Capitolul 4

Transformări punctuale. Difeomorfisme.

4.1 Definiţii şi exemple fundamentale

O transformare punctuală este o funcţie cu anumite proprietăţi între doi deschişi care "duce punct în punct". (v. [17], [22]). Mai exact:

Definiţie Fie $A \subset \mathbb{R}^d$, $B \subset \mathbb{R}^m$ două mulţimi deschise. Se numeşte *transformare punctuală de la A la B* orice aplicaţie $F\colon A \to B$ de clasă $C^1(A)$.

Aşadar, oricărui punct $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in A$ îi corespunde un punct bine determinat $F(x) = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in B$ şi dacă notăm $f_j = \mathrm{pr} \circ f$, $j = 1, 2, \dots, m$, atunci avem

$$y_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_d),\ j = 1, 2, \dots, m$$

şi scriem $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$.

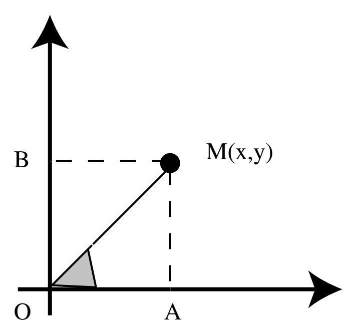

Fig. 4.1: Coordonate polare

Definiţie Dacă $d = m$, atunci transformarea punctuală $F\colon A \to B$ se numeşte *difeomorfism* (sau *izomorfism diferenţiabil*) dacă F este bijectivă iar inversa sa $F^{-1}\colon B \to A$ este de clasă $C^1(B)$.

Fie $A \in \mathbb{R}^d$ este deschisă. O aplicaţie injectivă $F\colon A \to \mathbb{R}^d$ astfel încât $B = F(A)$ este deschisă iar $F\colon A \to B$ este un difeomorfism este numită *schimbare de coordonate.* Astfel pentru orice punct $x \in A$, setul de d numere reale $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x))$ se numeşte *coordonatele lui x relativ la F.*

Exemplul 4.1. 1. (*Coordonatele polare*) Fie $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \mid x \geq 0, y = 0\}$ şi $F\colon A \to \mathbb{R}^2$ cu componentele date de $x = f_1(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$, $y = f_2(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$. In Fig. 4.1 avem $OM = \rho$ şi $\angle MOA = \theta$. Aici $B = F(A) = \{(\rho,\theta) \mid \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$.

2. *(Coordonate cilindrice)* Fie $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$ şi $F\colon A \to \mathbb{R}^3$ cu componentele date de $x = f_1(\rho,\theta,z) = \rho\cos\theta$, $y = f_2(\rho,\theta,z) = \rho\sin\theta, z = f_3(\rho,\theta,z) = z$. In Fig. 4.2 avem $OM' = \rho$, $\angle M'OA = \theta$, iar $B = F(A) = \{(\rho,\theta,z) \mid \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$.

3. *(Coordonate sferice)* Fie $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$ şi $F\colon A \to \mathbb{R}^3$ cu componentele date de $x = f_1(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = f_2(r\theta,\varphi) = r\sin\theta\sin\varphi, z = f_3(r,\theta,\varphi) = r\cos\varphi$ (v. Fig. 4.3). In acest caz $B = F(A) = \{(r,\theta,\varphi) \mid r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$.

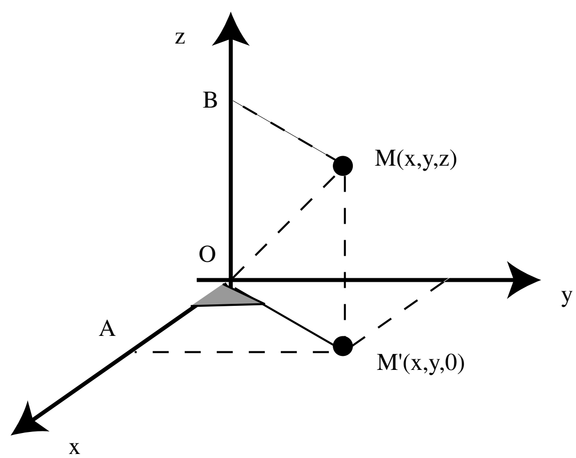

Fig. 4.2: Coordonate cilindrice

Teorema 4.1. *(*de caracterizare a difeomorfismelor*) Fie $F\colon A \to B$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_d)$, o aplicaţie bijectivă de clasă $C^1(A)$. Afirmaţiile următoare sunt echivalente:*

