

Facultatea de Automatică și Calculatoare - Anul IAA

Teme de casă AM I

Gheorghe Oprișan

26.10.2002

Grupa 316

♠ 1. Norme în $\mathbb{R}^d$. Problema echivalenței lor.

♠ 2. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$, $u_n > 0$, o serie alternată și $(s_n, n \in \mathbb{N}^*)$ șirul sumelor parțiale. Presupunem că seria îndeplinește condițiile criteriului lui Leibniz și fie s suma seriei. Notăm $r_n = s - s_n$, $n = 1, 2, \dots$

a) Să se arate că $|r_n| \leq u_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Utilizând rezultatul a), să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ este uniform convergență pe $\mathbb{R}_+$.

c) Să se calculeze suma seriei de la pct. b).

♠ 3. Să se demonstreze inegalitățile:

$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Indicație. Inegalitatea din stânga este echivalentă succesiv cu $(1 + \frac{1}{n})^n < e^{\frac{2n+1}{2n+2}} \iff (1 + \frac{1}{n})^{n+1} < e(1 + \frac{1}{2n})$. Pentru a o demonstra pe aceasta din urmă se consideră funcția $f(x) = x + x \ln(1 + \frac{x}{2}) - (1+x) \ln(1+x)$, care este crescătoare pe $[0, \frac{1}{n}]$, deoarece derivata sa este $f'(x) = \frac{x}{x+2} - \ln \frac{1+x}{1+x/2} > \frac{x}{x+2} - \frac{x}{1+x/2} + 1 = 0$; aici s-a folosit inegalitatea $\ln y < y - 1$, $y > 1$. Acum $f(0) = 0 \implies f(1/n) > 0 \implies \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{n}) \ln(1 + \frac{1}{n}) > 0 \implies 1 + \ln(1 + \frac{1}{2n}) - (n+1) \ln(1 + \frac{1}{n}) > 0$. Pentru inegalitatea din dreapta se consideră șirul $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}} \frac{1+\frac{1}{2n}}{(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}}$.

Acest șir este descrescător. Intr-adevăr, pătratul celui de al doilea factor este $1 + \frac{1/4}{n(n+1)}$, deci descrescător; pentru primul factor $x_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}$, considerăm dezvoltarea $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots\right)$ pentru $x = \frac{1}{2n+1}$; astfel avem $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{2}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \dots\right) \implies \ln x_n = (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \dots$ este descrescător. În final rezultă $a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \iff (1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{2n}) > e$. $\square$

♠ 4. Să se studieze convergența șirului

$$x_n = \frac{1}{n^\alpha} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Indicație. Se va aplica teorema creșterilor finite a lui Lagrange pentru funcția $f(x) = \sqrt{x}$ pe intervalul $[n, n+1]$. $\square$

♠ 5. Cu MAPLE să se traseze graficul funcției lui Riemann $\zeta: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} + \cdots$$