

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

MAT1202, Álgebra Lineal
GUIA N° 4
Septiembre, 2005

1. Si A es de 3×3 y $\det(A) = 4$ encuentre $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det(A^3)$, $\det(A^{-1})$, $\det(1/2A)$.
2. Idem que el problema anterior pero para una matriz A de 6×6 .
3. Verdadero o falso. Fundamente su respuesta.
 - (a) El determinante de $I + A$ es $1 + |A|$.
 - (b) $|A^n| = |A|^n$
 - (c) $|3A| = 3|A|$
 - (d) AB y BA tienen el mismo determinante
 - (e) $|A + B| = |A| + |B|$
 - (f) Si $a_{i,j} = i * j$ entonces $|A| = 0$, para A de $n \times n$, $n > 1$.
 - (g) Si $a_{i,j} = i + j$ entonces $|A| = 0$ para A de $n \times n$, $n > 2$.
4. Encuentre el error del razonamiento: Si $AB = -BA$ entonces $|A||B| = -|B||A|$ y por lo tanto $|A| = 0$ o $|B| = 0$. Es decir, una de las dos matrices debe ser singular (esto es falso).
5. Si la suma de los elementos de cada columna de A es 0, demuestre que $\det(A) = 0$. Si la suma de los elementos de cada columna es 1 demuestre que $\det(A - I) = 0$. ¿Implica esto que $|A| = 1$?
6. Sean u_1, u_2, u_3 vectores (columna) de R^3 . Demuestre que la matriz

$$A = [u_1 + u_2 - u_3 \quad 2u_1 - u_2 + 3u_3 \quad -u_1 + 2u_2 - 2u_3]$$

tiene determinante igual a cero.

7. Suponga que existe $x \neq \vec{0}$ tal que $Ax = 5x$. Demuestre que $|A - 5I| = 0$.

8. Demuestre que si A es simétrica positiva definida entonces $|A| > 0$.
9. Sea A simétrica. Demuestre que
- A es positiva definida sii cada submatriz principal A_k de A tiene determinante positivo.
 - A es negativa definida sii los signos de los determinantes de las submatrices principales A_k de A alternan, con $A_{1,1} < 0$.
10. Usando el criterio de los subdeterminantes del problema anterior, clasifique la forma cuadrática $F(x) = x^T Ax$ para cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & 17/2 & -17/2 \\ 4 & -17/2 & 23/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & 6 \\ -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 4 & -10 & 10 \\ -4 & 10 & -9 \end{bmatrix}$$

11. Usando determinantes determine los valores de k para los cuales la matriz A es positiva definida, donde

$$A = \begin{bmatrix} 5 - k & 2 & -7 + k \\ 2 & 2 & -4 \\ -7 + k & -4 & 10 \end{bmatrix}.$$

12. Demuestre que si A es de $n \times n$ tal que sus columnas \vec{a}_i cumplen $\vec{a}_i^T \vec{a}_j = 0$ para $i \neq j$ y $\vec{a}_i^T \vec{a}_i = 1$ (estas matrices se llaman ortogonales) entonces $|A| = \pm 1$.
13. Si $|A| = -2$ y se realizan las siguientes operaciones: transpongo, luego invierto, luego intercambio las filas 1 y 10, luego multiplico la fila 1 por 2, luego divido la columna 3 por 2, a continuación sumo 10 veces la fila 3 a la fila 4, luego invierto y finalmente multiplico por A^T . ¿Cuanto vale el determinante de la matriz obtenida?
14. Encuentre los valores de λ tal que $A - \lambda I$ no tiene inversa.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

15. Use operaciones elementales fila para demostrar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

16. Use operaciones filas para determinar el valor de los determinantes de las matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

17. Usando determinantes, determine el valor de k tal que las siguientes matrices sean invertibles

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & -1 & -k & 2k \\ k & 0 & 0 & -k \\ 5 & 0 & 0 & -k \\ 0 & k & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} k & 1 & k-1 \\ 0 & k & -k \\ 1 & k & -2k \end{bmatrix}$$

18. Pruebe que $\text{Det}(A) = 12 \text{Det}(B)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 63 & 54 & 46 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 13 & 33 & 23 \\ 30 & 77 & 53 \\ 39 & 99 & 70 \end{bmatrix}$$

19. Pruebe que el $\text{Det}(A) = (a+b+c)^3$, con

$$A = \begin{bmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{bmatrix}$$

20. Pruebe que el $\text{Det}(A) = (a-1)^6$, con

$$A = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

21. Resuelva la ecuación $\text{Det}(A) = 0$, con

$$A = \begin{bmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{bmatrix}$$

22. Resuelva la ecuación $\text{Det}(A) = 0$, con

$$A = \begin{bmatrix} a & a & x \\ c & c & c \\ b & x & b \end{bmatrix}$$

23. Demuestre que la matriz de derivadas parciales de $f(A) = \ln(\det(A))$ es A^{-1} . Es decir

$$f(a, b, c, d) = \ln(ad - bc) \text{ implica } \begin{bmatrix} \partial f / \partial a & \partial f / \partial b \\ \partial f / \partial c & \partial f / \partial d \end{bmatrix}^T = A^{-1}$$

24. Ubique el mínimo número de elementos iguales a 0 que garantizan $\det(A) = 0$. Ubique el máximo número de elementos distintos de 0 que permiten que $\det(A) \neq 0$.