a) F este un difeomorfism;

b) pentru orice punct $a \in A$, diferenţiala $dF(a)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ este un izomorfism liniar (i.e. o aplicaţie liniară şi bijectivă; matricea unui izomorfism liniar este inversabilă) şi $G = F^{-1}$ este continuă pe B;

c) pentru orice punct $a \in A$, matricea jacobiană $J_F(a)$ este nesingulară, adică $\dfrac{D(f_1, f_2, \dots, f_d)}{D(x_1, x_2, \dots, x_d)}(a) \neq 0$ şi $G = F^{-1}$ este continuă pe B.

Demonstraţie. Echivalenţa b) $\iff$ c) este evidentă deoarece $J_F(a)$ este matricea diferenţialei $dF(a)$ în baza canonică.

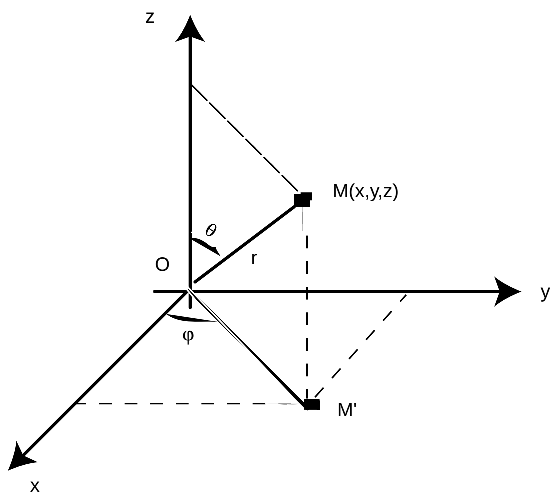

Fig. 4.3: Coordonate sferice

a) $\Rightarrow$ b) Fie $a \in A$ şi $b = F(a)$. Funcţia G este diferenţiabilă (deci continuă) deoarece este de clasă $C^1(B)$ (cf. teoremei 3.3). Din $F \circ G = \mathbb{1}_B$ şi $G \circ F = \mathbb{1}_A$ rezultă (v. (3.38)) că $J_F(a) \cdot J_G(b) = I_d$ şi $J_G(b) \cdot J_F(a) = I_d$ astfel că $J_F(a)$ (deci matricea aplicaţiei liniare $T = dF(a)$) este inversabilă. b) $\Rightarrow$ a) Este suficient să arătăm că G este diferenţiabilă în orice punct $b \in B$. Intr-adevăr, în acest caz G are derivate parţiale în orice punct şi, cum $\det J_F(x) \neq 0$ pentru $x \in A$, elementele inversei $[J_F(a)]^{-1} = J_G(F(x))$ vor fi continue, adică $G \in C^1(B)$. Fie acum $a = G(b)$ deci $b = F(a)$. Cum F este diferenţiabilă în a, avem

$$F(x) = F(a) + T(x - a) + o(||x - a||)$$

de unde, notând $y = F(x)$ şi $\varepsilon(x) = \dfrac{o(||x - a||)}{||x - a||}$, rezultă

$$x - a = T^{-1}(y - b) - ||x - a||\, T^{-1}(\varepsilon(x))$$

sau

$$G(y) - G(b) - T^{-1}(y - b) = -||x - a||\, T^{-1}(\varepsilon(x))$$

şi rămâne de arătat că $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{||x - a||\, T^{-1}(\varepsilon(x))}{||y - b||} = 0$, iar pentru aceasta este suficient de demonstrat că raportul $\dfrac{||x - a||}{||y - b||}$ este mărginit în vecinătatea lui b (deoarece $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$). Or, o teoremă cunoscută de algebră liniară spune că există $c > 0$ astfel încât $\left\|T^{-1}(||y-b||)\right\| \leq c\,||y-b||$ de unde rezultă

$$||x-a|| \leq c\,||y-b|| + ||x-a||\, \left\|T^{-1}(\varepsilon(x))\right\| \Rightarrow \frac{||x-a||}{||y-b||} \leq 2c$$

