

## Capitolul 6

# Calcul integral

### 6.1 Integrale multiple

Fie  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  și  $(F, \mathcal{F}, \nu)$  două spații cu măsură. Dacă  $A \in \mathcal{E}$  și  $B \in \mathcal{F}$ , atunci mulțimea  $A \times B \subset E \times F$  este numită *dreptunghi*.

**Definiția 6.1.**  $\sigma$ -algebra pe  $E \times F$  generată de familia dreptunghiurilor este numită  $\sigma$ -algebra produs a  $\sigma$ -algebrelor  $\mathcal{E}$  și  $\mathcal{F}$  și se notează  $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ .

Precizăm faptul că aici este vorba de un “abuz de notație” în sensul că  $\sigma$ -algebra produs nu coincide (de fapt este inclusă) cu produsul cartezian al familiilor  $\mathcal{E}$  și  $\mathcal{F}$ .

**Exemplul 6.1.** Dacă se consideră borclienele  $\mathcal{B}$  de pe dreapta reală, atunci  $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$  este  $\sigma$ -algebra Borel  $\mathcal{B}^2$  din  $\mathbb{R}^2$ . Astfel, prin inducție, se poate obține  $\sigma$ -algebra Borel  $\mathcal{B}^d$  din  $\mathbb{R}^d$  ca produs de  $\sigma$ -algebre. ■

**Definiția 6.2.** Fie  $D \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$  și  $x \in E$ ,  $y \in F$ .

1. Se numește *secțiunea lui  $D$  în punctul  $x$* , notată  $D_x$ , mulțimea din  $\mathcal{F}$  (v. teorema 6.1) definită prin (v. Fig. 5.1, a))

$$D_x = \{y \in F \mid (x, y) \in D\}$$

2. Se numește *secțiunea lui  $D$  în punctul  $y$* , notată  $D^y$ , mulțimea din  $\mathcal{E}$  (v. teorema 6.1) definită prin (v. Fig. 5.1, b))

$$D^y = \{x \in E \mid (x, y) \in D\}$$

#### Cazuri particulare

1. *Dreptunghi* i.e.  $D = A \times B$ ,  $A \in \mathcal{E}$ ,  $B \in \mathcal{F}$ . Avem

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B & \text{pentru } x \in A \\ \emptyset & \text{pentru } x \in E \setminus A \end{cases}$$

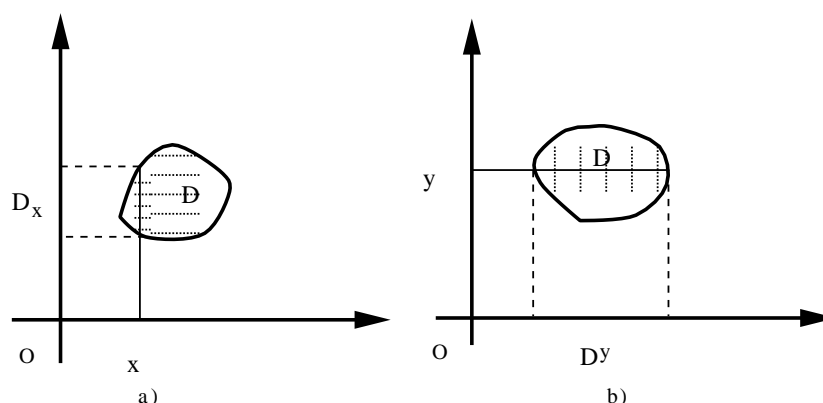


Fig. 6.1: Proiecții

2. a) *Intergrafic proiectabil pe  $Ox$  sau domeniu simplu în raport cu  $Oy$ .* Fie  $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue astfel încât  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  pentru orice  $x \in [a, b]$ . Atunci (v. Fig. 5.2, a))

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Avem

$$D_x = \begin{cases} [\varphi(x), \psi(x)] & \text{pentru } x \in [a, b] \\ \emptyset & \text{pentru } x \notin [a, b] \end{cases}$$

- b) *Intergrafic proiectabil pe  $Oy$  sau domeniu simplu în raport cu  $Ox$ .* Fie  $\varphi, \psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continue astfel încât  $\varphi(y) \leq \psi(y)$  pentru orice  $y \in [c, d]$ . Atunci (v. Fig. 5.2, b))

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

Avem

$$D^y = \begin{cases} [\varphi(y), \psi(y)] & \text{pentru } y \in [c, d] \\ \emptyset & \text{pentru } y \notin [c, d] \end{cases}$$

3. *Intergrafice proiectabile în  $\mathbb{R}^3$ .* Considerăm  $\mathbb{R}^3$  ca fiind produsul cartezian  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . Fie  $M \subset \mathbb{R}^3$  o mulțime măsurabilă și mărginită, iar  $\varphi, \psi: M \rightarrow \mathbb{R}$  continue astfel încât  $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$  pentru orice  $(x, y) \in M$ . Mulțimea

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in M, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

va fi numită intergrafic proiectabil pe  $xOy$ . Avem

$$D_{xy} = \begin{cases} [\varphi(x, y), \psi(x, y)] & \text{pentru } (x, y) \in M \\ \emptyset & \text{pentru } (x, y) \notin M \end{cases}$$

Similar se definesc intergrafice proiectabile pe  $yOz$  sau  $zOx$

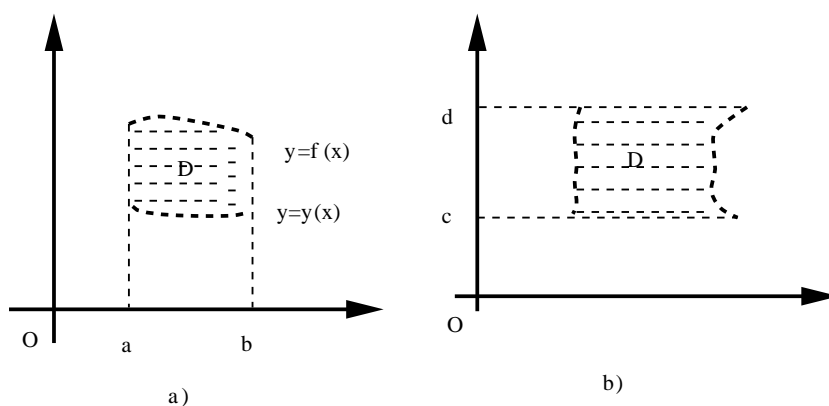


Fig. 6.2: Intergrafice proiectabile

**Teorema 6.1.** Fie  $D \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ . Atunci

1. Pentru orice  $x \in E$  și  $y \in F$  avem  $D_x \in \mathcal{F}$  și  $D^y \in \mathcal{E}$ .
2. Funcțiile  $x \rightarrow \nu(D_x)$  și  $y \rightarrow \mu(D^y)$  sunt măsurabile Borel și avem

$$\int_E \nu(D_x) \mu(dx) = \int_F \mu(D^y) \nu(dy) \quad (6.1)$$

*Demonstrație.* Vom face demonstrația doar pentru cazul particular când  $D$  este dreptunghi (v. cazul particular 1 de mai sus). În acest caz

$$\nu(D_x) = \begin{cases} \nu(B) & \text{pentru } x \in A \\ 0 & \text{pentru } x \notin A \end{cases} \implies \nu(D_x) = \nu(B) \mathbf{1}_A(x)$$

și

$$\mu(D^y) = \begin{cases} \mu(A) & \text{pentru } y \in B \\ 0 & \text{pentru } y \notin B \end{cases} \implies \mu(D^y) = \mu(A) \mathbf{1}_B(y)$$

deci proiecțiile sunt măsurabile. Pe de altă parte membrul stâng din (6.1) se scrie

$$\int_E \nu(B) \mathbf{1}_A(x) \mu(dx) = \nu(B) \int_E \mathbf{1}_A(x) \mu(dx) = \nu(B) \mu(A)$$

iar membrul drept

$$\int_F \mu(A) \mathbf{1}_B(y) \nu(dy) = \mu(A) \int_F \mathbf{1}_B(y) \nu(dy) = \mu(A) \nu(B)$$

ceea ce demonstrează egalitatea.  $\square$

**Definiția 6.3.** Valoarea comună a celor doi membri ai relației (6.1) definește o măsură pe  $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ , notată  $\mu \times \nu$ , și numită *măsura produs* a măsurilor  $\mu$  și  $\nu$ .

