Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Algebra Lineal MAT-1202
GUIA N° 3
Septiembre 2005

1. Escriba explícitamente cada una de las matrices elementales que llevan A a su forma triangular U para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

   Usando estas matrices encuentre una matriz M tal que $MA = U$.

2. (a) Suponga que E resta la fila 1 a la fila 2 y P intercambia las filas 2 con la 3. Calcule $M = PE$, la matriz que realiza los 2 pasos en 1.
   (b) Suponga que P intercambia las filas 2 y 3 y que E resta la fila 1 a la 3. Calcule $M = EP$, la matriz que realiza los 2 pasos en 1.
   (c) Explique por qué las matrices M son iguales y por qué las matrices E son distintas.

3. Si $P = P_1P_2\cdots P_k$ donde las P_i son matrices elementales de permutación, demuestre que
   - P es la matriz identidad con sus filas intercambiadas.
   - $P^{-1} = P^T$

4. Determine las inversas de

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

5. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exprese A y A^{-1} como el producto de matrices elementales.

6. (a) Demuestre que el producto de matrices triangulares inferiores con 1's en su diagonal es triangular inferior con 1's en su diagonal, y el producto de triangulares superiores es triangular superior.

   (b) Demuestre que la inversa de un matriz triangular superior existe si y sólo si los elementos de su diagonal son no nulos.

   (c) Demuestre que la inversa de una triangular inferior con 1's en la diagonal es triangular inferior con 1's en la diagonal, y la inversa de una triangular superior es triangular superior (cuando existe).

   (d) Usando las anteriores demuestre que si A tiene inversa y $A = L_1U_1 = L_2U_2$ entonces $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$, es decir, la factorización $A = LU$ es única.

7. Encuentre tres matrices A de 2×2 ($A \neq I$) tal que $A^{-1} = A$

8. Suponga que B se obtiene de A (de 5×5) restando la segunda fila a la quinta, luego intercambiando las filas 2 con 4, luego multiplicando la columna 3 por (-2), luego sumando 2 veces la primera columna a la tercera. Demuestre que si A tiene inversa entonces B también tiene inversa y explique como obtener B^{-1} a partir de A^{-1} mediante operaciones elementales (fila y columna).

9. Demuestre que si A tiene sus filas linealmente independientes y la escalonada reducida de $[A|I]$ es $[EscA|X]$ entonces X es la inversa de la matriz B formada por las columnas pivotes de A.

10. (a) Calcule la factorización $PA = LU$ de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Usando la factorización encontrada, resuelva el sistema $Ax = b$ donde $b = (1, 3, 2)$

(c) Usando la factorización, determine eficientemente los valores de α y β tales que $A^T x = b$, con $b = (1, 2, 3, \alpha, \beta)^T$, tiene solución.

(d) Usando la factorización, determine las inversas por la derecha de A

11. Calcule $A = LU$ para la matriz

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

Encuentre condiciones en a, b, c, d para los cuales A es invertible.

12. Sea $A = LU$ donde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sin calcular A determine:

(a) La solución de $Ax = b$ con $b = (1, 1, 1)^T$

(b) La primera columna de A^{-1}

(c) La segunda fila de A^{-1}

(d) Sólo el elemento $2, 3$ de A^{-1}.

(e) La solución de $A^2 x = b$ con $b = (1, 1, 1)^T$

(f) La solución de $A^T x = b$ con $b = (1, 1, 1)^T$.

(g) La solución de $A^T A x = b$ con $b = (1, 1, 1)^T$.

13. Ejercicios con Aritmética Modular

(a) Determina la inversa en $\mathbb{Z}_2$ de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Determina una factorización $PA = LU$ en $\mathbb{Z}_5$ de $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Usando esta factorización determina el valor de α tal que el sistema $Ax = b$ tiene solución en $\mathbb{Z}_5$, donde $b = [1, 0, \alpha]^T$ ¿Cuantas soluciones hay?

(c) Demuestra que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene inversa en $\mathbb{Z}_3$, y encuéntrela, pero no tiene inversa en $\mathbb{Z}_2$.

14. Demuestre que

(a) Si A, B son matrices de $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente, entonces la matriz por bloques $\begin{bmatrix} A & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & B \end{bmatrix}$ es semétrica definida positiva sii A, B son simétricas definidas positivas.

(b) Si C, A son de $n \times n$, con C invertible, entonces A es simétrica definida positiva sii $B = C^T AC$ también lo es.

(c) Si A, B son simétricas de $n \times n$, con A definida positiva, B semi definida positiva y $\alpha, \beta > 0$, entonces $\alpha A + \beta B$ es simétrica definida positiva.

(d) A es simétrica definida positiva sii A^{-1} también los es.

(e) Las matrices $B = A^T A$ y $C = AA^T$ son siempre semi-definidas positivas.

(f) $B = A^T A$ es simétrica definida positiva sii las columnas de A son l.i.

(g) Si A es simétrica e invertible entonces $B = A^{2k}$ es simétrica definida positiva.

(h) Si A es simétrica definida positiva entonces A^n es simétrica definida positiva.

15. Calcule las factorizaciones de Cholesky sin y con raíz cuadrada $A = LDL^T = R^T R$ de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -6 \\ 4 & 9 & -2 & -10 \\ -2 & -2 & 7 & 11 \\ -6 & -10 & 11 & 25 \end{bmatrix}$$

16. Este problema muestra que es posible calcular la inversa de cualquier matriz A invertible mediante la factorización de Cholesky

    Demuestre que si A es invertible, $B = A^T A$, y $B = R^T R$ es la factorización de cholesky (con raíz cuadrada) de B, X es la solución $R^T X = A^T$, Y es la solución de $RY = X$, entonces $Y = A^{-1}$.

17. Determine si las siguientes formas cuadráticas son definidas positivas o negativas. Indique el cambio de variables que diagonaliza a la forma cuadrática.

    (a) $2\,{x_1}^2 - 4\,x_1 x_2 + 4\,x_1 x_3 + 5\,{x_2}^2 + 8\,x_2 x_3 + 16\,{x_3}^2$

    (b) ${x_1}^2 + 4\,x_1 x_2 + 6\,x_1 x_3 + 8\,x_1 x_4 + 6\,{x_2}^2 + 20\,x_2 x_3 + 12\,x_2 x_4 + 19\,{x_3}^2 + 8\,x_3 x_4 + 28\,{x_4}^2$

    (c) $2\,{x_1}^2 - 8\,x_1 x_2 + 8\,x_1 x_3 + 10\,{x_2}^2 - 8\,x_2 x_3 + 4\,x_2 x_4 + 19\,{x_3}^2 + 8\,x_3 x_4 + 3\,{x_4}^2$

18. Demuestre que si A es una matriz simétrica, entonces si se intercambian simétricamente filas y columnas (es decir si se intercambian filas i, j también se intercambina las columnas i, j) se obtiene una matriz simétrica.

19. Demuestre que si A es simétrica, definida positiva y se realizan intercambio de filas y columnas simétricamente (ver problema anterior), entonces la matriz que se obtiene es también definida positiva.

20. Determine los valores de x, y tal que A es definida positiva

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y \\ x & x & x & x & x & x & 1+6\,y \end{bmatrix}$$