25. Sea A_n una matriz tridiagonal con elementos distintos de cero igual a 1. Por ejemplo

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea $E_n = |A_n|$

- (a) Demuestre que $E_n = E_{n-1} - E_{n-2}$.
- (b) Comenzando con $E_1 = 1$ $E_2 = 0$ determine E_8 .
- (c) Calcule E_{100} .

26. Si todos los cofactores de A son iguales a cero ¿como sabe Ud. que A no tiene inversa?. Si ningún cofactor de A es igual a cero, ¿se puede concluir que A tiene inversa?.

27. Si todos los elementos de A son enteros y $|A| = \pm 1$ demuestre que A^{-1} es también entera. Construya una matriz A entera no trivial de 4×4 con inversa entera.

28. Si Ud. conociera los 16 cofactores de una matriz A de 4×4 , ¿como se puede determinar A ?

29. Verdadero o Falso. Fundamente se respuesta:

(a) Si A es diagonal por bloques entonces $\det(A)$ es el producto de los determinantes de los bloques.

(b) La matriz por bloques $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ donde A, B, C, D son matrices tiene determinante $|X| = |A||D| - |B||C|$.

30. Por el método de la adjunta calcule la inversa de las siguientes matrices.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -0 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

31. Demuestre que $|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$

32. Demuestre que si A es antisimétrica de orden impar entonces $|A| = 0$.

33. Demuestre que las matrices A y $B = P^{-1}AP$ siempre tienen el mismo determinante.

34. Resuelva usando la regla de Cramer

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 2 \\ -2x_1 - 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y - 3z + 2w &= 3 \\ 3x - y + z - 3w &= 1 \\ x - z &= 0 \\ -x + w &= 2 \end{aligned}$$

35. Use la Regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

$$(a) \quad \begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= d \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 &= d^2 \\ a^3x_1 + b^3x_2 + c^3x_3 &= d^3 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} (b+c)x_1 + ax_2 + ax_3 &= 1 \\ bx_1 + (c+a)x_2 + bx_3 &= 1 \\ cx_1 + cx_2 + (a+b)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

36. Demostrar sin hacer el desarrollo del determinante, que

$$(a) \quad \begin{vmatrix} na_1 + b_1 & na_2 + b_2 & na_3 + b_3 \\ nb_1 + c_1 & nb_2 + c_2 & nb_3 + c_3 \\ nc_1 + a_1 & nc_2 + a_2 & nc_3 + a_3 \end{vmatrix} = (n^3 + 1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(b) La ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

tiene una raíz igual a 0.

37. Si A es de orden n , demuestre que

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n 2^{n-1} (2-n)$$

38. Calcular

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & \cdots & x \\ x & -1 & x & \cdots & x \\ x & x & -1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

39. La siguiente es una técnica para obtener ecuaciones de curvas o superficies que pasan por una cierta cantidad de puntos. Mostramos el método para un círculo.

La ecuación de un círculo con centro en (a, b) y radio r es $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Expandiendo los cuadrados de binomio y dividiendo la ecuación por r^2 obtenemos

que la ecuación del círculo se escribe como $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$. Si el círculo pasa por 3 puntos no colineales (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ entonces se tiene que A, B, C, D satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D &= 0 \\ A(x_1^2 + y_1^2) + Bx_1 + Cy_1 + D &= 0 \\ A(x_2^2 + y_2^2) + Bx_2 + Cy_2 + D &= 0 \\ A(x_3^2 + y_3^2) + Bx_3 + Cy_3 + D &= 0 \end{aligned}$$

Este es un sistema homogéneo de 4 ecuaciones y 4 incógnitas. Para que este sistema tenga una solución no nula A, B, C, D , su matriz de coeficientes no puede tener inversa, y por lo tanto su determinante debe ser igual a cero, es decir, se debe cumplir que

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

para todo x, y . Esta es la ecuación del círculo.

- Determine la ecuación del círculo que pasa por los puntos $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$. ¿Cuál es su radio y centro?
- Demuestre que la ecuación del plano $ax + by + cz + d = 0$ que pasa por los puntos (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, 3$ es

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Determine la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 0, 1), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)$.
- Usando un determinante determine la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por 3 puntos $(2, 1), (3, 4), (-1, 0)$.