Așadar, pentru  $D \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ , avem

$$(\mu \times \nu)(D) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E \nu(D_x) \mu(dx) = \int_F \mu(D^y) \nu(dy) \quad (6.2)$$

În particular, pentru  $A \in \mathcal{E}$  și  $B \in \mathcal{F}$ ,

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B) \quad (6.3)$$

Dacă  $f: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$  este măsurabilă Borel, atunci se poate considera integrala  $\int_{E \times F} f d(\mu \times \nu)$ . Pentru calculul unei astfel de integrale avem următoarea teoremă a cărei demonstrație o omitem (v. c.g. [2], [15]):

**Teorema 6.2.** (Teorema lui Fubini, G. Fubini, 1870-1943) Presupunem că funcția  $f: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$  este măsurabilă Borel și îndeplinește una din următoarele condiții:

- $f$  este pozitivă;
- $f$  este integrabilă pe  $E \times F$  în raport cu măsura produs  $\mu \times \nu$ .

Atunci avem

$$\begin{aligned} \int_{E \times F} f(x, y) \mu(dx) \times \nu(dy) &= \int_E \mu(dx) \int_F f(x, y) \nu(dy) \\ &= \int_F \nu(dy) \int_E f(x, y) \mu(dx) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Teorema lui Fubini permite calculul integralei pe spațiul produs ca o succesiune de două integrale pe fiecare dintre spațiile componente.

**Observația 6.1.** 1. Dacă  $E = F = \mathbb{R}$ ,  $\mu$  și  $\nu$  reprezintă măsura Lebesgue pe  $\mathbb{R}$ , atunci  $\mu \times \nu$  este măsura Lebesgue în  $\mathbb{R}^2$ . Integrala în raport cu această măsură se notează

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$$

și se numește *integrală dublă*.

2. Fie  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $F = \mathbb{R}$ ,  $\mu$  măsura Lebesgue în  $\mathbb{R}^2$ ,  $\nu$  măsura Lebesgue pe  $\mathbb{R}$ . Integrala pe  $E \times F = \mathbb{R}^3$  se notează

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz$$

și se numește *integrală triplă*.

3. Pentru  $f \equiv 1$ , și  $D$  o mulțime din  $\mathbb{R}^2$  sau  $\mathbb{R}^3$ , măsurabilă și cu arie, respectiv volum, se obține

$$\iint_D dx dy = \text{aria}(D), \quad \iiint_D dx dy dz = \text{vol}(D)$$

Din teorema 6.2 rezultă că integrala dublă pe un dreptunghi  $D = [a, b] \times [c, d]$  poate fi calculată astfel:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \quad (6.5)$$

Fie  $D \in \mathcal{B}^2$  și  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă sau pozitivă și măsurabilă. Conform teoremei 6.2 avem

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_D(x, y) f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_D(x, y) f(x, y) dy$$

dar

$$\mathbb{1}_D(x, y) = \mathbb{1}_{D_x}(y)$$

astfel că

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{D_x} f(x, y) dy \quad (6.6)$$

Analog

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{D_y} f(x, y) dx \quad (6.7)$$

În particular, pentru un intergrafic proiectabil pe  $Ox$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \quad (6.8)$$

iar pentru un intergrafic proiectabil pe  $Oy$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \quad (6.9)$$

**Exemplul 6.2.** Ne propunem să calculăm integrala

$$I = \iint_D (x + y) dx dy$$

unde  $D$  este mărginit de curbele  $y^2 = px$ ,  $x = \frac{p}{2}$ ,  $p > 0$  dat (v. Fig. 5.3).

Integrala poate fi calculată considerând că  $D$  este intergrafic proiectabil,

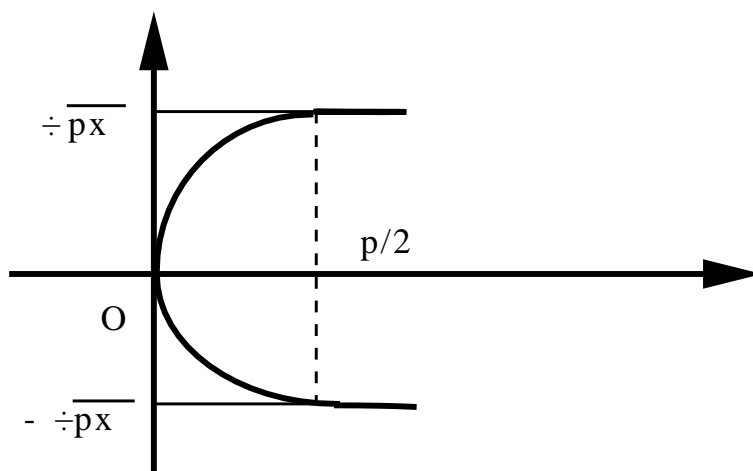


Fig. 6.3: Mulțimea D

fic pe  $Ox$ , fic pe  $Oy$ . In prima variantă avem  $\varphi(x) = -\sqrt{px}$ ,  $\psi(x) = \sqrt{px}$  și aplicăm formula (6.8)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{p/2} dx \int_{-\sqrt{px}}^{\sqrt{px}} (x+y) dy = \int_0^{p/2} \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-\sqrt{px}}^{\sqrt{px}} dx \\ &= \int_0^{p/2} 2x\sqrt{px} dx = \frac{p^3\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

Dacă considerăm că  $D$  este intergrafic proiectabil pe  $Oy$ , atunci  $\varphi(y) = \frac{y^2}{p}$ ,  $\psi(y) = \frac{p}{2}$ . Aplicând (6.9) obținem

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{p\sqrt{2}}{2}}^{\frac{p\sqrt{2}}{2}} dy \int_{\frac{y^2}{p}}^{\frac{p}{2}} (x+y) dx = \int_{-\frac{p\sqrt{2}}{2}}^{\frac{p\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{x^2}{2} + xy \right) \Big|_{\frac{y^2}{p}}^{\frac{p}{2}} dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{p\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{p^2}{8} - \frac{y^4}{2p^2} \right) dy = \frac{p^3\sqrt{2}}{10}. \end{aligned}$$

■

Uncori, mulțimea pe care se efectuează integrarea poate fi transformată, printr-o aplicație convenabil aleasă, într-una mai “cumsocade”.

**Teorema 6.3.** (Schimbarea de variabile în integrala dublă) Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  deschisă și  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , integrabilă sau măsurabilă și pozitivă. Fie, de asemenea,  $B \subset \mathbb{R}^2$  o altă mulțime deschisă iar  $h: B \rightarrow A$  un difeomorfism  $((u, v) \xrightarrow{h} (x, y))$  al cărui jacobian este  $J$ , i.e.  $J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ . In

aceste condiții avem

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \iint_B (f \circ h)(u, v) |J(u, v)| \, du dv \quad (6.10)$$

**Exemplul 6.3.** Se consideră integrala

$$I = \iint_A \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy$$

unde  $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$ .