□

Corolarul 4.1. *Compunerea a două difeomorfisme este un difeomorfism.*

4.2 Dependenţă funcţională

Multe rezultate importante ale analizei reale sau complexe pun în discuţie proprietăţi "*locale*", care au loc în vecinătatea punctelor unui deschis. Teoremele din secţiunile următoare fac parte din această categorie, au o importanţă deosebită în Analiza matematică, iar demonstraţiile lor sunt laborioase şi sunt prea tehnice, astfel că le omitem (se pot găsi demonstraţii în [2], [17], [21]).

Teorema 4.2. *(*teorema de inversare locală*) Fie $A \subset \mathbb{R}^d$ deschisă şi $F\colon A\mathbb{R}^d$ o aplicaţie de clasă $C^1(A)$. Dacă $a \in A$ este un punct pentru care matricea $J_F(a)$ să fie nesingulară, atunci există un deschis $U \in \mathbb{R}^d$ astfel încât $a \in U$, mulţimea $F(U)$ este deschisă iar F stabileşte un difeomorfism între U şi $F(U)$.*

Observaţia 4.1. 1. Chiar dacă $dF(a)$ este un izomorfism pentru orice $a \in A$ nu rezultă în general că F este injectivă. Pentru aceasta putem considera exemplul

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y)$$

deci forma reală a funcţiei e^z.

2. In condiţiile teoremei 4.2 rezultă că, dacă $f_1, f_2, \ldots, f_d$ sunt componentele lui F iar $y_1, y_2, \ldots, y_d \in V = F(U)$, atunci sistemul $f_1(x_1, \ldots x_d) = y_1, \ldots, f_d(x_1, \ldots x_d) = y_d$ are o soluţie unică $x = (x_1, \ldots x_d) \in U$. Se poate spune că, *local*, sistemul admite soluţie unică.

3. In condiţiile teoremei 4.2 funcţia F este o schimbare de coordonate într-o vecinătate a oricărui punct unde matricea J_F este nesingulară. Deci, *local*, funcţia F este o schimbare de coordonate.

Definiţie Fie $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ o aplicaţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^d$. Se numeşte *rangul lui F într-un punct $a \in A$* (notat $\mathrm{rg}_a F$) rangul matricii $J_F(a)$ sau echivalent, rangul aplicaţiei liniare $dF(a)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$; evident $0 \leq \mathrm{rg}_a F \leq \min(m,n)$.

Teorema 4.3. *(*Teorema rangului*) Presupunem că F are rang constant, egal cu k, într-o vecinătate a punctului $a \in A$. Atunci există o vecinătate U a lui a, o vecinătate V a lui $b = F(a)$ (cu $F(U) \subset V$), precum şi vecinătăţi*

U_1 (respectiv V_1) ale originii din $\mathbb{R}^d$ (respectiv $\mathbb{R}^m$), astfel încât să avem o diagramă comutativă de forma dată mai jos, unde φ şi ψ sunt difeomorfisme cu $\varphi(a) = 0$, $\psi(b) = 0$ şi $\rho_k(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ U_1 & \xrightarrow{\rho_k} & V_1 \end{array}$$

Intuitiv se poate spune că, dacă aplicaţia F are un rang constant k, atunci, prin schimbări de variabile, ea devine ρ_k. Subliniem că este vorba despre o proprietate locală.

