PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Interrogación # 1 de MAT 1532
Segundo Semestre, 2005

5 de Septiembre del 2005

1.- Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones:

(1)
$$t\frac{dx}{dt} - 3x = t^5.$$

Solución: Dividiendo por t:
$$\frac{dx}{dt} - \frac{3}{t}x = t^4.$$
Por lo tanto es una ecuacion lineal con factor integrante:
$$e^{-3\ln t} = t^{-3}.$$
Multiplicamos por el factor integrante:
$$t^{-3}\frac{dx}{dt} - 3t^{-4}x = t.$$
De donde:
$$\frac{d}{dt}(t^{-3}x) = t.$$
y la solución queda:
$$t^{-3}x = \frac{t^2}{2} + C \quad C \in \mathbb{R}.$$
Es decir:
$$x = \frac{t^5}{2} + Ct^3 \quad C \in \mathbb{R}.$$

(2)
$$xy + y^2 + x^2 - x^2\frac{dy}{dx} = 0.$$

Solución: Dividiendo por xy:
$$1 + y/x + (y/x)^{-1} - (y/x)^{-1}\frac{dy}{dx} = 0.$$
Usamos la sustitución $ux = y$, por lo tanto
$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u.$$
La ecuación queda:
$$1 + u + 1/u - (1/u)(x\frac{du}{dx} + u) = 0.$$
Equivalentemente:
$$x\frac{du}{dx} = u(1 + u + 1/u) - u = 1 + u^2.$$

Aplicamos separación de variables:

$$\frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

Haciendo $u = \tan t$ tenemos que:

$$\frac{\sin t}{\cos t}dt = -\ln|\cos t|$$

Por lo tanto:

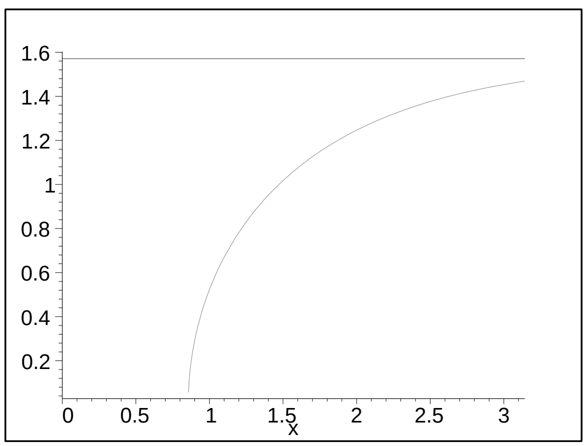
$$-\ln|\arctan(y/x)| = \ln|x| + C.$$

2.-

(1) Encuentre el dominio de definición maximal de la solución a:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cot y \\ y(1) &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Solución:



NOTAR que la ecuación no está definida para $y = 0$ e $y = \frac{\pi}{2}$ es solución de equilibrio. De aquí que la solución buscada debe estar en la franja determinada por estos valores.

La ecuación lleva a $\frac{seny}{cosy}dy = dx$; por integración se obtiene

$$-lncosy = x + lnC$$

de donde

$$cosy = Ce^{-x}$$

Imponiendo las condiciones iniciales se llega finalmente al resultado

$$y = Arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{1-x})$$

Poniendo $y = 0$ se obtiene el valor con el cual la solución llega al borde inferior de la franja, y éste es

$$x = 1 + ln\sqrt{3} - ln2$$

(apr. 0.85)

Por otra parte la solución tiende asintóticamente a la solución de equilibrio, de modo que está definida en

$$(1 + ln\sqrt{3} - ln2, +\infty)$$

(2) Encuentre las funciones $y(x)$ que satisfacen la siguiente ecuación:

$$\int_0^1 y(sx)ds = 2y(x).$$

Idea: haga un cambio de variables.

Solución:

Haciendo el cambio de variables sugerido $u = sx$ la ecuación cambia a

$$\frac{\int_0^x y(u)du}{x} = 2y$$

Derivando

$$\frac{xy - \int_0^x y(u)du}{x^2} = 2\frac{dy}{dx}$$

Reemplazando el valor de la integral desde arriba se obtiene la E. D.

$$2\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

lo que por integración directa lleva a

$$y^2 = \frac{C}{x}$$

la cual es la solución pedida.

3.- Un objeto que pesa 500 kg. se hunde en el agua partiendo del reposo. Sobre él actúa el agua con dos fuerzas: una su empuje hacia arriba, de 100 kg., y otra su resistencia que, en kilogramos, es numéricamente igual a $163v$, donde v está en mt/seg. Hallar la distancia recorrida al cabo de 5 segundos y la velocidad límite.