Aici difeomorfismul ales este dat de coordonatele polare, i.e.  $x = u \cos v, y = u \sin v, u > 0, 0 < v < 2\pi$  al cărui jacobian este  $J(u, v) = u$ . Prin această aplicație  $A$  este transformată într-un dreptunghi  $B = \{(u, v) \mid 0 < u < 1, 0 < v < \frac{\pi}{2}\}$ . Folosind (6.5) și (6.10) se obține

$$I = \iint_B \sqrt{1 - u^2} u \, du dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^1 u \sqrt{1 - u^2} \, du = \frac{\pi}{6}$$

■

**Exemplul 6.4.** Se consideră integralele

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \quad \text{și} \quad J = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy$$

Din teorema 6.2 se obține

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \int_0^\infty e^{-y^2} \, dy = I^2$$

Pe de altă parte, integrala  $J$  se poate calcula cu aceeași schimbare de variabile ca mai sus, obținându-se

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^\infty u e^{-u^2} \, du = \frac{\pi}{4}$$

În acest fel găsim relația importantă (*primitiva funcției  $e^{-x^2}$  nu poate fi calculată!*)

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (6.11)$$

■

Pentru calculul unei integrale triple pe un paralelipiped  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  se poate aplica (6.5) și se găsește formula

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \quad (6.12)$$

ordinea de integrare putând fi schimbată.

Mai general, fie  $D \in \mathcal{B}^3$  iar  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , integrabilă sau măsurabilă și pozitivă. În teorema 6.2 punem  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $F = \mathbb{R}$ . Rezultă

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_D(x, y, z) f(x, y, z) dz$$

dar

$$\mathbb{1}_D(x, y, z) = \mathbb{1}_{D_{xy}}(z)$$

astfel că

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy \int_{D_{xy}} f(x, y, z) dz \quad (6.13)$$

Dacă punem  $E = \mathbb{R}$ ,  $F = \mathbb{R}^2$ , atunci rezultă formula

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\mathbb{R}} dz \iint_{D^z} f(x, y, z) dx dy \quad (6.14)$$

Formule similare cu (6.13) și (6.14) se obțin dacă considerăm proiecții pe  $yOz$  sau  $zOx$ . În particular, pentru un intergrafic proiectabil pe  $xOy$ , din (6.13) rezultă

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_M dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (6.15)$$

Pentru intergrafice proiectabile pe  $yOz$  sau  $zOx$  se deduc, cu ușurință, formule similare.

Fie  $D$  un intergrafic proiectabil pe  $xOy$  care are volum. Folosind observația 5.11, pct. 3 și (6.15) rezultă următoarea formulă care permite calculul unui volum, folosind o integrală dublă

$$\text{vol}(D) = \iint_M [\psi(x, y) - \varphi(x, y)] dx dy \quad (6.16)$$

**Exemplul 6.5.** Se consideră integrala triplă

$$I = \iiint_D xy^2 z^3 dx dy dz$$

unde  $D$  este delimitat de suprafețele  $z = xy$  (paraboloid hiperbolic),  $y = x$  (plan care conține pe  $Oz$ ),  $z = 0$ ,  $x = 1$  (plan paralel cu  $yOz$ ). Mulțimea  $D$

este un intergrafic proiectabil pe  $xOy$ , unde cu  $\varphi(x, y) = 0$  și  $\psi(x, y) = xy$ , deci  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < x\}$ . Utilizând (6.15) și (6.8), rezultă

$$\begin{aligned} I &= \iint_M dx dy \int_0^{xy} xy^2 z^3 dz = \frac{1}{4} \iint_M x^5 y^6 dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_0^x x^5 y^6 dy = \frac{1}{13 \cdot 28} \end{aligned}$$

**Exemplul 6.6.** Se cere volumul corpului  $D$  delimitat de planele:  $z = 1 + x + y$ ,  $x + y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Este vorba despre un intergrafic proiectabil pe  $xOy$ , unde  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < x\}$ ,  $\varphi(x, y) = 0$ ,  $\psi(x, y) = 1 + x + y$ . Aplicăm (6.16):

$$\begin{aligned} \text{vol}(D) &= \iint_M (1 + x + y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 + x + y) dy \\ &= \int_0^1 \left[ 1 - x + x(1 - x) + \frac{(1 - x)^2}{2} \right] dx = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

■

Pentru integrala triplă teorema de schimbare de variabile este similară teoremei 6.3.

**Teorema 6.4.** (Schimbarea de variabile în integrala triplă) Fie  $A \subset \mathbb{R}^3$  deschisă și  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , integrabilă sau măsurabilă și pozitivă. Fie, de asemenea,  $B \subset \mathbb{R}^3$  o altă mulțime deschisă iar  $h: B \rightarrow A$  un difeomorfism  $((u, v, w) \xrightarrow{h} (x, y, z))$  al cărui jacobian este  $J$ , i.e.  $J(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ . In aceste condiții avem

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B (f \circ h)(u, v, w) |J(u, v, w)| du dv dw \quad (6.17)$$

**Exemplul 6.7.** Se consideră integrala

$$I = \iiint_A xyz dx dy dz$$

unde  $A$  este delimitată de suprafețele  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (bilă cu centrul în origine, de rază 1),  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Este vorba de porțiunea din bilă ce se află în primul octant.

Schimbarea de variabile se obține prin “treccrea” la coordonate sferice:  $x = u \sin v \cos w$ ,  $y = u \sin v \sin w$ ,  $z = u \cos v$  al cărei jacobian este  $J(u, v, w) = u^2 \sin v$ . Mulțimea  $A$  se transformă în dreptunghiul

$B = \left\{ (u, v, w) \mid 0 < u < 1, 0 < v < \frac{\pi}{2}, 0 < w < \frac{\pi}{2} \right\}$ . Din (6.17) și (6.12) rezultă

$$\begin{aligned} I &= \iiint_A u^3 \sin^2 v \cos v \sin w |u^2 \sin v| du dv dw \\ &= \int_0^1 du \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^5 \sin^3 v \cos v \sin w dw = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

■

## 6.2 Integrale Riemann improprii

Spre deosebire de integrala Lebesgue (care este definită pe orice mulțime boreliană mărginită sau nemărginită), integrala Riemann a fost concepută pentru funcții definite pe intervale compacte. În cele ce urmează această noțiune va fi extinsă, într-o anumită manieră, și pentru intervale necompacte. În acest scop vom considera o funcție definită într-una din următoarele ipostaze:

- a)  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, a < b \leq \infty$ .
- b)  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}, -\infty \leq a < b < \infty$ .
- c)  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, -\infty \leq a < b \leq \infty$ .

În fiecare din aceste cazuri se va presupune că  $f$  este *local integrabilă* (i.e. orice punct din domeniul său de definiție are o vecinătate compactă pe care funcția este integrabilă).

**Definiția 6.4.** a) Spunem că *integrala improprie*  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă dacă există și este finită limita

$$\lim_{\substack{\beta \rightarrow b \\ \beta < b}} \int_a^\beta f(x) dx$$

b) Spunem că *integrala improprie*  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă dacă există și este finită limita

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow a \\ \alpha > a}} \int_\alpha^b f(x) dx$$

c) Integrala improprie  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă dacă există  $c \in (a, b)$  astfel încât ambele integrale  $\int_a^c f(x) dx$  și  $\int_c^b f(x) dx$  sunt convergente în sensul de la a) și b).

În caz de convergență valoarea integralei improprie este valoarea limitei prin care a fost definită.

O integrală improprie care nu este convergentă se numește *divergentă*.

**Exemplul 6.8.** (*Important*) Fie  $a > 0$ . Vom cerceta natura integralei improprie  $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$  unde  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pentru aceasta trebuie luate în considerație următoarele cazuri:

a) Dacă  $\alpha \neq 1$  avem

$$\int_a^\beta \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} (\beta^{1-\alpha} - a^{1-\alpha})$$

astfel că

$$\lim_{\beta \nearrow \infty} \int_a^\beta \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \infty, & \alpha < 1 \\ \frac{a}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

b) Dacă  $\alpha = 1$  avem

$$\int_a^\beta \frac{dx}{x^\alpha} = \ln \beta - \ln a$$

de unde rezultă

$$\lim_{\beta \nearrow \infty} \int_a^\beta \frac{dx}{x^\alpha} = -\infty$$

În concluzie, integrala considerată este convergentă dacă și numai dacă  $\alpha > 1$ .