Aplicaţia F este numită *imersie* (respectiv *submersie*) în punctul $a \in A$ dacă diferenţiala $df(a)$ este injectivă (respectiv surjectivă). Dacă este imersie (respectiv submersie) în orice punct din A, atunci F este numită simplu imersie (respectiv submersie). Teorema 4.3 arată că, dacă $d \le m$ şi F este o imersie (i.e. $\mathrm{rg}_x F = d$, $(\forall)\, x \in A$), atunci F se comportă ca aplicaţia ρ_d. De asemenea, dacă $m \le d$ şi F este o submersie ($\mathrm{rg}_x F = m$, $(\forall)\, x \in A$), atunci F se comportă ca aplicaţia ρ_m. Dacă $m = d$ şi $\mathrm{rg}_x F = d$, $(\forall)\, x \in A$, atunci F este local un difeomorfism.

Definiţie Fie $A \subset \mathbb{R}^d$ deschisă şi nevidă. Funcţiile $f_1, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$, $m \le d$, de clasă $C^1(A)$ se zic *independente funcţional pe* A dacă rangul aplicaţiei $F = (f_1, \ldots, f_m)$ este m în fiecare punct din A. Aceasta este echivalent cu faptul că $m \le d$ şi F este o submersie pe A.

Teorema 4.4. (de dependenţă funcţională) *Fie $f_1, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$, $m \le d$, de clasă $C^1(A)$ şi $F = (f_1, \ldots, f_m)$. Dacă, oricare ar fi $x \in A$, $rg_x F = k \le m$, atunci funcţiile $f_1, \ldots, f_m$ satisfac local $m-k$ relaţii funcţionale. Mai precis există funcţii $\Theta_{k+1}, \ldots, \Theta_m$ de k variabile astfel încât $f_i = \Theta_i(f_1, \ldots, f_k)$ pentru $k+1 \le i \le m$, în vecinătatea punctului a.*

Exemplul 4.2. 1. Funcţiile $f_1(x_1, x_2) = \sin x_1 x_2$ şi $f_2(x_1, x_2) = \cos x_1 x_2$ sunt dependente funcţional deoarece rangul matricii lor jacobiene este $k = 1$; dealtfel $f_1^2 + f_2^2 = 1$ în $\mathbb{R}^2$ ([8]).
2. Matricea jacobiană a funcţiilor $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ şi $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_3$ este $k = 2$ şi, cum $m = n = 3$, rezultă că f_1, f_2, f_3 satisfac o relaţie funcţională în vecinătatea oricărui punct; dealtfel $f_2 = f_1^2 - 2f_3$ deci punând $\Theta(y_1, y_2) = \dfrac{y_1^2 - y_2}{2}$ rezultă că $f_3 = \Theta(f_1, f_2)$ ([8]).

4.3 Funcţii implicite

Dacă $A \subset \mathbb{R}^d$ şi $f : A \to \mathbb{R}^m$, atunci *graficul funcţiei* f este mulţimea din $\mathbb{R}^{d+m}$

$$\Gamma_f = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{d+m} \mid x \in A, y = f(x) \Big\}$$

Dacă $n = 1$ graficul Γ_f se poate reprezenta în plan (v. e.g. [6], [11]) şi reprezintă, de obicei, o curbă. Pe de altă parte nu orice curbă din plan reprezintă graficul unei funcţii; este suficient să considerăm cercul $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

In general o ecuaţie în y de forma $f(x_1, \ldots, x_d, y) = 0$, pentru $x = (x_1, \ldots, x_d)$ dat, nu se rezolvă; totuşi fiind dat un punct (a, b) astfel ca $f(a, b) = 0$, interesează condiţiile în care există o soluţie $y = \varphi(x)$ în vecinătatea punctului a. Această funcţie φ se numeşte *funcţie dată implicit de ecuaţia iniţială*. Aceste consideraţii se extind la sisteme de m ecuaţii cu $d + m$ necunoscute care "se rezolvă" în raport cu m dintre necunoscute.

