raggio interno della corona circolare, oppure zero quando la sezione è piena [L]

Come si vede, la tensione di taglio è quindi massima sulla "pelle" esterna della sezione, quando il raggio generico r vale R_e .

Sezioni "sottili" chiuse

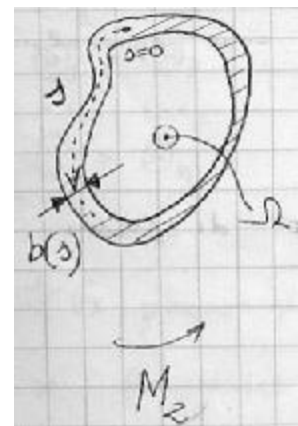
Vale la formula di Breda:

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{zs} = \frac{M_z}{2 \cdot \Omega \cdot b(s)}$$

Dove i simboli nuovi significano:

s = Riferimento (coordinata) curvilinea sulla linea media [L]



Ω = Area racchiusa dalla linea media [L^2]

$b(s)$ = Spessore (corda) della sezione, in generale funzione di s [L]

Come si vede, la tensione t varia lungo il perimetro della sezione, ma si suppone costante in direzione normale alla linea media. Quindi il massimo viene raggiunto semplicemente nel punto di minimo spessore b , sia sul bordo interno che su quello esterno.

Vale la pena di definire anche la quantità J_t , formalmente analoga al momento di inerzia polare, che in questo caso prende il nome di "fattore di rigidezza torsionale", e verrà usata al termine della trattazione per esprimere la deformazione angolare del concio elementare.

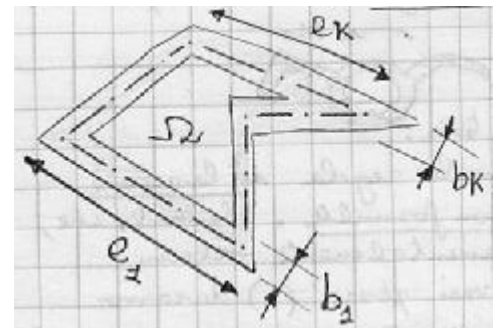
$$J_t = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\int_0^c \frac{1}{b(s)} ds}$$

Dove (simboli nuovi):

c = Lunghezza (perimetro) totale della sezione chiusa [L]

Nel caso particolare di **sezione sottile chiusa fatta di un numero N di tratti rettilinei di spessore costante**, l'integrale si semplifica in:

$$J_t = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\sum_{k=1}^N \frac{l_k}{b_k}}$$



Dove:

k = Contatore sul numero dei tratti rettilinei (da 1 a N)

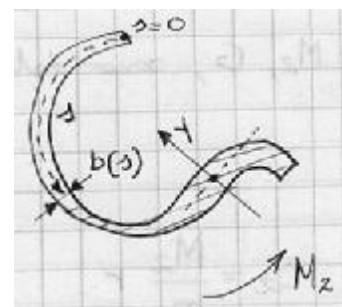
l_k = Lunghezza del tratto k -esimo [L]

b_k = Spessore del tratto k -esimo [L]

La t massima si raggiunge semplicemente in questo caso lungo tutto il tratto più sottile.

Sezioni "sottili" aperte

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0 \\ \tau_{zs} &= \frac{-2M_z}{J_t} \cdot y \end{aligned}$$



Dove i simboli nuovi significano:

y = Distanza normale del punto generico dalla linea media [L]

J_t = Fattore di rigidezza torsionale sezione [L^4] dato da:

$$J_t = \frac{1}{3} \int_0^c b(s)^3 ds$$

Dove, come prima:

s = Riferimento (coordinata) curvilinea sulla linea media [L]

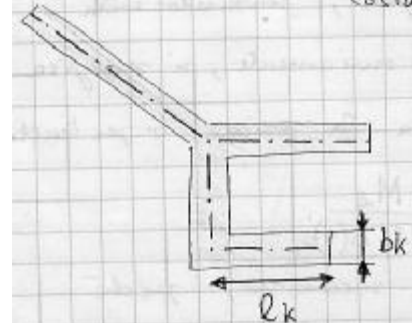
$b(s)$ = Spessore (corda) della sezione, in generale funzione di s [L]

c = Lunghezza totale della sezione aperta [L]

Evidentemente, la formula descrive quindi una distribuzione a "farfalla", che si azzerava sulla linea media. La t massima si raggiunge quindi, in una sezione sottile aperta, sui bordi ($y = \pm b/2$) della sezione normale fatta nel punto più spesso (il contrario del caso di sezione chiusa, dove il tratto più sollecitato era quello più sottile!).

Nel caso particolare di **sezione sottile aperta fatta di un numero N di tratti rettilinei di spessore costante**, l'integrale si semplifica in:

$$J_t = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (b_k)^3 \cdot l_k$$



Con lo stesso significato dei simboli del caso precedente.

Sezioni composte e generiche

Quelli sopra elencati sono tutti e soli i casi "elementari" risolvibili analiticamente. Un piccolo passo ulteriore, che non verrà descritto in dettaglio, consiste nelle sezioni che sono "scomponibili" in un certo numero di "parti" semplici appartenenti ad uno dei casi precedenti.

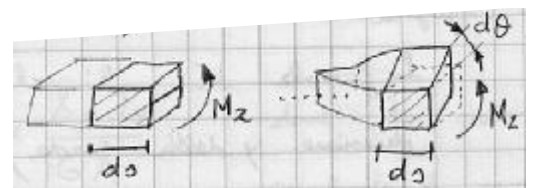
Il metodo risolutivo si basa sulla divisione del momento totale M_z fra le varie parti, mediante un fattore di ripartizione dato, per ciascuna, dalla frazione con cui essa contribuisce al J_t totale della sezione composta (ottenibile per semplice somma dei fattori di rigidezza torsionale delle varie sottosezioni).

Si noti che nulla è stato detto sulle sezioni "tozze" generiche (per esempio anche solo rettangolari!), e sulle sezioni sottili "triconnesse" (per esempio una sezione a forma di "B").

Deformazione a torsione

La deformazione del concio elementare sottoposto a torsione pura consiste di una rotazione intorno all'asse z data da:

$$\Theta = \frac{d}{ds} \theta = \frac{M_z}{G J_t}$$



Dove:

Θ = Angolo di rotazione assiale (torsione) per unità di lunghezza [radianti/L]

θ = Angolo di rotazione assiale nella lunghezza ds [radianti]

ds = Lunghezza del tronchetto infinitesimale [L]

J_t = Fattore di rigidezza torsionale [L^4], calcolato con una delle formule precedenti

G = Modulo di elasticità trasversale o tangenziale [F/L^2], a sua volta dato, per materiale isotropo, dalla formula

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

Dove:

E = Modulo di elasticità (o di Young) del materiale [F/L^2]

ν = Coefficiente o modulo di Poisson del materiale [adimensionale]