■

**Observația 6.2.** Un calcul similar arată că integrala  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$  este convergentă dacă și numai dacă  $\alpha < 1$ .

**Exemplul 6.9.** Fie  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ . Deoarece

$$\lim_{\beta \nearrow \infty} \int_0^\beta f(x) dx = \lim_{\beta \nearrow \infty} (1 - \cos \beta)$$

nu există, rezultă că integrala este divergentă.

■

Convergența anumitor integrale improprie poate fi definită și *în sensul valorii principale*.

**Definiția 6.5.** a) Fie  $f: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Se spune că integrala improprie  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$  este convergentă *în sensul valorii principale (Cauchy)* dacă există și este finită

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^\alpha f(x) dx$$

b) Fie  $f: [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unde  $a < c < b$ . Se spune că integrala improprie  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă în sensul valorii principale (Cauchy) dacă există și este finită

$$\lim_{\delta \searrow 0} \left( \int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right)$$

În caz de convergență valoarea limitelor respective sunt valorile integralei improprie în sensul valorii principale și se notează v.p.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  respectiv v.p.  $\int_a^b f(x) dx$ .

Este evident că o integrală improprie convergentă este convergentă și în sensul valorii principale și avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (6.18)$$

respectiv

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \text{v.p.} \int_a^b f(x) dx \quad (6.19)$$

Reciproca acestei afirmații este în general falsă.

**Exemplul 6.10.** Integrala  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$  este convergentă în sensul valorii principale și v.p.  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = 0$  dar  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$  nu este convergentă, conform unui exemplu anterior. ■

Pentru a stabili natura unei integrale improprie sunt folosite așa numitele *criterii de convergență* despre care vom discuta în continuare.

**Teorema 6.5.** (Criteriul general al lui Cauchy) Fie  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b \leq \infty$ , local integrabilă. Integrala improprie  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă dacă și numai dacă, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $c \in (a, b)$  astfel încât

$$\left| \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x) dx \right| < \varepsilon, \quad (\forall) \gamma_1, \gamma_2 \in (c, b).$$

*Demonstrație.* “dacă” Fie  $(\beta_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  un șir monoton crescător convergent către  $b$ . Pentru  $\varepsilon > 0$  dat, există  $c \in (a, b)$  astfel încât, pentru orice

$\gamma_1, \gamma_2 \in (c, b)$ , avem  $\left| \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$ . Pe de altă parte, deoarece  $\beta_n \nearrow b$ , vom avea  $\beta_n \in (c, b)$ , pentru  $n$  suficient de mare. Rezultă

$$\left| \int_{\beta_n}^{\beta_{n+p}} f(x) dx \right| = \left| \int_a^{\beta_{n+p}} f(x) dx - \int_a^{\beta_n} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

ceea ce arată că șirul  $x_n = \int_a^{\beta_n} f(x) dx$ ,  $n = 1, 2, \dots$  este convergent (conform criteriului general al lui Cauchy pentru șiruri). Lăsăm ca exercițiu cititorului să deducă de aici că

$$\lim_{\beta \nearrow b} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

există și este finită, deci integrala este convergentă.

“numai dacă” Prin absurd presupunem că există  $\varepsilon > 0$  astfel încât, pentru orice  $c \in (a, b)$ , există  $\gamma_1, \gamma_2 \in (c, b)$  cu proprietatea  $\left| \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x) dx \right| \geq \varepsilon$ . Întrucât  $c \in (a, b)$  este arbitrar putem lua un șir de puncte  $c_n = b - \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  și, pentru fiecare din ele, alegem  $\gamma_1^n, \gamma_2^n \in (b - \frac{1}{n}, b)$  astfel încât

$$\left| \int_{\gamma_1^n}^{\gamma_2^n} f(x) dx \right| \geq \varepsilon \Rightarrow \left| \int_a^{\gamma_2^n} f(x) dx - \int_a^{\gamma_1^n} f(x) dx \right| \geq \varepsilon \quad (6.20)$$

Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_2^n = b$$

rezultă că șirul “combinat”  $\gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_1^3, \gamma_2^3, \dots$  este convergent către  $b$ . Dacă notăm acest șir cu  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , atunci, datorită convergenței integralei, rezultă că șirul de integrale

$$\int_a^{\beta_n} f(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

este convergent, ceea ce este în contradicție cu (6.20).  $\square$

**Observația 6.3.** Teorema 6.5 se transpune de o manieră evidentă pentru integrale improprii corespunzătoare unei funcții  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $-\infty \leq a < b$ .

**Definiția 6.6.** O integrală improprie, corespunzătoare unei funcții  $f$  este *absolut convergentă* dacă integrala improprie corespunzătoare lui  $|f|$  este convergentă. Se mai spune că  $f$  este *absolut integrabilă* pe mulțimea considerată. Dacă integrala este convergentă dar nu este absolut convergentă, atunci ea se numește *semiconvergentă*.

Folosind proprietățile integralei Lebesgue se deduce fără dificultate că, dacă integrala improprie corespunzătoare unei funcții  $f$  este absolut convergentă, atunci  $|f|$  (deci și  $f$ ) este integrabilă Lebesgue pe mulțimea considerată. Prin urmare, dacă integrala este semiconvergentă, atunci funcția nu este integrabilă Lebesgue pe mulțimea necompactă considerată.

Din teorema 6.5 rezultă că o integrală absolut convergentă este convergentă. Reciproca acestei afirmații este în general falsă.

**Exemplul 6.11.** Fie  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}$  pentru  $n \leq x < n+1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Pentru  $p \in \mathbb{N}^*$  avem

$$\int_0^p f(x) dx = \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n}{n+1}$$

care arată că limita

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

există și este finită (v. criteriul lui Leibniz pentru serii alternate). De aici se deduce cu ușurință că integrala improprie  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  este convergentă.

Pe de altă parte

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p |f(x)| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$

astfel că integrala nu este absolut convergentă (i.e. este semiconvergentă).

Observăm că

$$f^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{2k+1}, & x \in [2k, 2k+1), \\ 0, & x \in [2k+1, 2k+2), \end{cases} \quad k \in \mathbb{N};$$

$$f^-(x) = \begin{cases} \frac{1}{2k}, & x \in [2k-1, 2k), \\ 0, & x \in [2(k-1), 2k-1), \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

De aici rezultă că  $\int_0^{\infty} f^+(x) dx = \int_0^{\infty} f^-(x) dx = \infty$ , astfel că, așa cum am remarcat mai sus,  $f$  nu este integrabilă Lebesgue pe  $[0, \infty)$ . ■

**Teorema 6.6.** (Criteriul Dirichlet-Abel) Fie  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $b \leq \infty$ ), de clasă  $C^1$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$  și  $\int_a^b f'(x) dx$  este absolut convergentă. Fie  $g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continuă astfel încât funcția  $G(x) = \int_a^x g(t) dt$  să fie mărginită. Atunci integrala improprie  $\int_a^b f(x)g(x) dx$  este convergentă.

*Demonstrație.* Fie  $M > 0$  astfel încât  $G(x) \leq M$ ,  $(\forall) x \in [a, b)$ . Pentru orice  $x \in [a, b)$  avem

$$\int_a^x f(t)g(t) dt = f(t)G(t) \Big|_a^x - \int_a^x f'(x)G(x) dx. \quad (6.21)$$

Deoarece  $|f'G| \leq M|f'|$  și  $f(x)G(x) \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow b$ , rezultă că membrul drept din (6.21) are limită finită pentru  $x \rightarrow b$ , adică integrala este convergentă.  $\square$

**Corolarul 6.1.** Fie  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(b \leq \infty)$ , de clasă  $C^1$  astfel încât există  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$  și  $\int_a^b f'(x) dx$  este absolut convergentă. Fie  $g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continuă astfel încât integrala  $G(x) = \int_a^b g(x) dx$  să fie convergentă. Atunci integrala improprie  $\int_a^b f(x)g(x) dx$  este convergentă.