Fie $\Phi_1(x, y), \ldots \Phi_m(x, y)$ funcţii de câte $d + m$ variabile reale $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, de clasă C^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^{d+m}$. Fie

$$M = \{(x, y) \in U \mid \Phi_1(x, y) = 0, \ldots \Phi_m(x, y) = 0\}$$

Problema este de a stabili condiţii care să asigure că M este graficul unei aplicaţii $\varphi\colon A \to \mathbb{R}^m$ (cu $A \subset \mathbb{R}^d$ deschis) sau echivalent, existenţa şi unicitatea soluţiei sistemului de m ecuaţii cu m necunoscute $\Phi_i(x_1, \ldots, x_d; y_1, \ldots, y_m) = 0$, $1 \le i \le m$.

Teorema 4.5. *(*Teorema funcţiilor implicite*) Presupunem că într-un punct* $(a, b) \in M \subset \mathbb{R}^{d+m}$ *avem* $\dfrac{D(\Phi_1, \ldots \Phi_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(a, b) \neq 0$. *Atunci există mulţimile deschise* $A \subset \mathbb{R}^d$, $B \subset \mathbb{R}^m$ *şi o aplicaţie* $\varphi\colon A \to B$ *de clasă* C^1 *astfel încât* $a \in A$, $b \in B$, $b = \varphi(a)$, $A \times B \subset U$ *şi în plus, mulţimea* $M \cap A \times B$ *coincide cu graficul lui* ϕ, *adică*

$$\{(x, y) \in U \mid \Phi_1(x, y) = 0, \ldots \Phi_m(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in A\}$$

In acest fel, într-o vecinătate $A \times B$ a oricărui punct fixat (a, b) din M unde jacobianul funcţiilor $\Phi_1 \ldots \Phi_m$ în raport cu $y_1, \ldots, y_m$ este nenul, mulţimea M este un grafic; funcţia $\varphi\colon A \to B$ are componentele $\varphi_i(x_1, \ldots, x_d)$, $1 \le i \le m$ şi avem $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$, adică

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_d, \varphi_1(x_1, \ldots, x_d), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_d)) = 0,\ 1 \le i \le m \tag{4.1}$$

Se spune că funcţia $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ *este dată implicit de* $\Phi_i(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_m) = 0$, $1 \le i \le m$ (v. Fig. 4.4).

Prin derivarea relaţiei (4.1) în raport cu x_k se obţin relaţiile:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = 0,\ 1 \le i \le m \tag{4.2}$$

Relaţia (4.2) poate fi considerată ca un sistem cu necunoscutele $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_k}$, prin a cărui rezolvare se obţin aceste derivate parţiale.

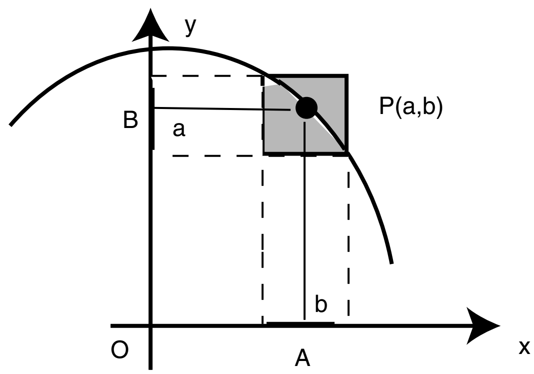

Fig. 4.4: Funcţii implicite

In particular, pentru $m = 1$ sistemul (4.2) se reduce la o singură ecuaţie

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0$$

de unde se obţine formula importantă

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}} \tag{4.3}$$

Exemplul 4.3. Fie funcţia $z = z(x, y)$ dată implicit prin $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$. Din (4.3) rezultă

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{z^2 - xy}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^2 - xz}{z^2 - xy}$$

4.4 Extreme

Fie $A \subset \mathbb{R}^d$ deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{R}$, f de clasă $C^p(A)$. Pentru $a = (a_1, a_2, \ldots, a_d) \in A$ notăm

$$T_a(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_d - a_d),\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in A$$

iar cu $[T_a(x)]^{(k)}$ puterile formale ale lui $T_a(x)$; de exemplu, pentru $k = 2$

$$[T_a(x)]^{(2)} = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

Mulţimea

$$[a, x] = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid y = (1 - \lambda)a + \lambda x,\ 0 \le \lambda \le 1 \right\}$$

este *segmentul închis cu capetele* a şi x, iar

$$(a,x)=\left\{y\in \mathbb{R}^d \mid y=(1-\lambda)a+\lambda x,\ 0<\lambda<1\right\}$$

este *segmentul deschis cu capetele* a şi x. Un punct $y\in[a,x]$ are coordonatele $y_1=(1-\lambda)a_1+\lambda x_1,\dots,y_d=(1-\lambda)a_d+\lambda x_d$.