Solución:

La ecuacion correspondiente al modelo es

$$m\frac{dv}{dt} = W - B - cv$$

donde m es la masa del objeto, v la velocidad, W el peso (500), B el empuje del agua (100) y c el coeficiente de fricción (163) .

Dada la condición inicial $v(t) = 0$ se llega, por separación de variables, a la solución

$$v(t) = \frac{b}{c}(1 - e^{-\frac{ct}{m}})$$

donde $b = W - B$ (400 kg)

De aquí es inmediato que la velocidad límite es

$$v = \frac{b}{c}$$

(apr. 2.45 mt/seg)

La ecuación para la posición es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b}{c}(1 - e^{-\frac{ct}{m}})$$

la que junto con la condición inicial $x(0) = 0$ entrega la solución

$$x(t) = \frac{b}{c}(t + \frac{m}{c}e^{\frac{-ct}{m}}) - \frac{bm}{c^2}$$

Por último sólo queda evaluar en $t = 5$ y el resultado final es

$$x(5) = \frac{400}{163}(5 + \frac{500}{9.8 \cdot 163}e^{\frac{-5 \cdot 9.8 \cdot 163)}{500}}) - \frac{400 \cdot 500}{9.8 \cdot 163^2}$$

(apr. 11.5 mts)

4.- Considere la familia a un paramétro $a \in \mathbb{R}$ de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - ay + 1.$$

(1) Haga el diagrama de bifurcación de esta familia. Determine los paramétros de bifurcación.

Solución: Los puntos de equilibrio son los (a, y) tal que

$$y^2 - ay + 1 = 0.$$

Si despejamos a:

$$a = y + 1/y$$

Esta función tiene asintotas oblicuas $a = y$ hacia $+\infty$ y $-\infty$. Asintota vertical en $y = 0$. Además

$$\frac{da}{dy} = 1 - 1/y^2$$

Por lo tanto tiene puntos criticos en ± 1. Donde toma valores $a = 2$ y $a = -2$. Es creciente para $|y| > 1$ y decreciente para $|y| < 1$. El diagrama de bifurcación se obtiene al intercambiar los ejes a e y en el grafico de a en función de y. El gráfico de la función representa los puntos de equilibrio. El signo de dy/dt se obtiene a través de puntos prueba en cada una de las tres regiones ya que $y^2 - ay + 1$ es continua en las dos variables.

Los parámetros de bifurcación son $a = +2$ y $a = -2$ donde la ecuación cambia entre tener dos puntos de equilibrio y no tener puntos de equilibrio.

(2) Dado a denotamos por $y^*(a)$ el mayor de el/los punto(s) de equilibrio de la ecuación diferencial correspondiente. Calcule:

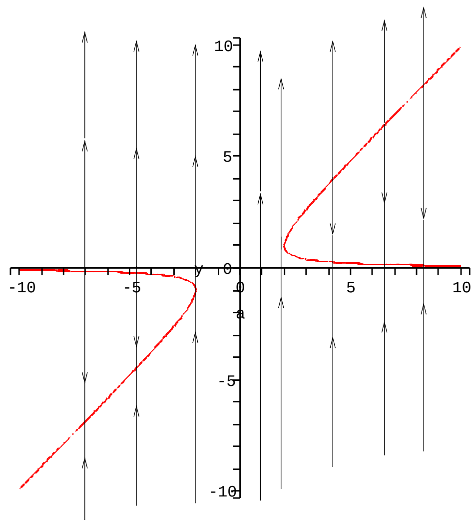
$$\lim_{a \to +\infty} \frac{y^*(a)}{a}.$$

Verifique que su resultado se refleja en el diagrama de bifurcación.

Solución 1: Como la asintota oblicua de a en función de y cuando $a \to \infty$ es $a = y$. Tal limite es 1.

Solución 2: Solucionando para y en función de a obtememos:

$$y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$



De donde

$$\frac{y^*(a)}{a} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2a} = \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{4}{a^2}} \to 1$$

cuando $a \to \infty$.

(3) Escriba los puntos de equilibrio como función de $a \in \mathbb{R}$. Clasifíquelos.

Solución

Caso $|a| < 2$*:* No hay puntos de equilibrios.

Casos $a = \pm 2$*:* los puntos de equilibrio son $y = \pm 1$ respectivamente. En ambos casos estos puntos son de tipo nodo.

Caso $a > 2$*:* El punto de equilibrio:

$$y = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

es fuente y el punto

$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

es sumidero.

Caso $a < 2$*:* El punto de equilibrio:

$$y = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

es fuente y el punto

$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

es sumidero.

Tiempo: 2 horas.