*Demonstrație.* Funcția  $G(x) = \int_a^x g(t) dt$  este mărginită deoarece are limită finită când  $x \rightarrow b$ . Dacă notăm  $\ell = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$ , atunci  $\ell - f(x)$  are limita nulă când  $x \rightarrow b$ . Conform teoremei 6.6 integrala  $\int_a^b [\ell - f(x)]g(x) dx$  este convergentă, ceea ce implică concluzia dorită.  $\square$

**Exemplul 6.12.** Considerăm integrala  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . Din teorema 6.6 cu  $f(x) = \frac{1}{x}$  și  $g(x) = \sin x$  rezultă că integrala este convergentă. Pe de altă parte integrala nu este absolut convergentă. Într-adevăr, în caz contrar, din relația

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} = \sin^2 x \leq |\sin x|$$

ar rezulta convergența integralei  $\int_1^\infty \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx$ . Dar  $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx$  este convergentă (v. teorema 6.6) în timp ce  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$  este divergentă (v. exemplul 6.6.8) și am ajuns la o contradicție.

Acesta este un exemplu remarcabil de integrală improprie semiconvergentă; el arată că funcția continuă

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

nu este integrabilă Lebesgue pe  $[0, \infty)$ , deci nici pe  $\mathbb{R}$ .

■

**Teorema 6.7.** (Criteriul de comparație) Fie  $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $a < b \leq \infty$ ), local integrabile. Presupunem că există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  pentru orice  $x \in (c, b)$ . Dacă  $\int_a^b g(x) dx$  este convergentă, atunci  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă.

*Demonstrație.* Este o consecință a inegalităților

$$0 \leq \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x) dx \leq \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} g(x) dx, \quad (\forall) \gamma_1, \gamma_2 \in (c, b)$$

și a teoremei 6.5. □

**Exemplul 6.13.** Integrala  $\int_1^{\infty} c^{-x^2} dx$  este convergentă deoarece, pentru  $x \geq 1$ , avem  $c^{-x^2} \leq c^{-x}$  iar  $\int_1^{\infty} c^{-x} dx$  este convergentă.

**Teorema 6.8.** (Criteriul de convergență la limită) Fie  $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $a < b \leq \infty$ ), local integrabile. Presupunem că există și este finită

$$\ell = \lim_{x \rightarrow b} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|.$$

Atunci:

1. Dacă  $\int_a^b g(x) dx$  converge absolut, atunci  $\int_a^b f(x) dx$  este absolut convergentă.

2. Dacă  $\ell \neq 0$  atunci integralele  $\int_a^b |f(x)| dx$  și  $\int_a^b |g(x)| dx$  au aceeași natură.

*Demonstrație.* 1. Din definiția limitei rezultă că există  $c \in (a, b)$  astfel încât, pentru orice  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left| \frac{|f(x)|}{|g(x)|} - \ell \right| < \varepsilon, \quad (\forall) x \in (c, b). \quad (6.22)$$

Rezultă

$$|f(x)| \leq (\ell + \varepsilon)|g(x)|, \quad (\forall) x \in (c, b)$$

și se aplică teorema 6.7.

2. Evident  $\ell > 0$  și luăm în (6.22)  $0 < \varepsilon < \ell$ . Rezultă

$$(\ell - \varepsilon)|g(x)| \leq |f(x)| \leq (\ell + \varepsilon)|g(x)|, \quad (\forall) x \in (c, b)$$

și se aplică teorema 6.7. □

**Corolarul 6.2.** Fie  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $a > 0$ , astfel încât există limita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = \ell$$

1. Dacă  $\alpha > 1$  și  $\ell < \infty$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă.
2. Dacă  $\alpha \leq 1$  și  $\ell \neq 0$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx$  este divergentă.

*Demonstrație.* În teorema 6.8 luăm  $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  și se ține seamă de exemplul 6.6.8.  $\square$

**Corolarul 6.3.** Fie  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , ( $a < b < \infty$ ), astfel încât există limita

$$\lim_{x \rightarrow b} (b-x)^\alpha f(x) = \ell$$

1. Dacă  $\alpha < 1$  și  $\ell < \infty$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă.
2. Dacă  $\alpha \geq 1$  și  $\ell \neq 0$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx$  este divergentă.

*Demonstrație.* În teorema 6.8 luăm  $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ .  $\square$

**Observația 6.4.** Teoremele 6.7, 6.8 se modifică de o manieră evidentă pentru integrale improprii definite pe intervale necompacte de forma  $(a, b]$ . Corolarul 6.3 va avea următoarea formă

**Corolarul 6.4.** Fie  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , ( $-\infty < a < b$ ), astfel încât există limita

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^\alpha f(x) = \ell$$

1. Dacă  $\alpha < 1$  și  $\ell < \infty$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă.
2. Dacă  $\alpha \geq 1$  și  $\ell \neq 0$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx$  este divergentă.

**Exemplul 6.14.** Se consideră integrala  $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ ,  $n \geq 0$ . Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 x^n e^{-x} = 0$$

rezultă că integrala este convergentă conform corolarului 6.2.

**Exemplul 6.15.** Fie integrala  $\int_0^1 |\ln x|^\alpha dx$ ,  $\alpha \neq 0$ . Integrala este improprie în  $x = 0$  pentru  $\alpha \neq 0$ , iar pentru  $\alpha < 0$  este improprie și în  $x = 1$ .

În urma schimbării de variabilă  $x = e^{-t}$  integrala devine  $\int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt$ . Prin urmare trebuie studiate integralele  $\int_1^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt$  și  $\int_0^1 t^{\alpha} e^{-t} dt$ ; prima este convergentă pentru orice  $\alpha$  conform exemplului precedent. Pentru cea de a doua observăm că

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{t^{\alpha} e^{-t}}{t^{\alpha}} = 1$$

iar integrala  $\int_0^1 t^{\alpha} dt$  este convergentă pentru  $\alpha > -1$  și divergentă pentru  $\alpha \leq -1$ . Conform teoremei 6.8 pct.2, integrala în discuție va avea aceeași natură. ■

Criteriul următor realizează o legătură între serii și integrale improprii.

**Teorema 6.9.** (Criteriul integral al lui Cauchy) *Fie  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , ( $a > 0$ ), o funcție descrescătoare și notăm  $p = [a] + 1$ . Atunci  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  este convergentă dacă și numai dacă seria  $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$  este convergentă.*

*Demonstrație.* Deoarece  $f$  este monoton descrescătoare avem

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1), \quad n = p+1, p+2, \dots$$

Prin urmare, pentru orice  $m > p$ ,

$$\sum_{n=p+1}^m f(n) \leq \int_p^m f(x) dx \leq \sum_{n=p}^m f(n) \quad (6.23)$$

Dacă  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  este convergentă, atunci există și este finită limita

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_p^m f(x) dx \quad (6.24)$$

și din prima inegalitate (6.23) rezultă convergența seriei  $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ . Reciproc, dacă seria este convergentă, atunci din a doua inegalitate (6.23) rezultă că există și este finită limita (6.24). De aici și din monotonia funcției  $F(x) = \int_p^x f(t) dt$  rezultă convergența integralei. □

**Exemplul 6.16.** Fie  $\alpha > 0$ . Seria armonică generalizată

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots$$

este convergentă dacă și numai dacă  $\alpha > 1$ . Intr-adevăr, dacă luăm în teorema 6.9  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ,  $x \geq 1$ , avem

$$\int_1^m f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{m^{\alpha-1}}\right), & \alpha \neq 1 \\ \ln m, & \alpha = 1 \end{cases}$$

care arată că integrala este convergentă dacă și numai dacă  $\alpha > 1$ . ■

### 6.3 Integrale cu parametru

Fie  $I$  și  $J$  două intervale pe  $\mathbb{R}$  și  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \rightarrow f(x, t)$ ,  $x \in I$ ,  $t \in J$  o funcție. Presupunem că pentru orice  $t \in J$  funcția  $x \rightarrow f(x, t)$  este integrabilă Lebesgue pe  $I$  și fie  $\alpha, \beta: J \rightarrow I$ .

**Definiția 6.7.** Funcția

$$F: J \rightarrow \mathbb{R}, F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx \quad (6.25)$$

este numită *integrală cu parametru*.

**Exemplul 6.17.** 1.  $F(t) = \int_0^t (x+t)^2 dx$ ,  $t > 0$ .

2.  $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2}$ ,  $t > 0$ . ■

**Observația 6.5.** Dacă funcția  $(x, t) \rightarrow f(x, t)$  este local integrabilă Riemann în raport cu  $x$ , pentru fiecare  $t \in J$ , iar intervalul  $I$  necompact, atunci integrabilitatea Lebesgue antrenează absolut convergența integralei improprie (v. §6.2)

$$F(t) = \int_I f(x, t) dx \quad (6.26)$$

Se pot însă considera și integrale Riemann cu parametru definite atunci când integrala 6.26 este semiconvergentă, deci nu absolut convergentă (v. [8], [17]). De asemenea, dacă  $I$  nu este compact, se poate defini convergența uniformă a integralei în raport cu parametrul

**Definiția 6.8.** Se spune că integrala cu parametru (6.26), unde  $I = [a, b)$ , este *uniform convergentă în raport cu parametrul*  $t \in J$  către  $F(t)$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $c = c(\varepsilon) \in (a, b)$  ( $c$  nu depinde de  $t$ ) astfel încât

$$\left| \int_a^\beta f(x, t) dx - F(t) \right| < \varepsilon, \quad (\forall) \beta \in (c, b), t \in J \quad (6.27)$$

Relația (6.27) este echivalentă cu

$$\limsup_{\beta \nearrow b} \sup_{t \in J} \left| \int_a^\beta f(x, t) dx - F(t) \right| = 0 \quad (6.28)$$

Convergența uniformă este utilă atunci când avem de-a face cu integrale cu parametru definite ca valoarea unei integrale improprii semiconvergente. Pentru convergența uniformă teorema 6.5 se adaptează de o manieră evidentă. Următoarea teoremă pune în evidență un caz remarcabil de integrală improprie cu parametru uniform convergentă.

**Teorema 6.10.** Fie  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $0 \leq a < b \leq \infty$ ), local integrabilă, astfel încât  $\int_a^b f(x) dx$  este convergentă. Atunci integrala cu parametru  $F(t) = \int_a^b e^{-tx} f(x) dx$  este uniform convergentă în raport cu  $t \in [0, \infty)$ .

*Demonstrație.* Fie  $G(u) = \int_u^b f(x) dx$ ,  $u \in [a, b)$ , și  $\varepsilon > 0$ . Prin ipoteză există  $c = c(\varepsilon) \in (a, b)$  astfel încât

$$|G(\gamma)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (\forall) \gamma \in (c, b) \quad (6.29)$$

Deci integrând prin părți și ținând seamă de (6.29), pentru  $\beta_1, \beta_2 \in (c, b)$ , avem

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{-tx} f(x) dx \right| &= \left| G(\gamma_1)e^{-\gamma_1 t} - G(\gamma_2)e^{-\gamma_2 t} - t \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} G(u)e^{-tu} du \right| \\ &\leq |G(\gamma_1)e^{-\gamma_1 t}| + |G(\gamma_2)e^{-\gamma_2 t}| + t \left| \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} G(u)e^{-tu} du \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{t\varepsilon}{3} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{-tu} du \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{t\varepsilon}{3} \int_0^\infty e^{-tu} du = \varepsilon \end{aligned}$$

Conform cu teorema 6.5 rezultă concluzia dorită deoarece  $c$  nu depinde de  $t$ .  $\square$

**Teorema 6.11.** (Continuitatea integralei cu parametru) Presupunem că există o funcție integrabilă  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $|f(x, t)| \leq g(x)$  pentru orice  $x \in I$  și  $t \in J$  iar funcțiile  $\alpha$  și  $\beta$  sunt continue.

Dacă pentru fiecare  $x \in I$  funcția  $t \rightarrow f(x, t)$  este continuă pe  $J$ , atunci integrala cu parametru (6.25) este o funcție continuă.

*Demonstrație.* Pentru  $t_0 \in J$  arbitrar avem

$$\begin{aligned} F(t) - F(t_0) &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx - \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x, t_0) dx \\ &= \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} [f(x, t) - f(x, t_0)] dx + \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x, t) dx - \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(x, t) dx \end{aligned} \quad (6.30)$$

Deoarece

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| \leq 2g(x), (\forall) x \in I, t \in J$$

și

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |f(x, t) - f(x, t_0)| = 0$$

rezultă (v. teorema 5.13)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} [f(x, t) - f(x, t_0)] dx \right| = 0 \quad (6.31)$$

Apoi (v. proprietatea 6 a integralei Lebesgue din §5.4)

$$\left| \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x, t) dx \right| \leq \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} g(x) dx \rightarrow 0$$

când  $t \rightarrow t_0$  deoarece  $\beta(t) \rightarrow \beta(t_0)$  (din continuitatea lui  $\beta$ ). Prin urmare

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x, t) dx \right| = 0 \quad (6.32)$$

și la fel se arată că

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(x, t) dx \right| = 0. \quad (6.33)$$

Din (6.31), (6.32), (6.33) rezultă

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$$

adică  $F$  este continuă în  $t_0$ . □

**Observația 6.6.** Dacă integrala cu parametru este definită ca valoarea unei integrale improprii semiconvergente, atunci teorema 6.11 nu este aplicabilă. În acest cazuri putem folosi următoarea teoremă

**Teorema 6.12.** Fie  $f: [a, b) \times J \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $a < b \leq \infty$ ,  $J$  interval compact), continuă și astfel încât integrala

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx \quad (6.34)$$

este uniform convergentă în raport cu  $t \in J$ . Atunci funcția  $F(t)$  este continuă pe  $J$ .

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon > 0$ . Din (6.27) rezultă că există  $c = c(\varepsilon) \in (a, b)$  astfel încât

$$\left| \int_a^\beta f(x, t) dx - F(t) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (\forall) \beta \in (c, b), t \in J \quad (6.35)$$

De aici rezultă

$$\left| \int_\beta^b f(x, t) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (\forall) \beta \in (c, b), t \in J \quad (6.36)$$

Pe de altă parte, pentru  $t_0 \in J$  arbitrar și  $\beta$  care verifică (6.36), avem

$$|F(t) - F(t_0)| \leq \int_a^\beta |f(x, t) - f(x, t_0)| dx + \left| \int_\beta^b f(x, t) dx \right| + \left| \int_\beta^b f(x, t_0) dx \right| \quad (6.37)$$

Din continuitatea funcției  $f$  rezultă că  $|f(x, t) - f(x, t_0)|$  este mărginită pe compactul  $[a, \beta] \times J$  astfel că se poate aplica teorema 6.11 pentru a deduce că există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât pentru  $|t - t_0| < \delta$

$$\int_a^\beta |f(x, t) - f(x, t_0)| dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad (6.38)$$

Din (6.37), (6.36) și 6.38 rezultă

$$|F(t) - F(t_0)| < \varepsilon \quad \text{pentru } |t - t_0| < \delta$$

deci  $F$  este continuă în  $t_0$ . □

**Teorema 6.13.** (Derivarea integralci cu parametru) Presupunem că, pentru fiecare  $x \in I$ , funcția  $f(x, t)$  admite derivate parțiale pe  $J$  și că funcția  $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  este integrabilă (Lebesgue) pe  $I$  pentru orice  $t \in J$ . Dacă există o funcție  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă pe  $I$  astfel încât

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x), \quad (\forall) x \in I, t \in J,$$

atunci integrala cu parametru  $F(t) = \int_I f(x, t) dx$  este o funcție derivabilă și avem

$$F'(t) = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad (6.39)$$

*Demonstrație.* Fie  $t_0 \in J$  arbitrar. Conform teoremei creșterilor finite a lui Lagrange există un punct  $\xi_t(x)$  situat între  $t_0$  și  $t$  astfel încât

$$\frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_t(x)).$$

De aici și din ipoteze rezultă

$$\left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} \right| \leq g(x), \quad (\forall) x \in I, t \in J \quad (6.40)$$

Din (6.40) și teorema 5.13 rezultă

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_I \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} dx \\ &= \int_I \lim_{t \rightarrow t_0} \left[ \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} \right] dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx \end{aligned}$$

□

**Teorema 6.14.** (Formula de derivare a lui Leibniz) *Fie  $I$  compact,  $J$  deschis și  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  continuă. Presupunem că există  $\frac{\partial f}{\partial t}$  și este continuă pe  $I \times J$  iar funcțiile  $\alpha$  și  $\beta$  sunt derivabile pe  $J$ . Atunci integrala cu parametru  $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx$  este derivabilă pe  $J$  și avem*

$$F'(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + \beta'(t) f(\beta(t), t) - \alpha'(t) f(\alpha(t), t) \quad (6.41)$$

*Demonstrație.* Din relația (6.30), pentru  $t_0 \in J$  arbitrar, deducem

$$\begin{aligned} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} &= \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} dx + \frac{1}{t - t_0} \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x, t) dx \\ &\quad - \frac{1}{t - t_0} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(x, t) dx \end{aligned} \quad (6.42)$$

Deoarece  $\frac{\partial f}{\partial t}$  este mărginită pe compactul  $I \times [\alpha(t_0), \beta(t_0)]$ , din teorema 6.13, deducem

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} dx = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx. \quad (6.43)$$

Pe de altă parte, folosind o formulă de medie pentru integrală, rezultă că există  $\xi_t$  între  $\beta(t_0)$  și  $\beta(t)$  astfel încât

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x, t) dx = \frac{\beta(t) - \beta(t_0)}{t - t_0} f(\xi_t, t_0)$$

și cum  $\beta(t) \rightarrow \beta(t_0)$  (doci  $\xi_t \rightarrow \beta(t_0)$ ) când  $t \rightarrow t_0$  rezultă

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x, t) dx = \beta'(t_0) f(\beta(t_0), t_0) \quad (6.44)$$

Analog se obține

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(x, t) dx = \alpha'(t_0) f(\alpha(t_0), t_0) \quad (6.45)$$

Făcând  $t \rightarrow t_0$  în (6.42) și ținând seamă de (6.43), (6.44), (6.45) se obține (6.41) scrisă în  $t = t_0$ .  $\square$

**Teorema 6.15.** (Schimbarea ordinii de integrare în integrala cu parametru)  
Fie  $I = [a, b]$  și  $J$  compacte iar  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  continuă. Atunci

$$\int_a^b \left( \int_J f(x, t) dt \right) dx = \int_J \left( \int_a^b f(x, t) dx \right) dt \quad (6.46)$$

*Demonstrație.* Pentru  $x \in [a, b]$ , considerăm

$$F(x) = \int_a^x \left( \int_J f(u, t) dt \right) du \quad \text{și} \quad G(x) = \int_J \left( \int_a^x f(u, t) du \right) dt.$$

Se deduce cu ușurință că  $F$  și  $G$  sunt derivabile pe  $I$  și

$$F'(x) = \int_J f(x, t) dt = G'(x)$$

Dar  $F(a) = G(a) = 0$ , doci  $F = G$  pe  $[a, b]$ .  $\square$

**Observația 6.7.** În fapt relația 6.46 este o simplă consecință a relației (6.5), valoarea comună a celor două integrale din (6.46) fiind valoarea integralei duble pe  $I \times J$ .

**Exemplul 6.18.** Dacă  $F(t) = \int_0^t f(x)(t-x)^n dx$  cu  $f$  continuă, atunci

$$F'(t) = n \int_0^t f(x)(t-x)^{n-1} dx$$

$$F''(t) = n(n-1) \int_0^t f(x)(t-x)^{n-2} dx$$

.....

$$F^{(n)}(t) = n! \int_0^t f(x) dx$$

$$F^{(n+1)}(t) = n! f(t)$$

Teoremele 6.13 și 6.15 permit evaluarea unor integrale care nu pot fi calculate prin metodele uzuale (schimbare de variabilă, prin părți, etc.)

**Exemplul 6.19.** Considerăm integrala

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx, \quad a, b > 0$$

Integrala depinde de doi parametri  $a$  și  $b$ . Notăm  $f(x, a, b) = \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)$  și considerăm un interval arbitrar  $(\delta, \Lambda)$ ,  $0 < \delta < \Lambda < \infty$ . Pentru  $a \in (\delta, \Lambda)$  avem

$$\frac{\partial f}{\partial a} \leq \frac{2\Lambda \sin^2 x}{\delta^2}$$

astfel că se poate aplica teorema 6.13 și avem

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$$

iar în urma schimbării de variabilă  $\operatorname{tg} x = u$  obținem succesiv

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} &= 2 \int_0^{\infty} \frac{au^2}{a^2u^2 + b^2} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{2ab^2}{b^2 - a^2} \int_0^{\infty} \frac{du}{a^2u^2 + b^2} \\ &\quad - \frac{2a}{b^2 - a^2} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi b}{b^2 - a^2} - \frac{\pi a}{b^2 - a^2} = \frac{\pi}{a+b} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Similar, pentru  $b \in (\delta, \Lambda)$ , obținem

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\pi}{a+b} \quad (6.48)$$

Din (6.47) se obține  $I(a, b) = \pi \ln(b+a) + C(b)$ , care prin derivare în raport cu  $b$  și utilizarea relației (6.48) conduce la  $C'(b) = 0$ , deci  $C(b) = K$  (constant). În acest fel avem

$$I(a, b) = \pi \ln(b+a) + K$$

și punând  $a = b = 1$  găsim  $K = \ln 2$ . Rezultatul final este  $I(a, b) = \pi \ln \frac{a+b}{2}$  valabil pentru orice  $a, b > 0$  deoarece  $\delta$  și  $\Lambda$  sunt arbitrare.

**Exemplul 6.20.** Fie

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x} dx, \quad a > 0, \quad b, c \in \mathbb{R}$$

Observăm că integrala poate fi scrisă sub forma

$$I = \int_0^{\infty} \left( \int_c^b e^{-ax} \cos vx \, dv \right) dx$$

care prin aplicarea teoremei 6.15 devine

$$I = \int_c^b \left( \int_0^\infty e^{-ax} \cos vx \, dx \right) dv$$

Un calcul simplu arată că

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos vx \, dx = \frac{a}{a^2 + v^2}$$

astfel că

$$I = a \int_c^b \frac{dv}{a^2 + v^2} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{c}{a}$$

În particular, pentru  $b = 1$  și  $c = 0$  găsim

$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \, dx = \operatorname{arctg} \frac{1}{a}, \quad a > 0 \quad (6.49)$$

Folosind teorema 6.10 și 6.12 rezultă că  $F$  este continuă pe  $[0, \infty)$ . Astfel din

$$\lim_{a \searrow 0} F(a) = \lim_{a \searrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} = F(0)$$

se obține relația remarcabilă

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \quad (6.50)$$

■

**Observația 6.8.** Similar se demonstrează rezultatul mai general

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \quad (6.51)$$

## 6.4 Funcțiile euleriene

**Definiția 6.9.** Funcția Gamma,  $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  se definește prin

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \, dx \quad (6.52)$$

Integrala care definește funcția Gamma este convergentă conform exemplului 6.6.14.

**Proprietățile funcției Gamma**

$$1. \Gamma(1) = 1; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Intr-adevăr  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ . Dacă notăm  $I = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$  observăm că

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = 2I$$

Integrala  $I$  a fost calculată la exemplul 6.6.4 dar aici vom mai da o metodă pentru calculul ei. Din egalitatea ușor de demonstrat dacă se face schimbarea de variabilă  $uy = t$

$$I = \int_0^{\infty} y e^{-y^2 u^2} dy$$

se obține

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} \left[ y e^{-y^2} \int_0^{\infty} e^{-y^2 u^2} du \right] dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ y e^{-y^2(1+u^2)} dy \right] du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

care conduce la  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

$$2. \Gamma(t+1) = t\Gamma(t).$$

Intr-adevăr, efectuând o integrare prin părți avem

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{\infty} x^t e^{-x} dx = -x^t e^{-x} \Big|_0^{\infty} + t \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = t\Gamma(t)$$

$$3. \Gamma(t) > 0 \text{ pentru orice } t \in (0, \infty).$$

Aceasta este o consecință a faptului că, pentru fiecare  $t \in (0, \infty)$  fixat, funcția  $x \rightarrow x^{t-1} e^{-x}$  este strict pozitivă pe o mulțime de măsură Lebesgue strict pozitivă (în fapt de măsură  $\infty$ ).

$$4. \text{Gamma este o funcție convexă de clasă } C^{\infty}(0, \infty) \text{ și avem}$$

$$\Gamma^{(n)}(t) = \int_0^{\infty} x^t (\ln x)^n e^{-x} dx$$

Fie  $0 < \delta < A$  arbitrare și notăm  $f(x, t) = x^{t-1} e^{-x}$ . Pentru orice  $t \in (\delta, A)$  și  $x \in (0, \infty)$  avem

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leq \int_0^{\infty} x^t |\ln x| e^{-x} dx \leq g(x)$$

unde

$$g(x) = \begin{cases} \delta x^{\delta-1} c^{-x}, & 0 < x \leq 1 \\ \Lambda x^{\Lambda-1} c^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

iar  $g$  este integrabilă pe  $(0, \infty)$ . Conform teoremei 6.13 rezultă derivabilitatea funcției  $\Gamma$  în orice punct  $t \in (\delta, \Lambda)$ , deci pe  $(0, \infty)$  deoarece  $\delta$  și  $\Lambda$  sunt arbitrare. Acest raționament poate fi aplicat succesiv pentru a arăta că funcția  $\Gamma$  este indefinit derivabilă. Din  $\Gamma''(t) > 0$  rezultă proprietatea de convexitate.

**Observația 6.9.** Din proprietatea 2 se deduce relația

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (6.53)$$

care arată că funcția Gamma este o extindere a funcției factorial.

**Definiția 6.10.** Funcția Beta,  $B: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  se definește prin

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

Folosind inegalitatea  $ab \leq a+b$ , ( $\forall$ )  $a, b \in [0, 1]$  deducem  $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{p-1} + (1-x)^{q-1}$ , ( $\forall$ )  $x \in [0, 1]$  și, cum integralele

$$\int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p}; \quad \int_0^1 (1-x)^{q-1} dx = \frac{1}{q}$$

sunt convergente, rezultă că funcția Beta este bine definită.

**Proprietățile funcției Beta**

1.  $B(p, q) = B(q, p)$ .

rezultă imediat dacă se face schimbarea de variabilă  $y = 1 - x$ .

2.  $B(p, q) > 0$  pentru orice  $p, q > 0$ .

Același argument ca la prop. 3 a funcției Gamma.

3.  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ .

Dacă facem schimbarea de variabilă  $x = ty$ ,  $t > 0$ , în (6.52) cu  $t = p$  se obține

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^p y^{p-1} c^{-ty} dy$$

de unde

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^{\infty} y^{p-1} c^{-ty} dy. \quad (6.54)$$

În (6.54) facem înlocuirile  $p \rightsquigarrow p + q$ ,  $t \rightsquigarrow t + 1$

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(t+1)^{p+q}} = \int_0^\infty y^{p+q-1} c^{-(t+1)y} dy. \quad (6.55)$$

Relația (6.55) o înmulțim cu  $t^{p-1}$  și o integrăm în raport cu  $t$  pe  $(0, t_y)$

$$\Gamma(p+q) \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}} dt = \int_0^\infty \left[ t^{p-1} \int_0^\infty y^{p+q-1} c^{-(t+1)y} dy \right] dt \quad (6.56)$$

Pentru calculul integralci din membrul stâng al relației (6.56) se face schimbarea  $x = \frac{t}{t+1}$  și găsim că ea are valoarea  $B(p, q)$ , astfel că (6.56) devine

$$\Gamma(p+q)B(p, q) = \int_0^\infty \left[ t^{p-1} \int_0^\infty y^{p+q-1} c^{-(t+1)y} dy \right] dt. \quad (6.57)$$

În membrul drept din (6.57) folosim teorema 6.2 (schimbarea ordinii de integrare) și (6.54)

$$\begin{aligned} \Gamma(p+q)B(p, q) &= \int_0^\infty \left[ y^{p+q-1} c^{-y} \int_0^\infty t^{p-1} c^{-ty} dt \right] dy \\ &= \int_0^\infty y^{p+q-1} c^{-y} \frac{\Gamma(p)}{y^p} dy = \Gamma(p) \int_0^\infty y^{q-1} c^{-y} dy = \Gamma(p)\Gamma(q) \end{aligned}$$

4. Pentru  $0 < a < 1$  avem

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (6.58)$$

Relația de demonstrat revine la (v. prop. 3 a funcției Beta)

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Dar

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{a-1} y^{-a} c^{-(x+y)} dx dy$$

și cu schimbarea de variabile  $u = x + y$ ,  $v = \frac{x}{y}$  obținem

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \int_0^\infty v^{a-1} c^{-u} \frac{du dv}{1+v} = \int_0^\infty \frac{v^{a-1}}{1+v} dv$$

Ultima integrală se calculează folosind un rezultat din teoria funcțiilor complexe (calcul de integrale reale folosind reziduuri). Conform acestui rezultat avem

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(1-a) &= 2\pi i \operatorname{Rcs} \left( \frac{z^{a-1}}{1+z}, -1 \right) = \frac{2\pi i}{1 - c^{2\pi i(a-1)}} \operatorname{Rcs} \left( \frac{c^{(a-1)\ln z}}{1+z}, -1 \right) \\ &= \frac{2\pi i}{1 - c^{2\pi i(a-1)}} c^{(a-1)\pi i} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \end{aligned}$$

**Exemplul 6.21.** Pentru a calcula integrala  $I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$  se face schimbarea de variabilă  $x = \frac{t}{1-t}$  și găsim

$$I = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

■

**Exemplul 6.22.** În integrala  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$  se poate face schimbarea  $\sin^2 x = t$  și se obține  $I = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{32}$ .

■

**Exemplul 6.23.** În integrala  $I = \int_0^{\infty} x^p \exp(-x^q) dx$ ,  $p > -1$ ,  $q > 0$ , se face schimbarea  $x^q = t$  și se obține  $I = \frac{1}{q} \Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$ .

■