Teorema 4.6. *(*Formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile*) Fie $r>0$ astfel încât $B(a,r)\subset A$. Pentru orice $x\in B(a,r)$ avem*

$$f(x)=f(a)+\frac{T_a(x)}{1!}+\frac{[T_a(x)]^{(2)}}{2!}+\cdots+\frac{[T_a(x)]^{(p-1)}}{(p-1)!}+\frac{[T_a^*(x)]^{(p)}}{p!}\qquad(4.4)$$

unde în $T_a^*(x)$ derivatele parţiale sunt calculate într-un punct $\xi\in(a,x)$.

Demonstraţie. Fie $s=(s_1,\dots,s_d)$, $\|s\|=1$, un versor din $\mathbb{R}^d$. Dacă $t\in(-r,r)$, atunci $a+ts\in B(a,r)\subset A$ şi considerăm $g\colon(-r,r)\to\mathbb{R}$, $g(t)=f(a+ts)=f(a_1+ts_1,a_2+ts_2,\dots,a_d+ts_d)$. Folosind regula de derivare a funcţilor compuse avem

$$g'(t)=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot s_i$$

$$g''(t)=\sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+ts)s_is_j\right)=\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+ts)s_is_j=[g'(t)]^{(2)}$$

Procedând în acelaşi fel se arată prin inducţie că

$$g^{(k)}(t)=[g'(t)]^{(k)}\qquad(4.5)$$

Pentru funcţia g folosim formula (1.3) pe $(-r,r)$

$$g(t)=g(0)+\frac{t}{1!}g'(0)+\cdots+\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}g^{(p-1)}(0)+\frac{t^p}{p!}g^{(p)}(\xi_0)\qquad(4.6)$$

unde $\xi_0\in(0,t)$. Notăm $a+ts=x$, deci $ts_1=x_1-a_1,\dots,ts_d=x_d-a_d$, şi din (4.5) rezultă

$$g^{(k)}(0)=[g'(0)]^{(k)}=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)s_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_d}(a)s_d\right]^{(k)}$$

de unde

$$g^{(k)}(0)t^k=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)ts_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_d}(a)ts_d\right]^{(k)}=[T_a(x)]^{(k)}\qquad(4.7)$$

Intrucât $\xi_0 \in (0,t)$ vom avea $\xi_0 = \lambda t$ cu $\lambda \in (0,1)$ şpunem $\xi = a + \xi_0 s = a + \lambda(x-a) = a(1-\lambda) + \lambda x$, deci $\xi \in (a,x)$ Tinând seamă de (4.7), relaţia (4.6) devine

$$g(t) = f(a+ts) = f(a) + \frac{T_a(x)}{1!} + \frac{[T_a(x)]^{(2)}}{2!} + \cdots + \frac{[T_a(x)]^{(p-1)}}{(p-1)!} + \frac{t^p}{p!} g^{(p)}(\xi_0)$$

iar

$$\begin{aligned} \frac{t^p}{p!} g^{(p)}(\xi_0) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+\xi_0 s) t s_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_d}(a+\xi_0 s) t s_d \right]^{(p)} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_d}(\xi)(x_d - a_d) \right]^{(p)} = [T_a^*(x)]^{(p)} \end{aligned}$$

□

Corolarul 4.2. *In condiţiile teoremei 4.6 avem*

$$f(x) = f(a) + \frac{T_a(x)}{1!} + \frac{[T_a(x)]^{(2)}}{2!} + \cdots + \frac{[T_a(x)]^p}{p!} + o(||x-a||^p) \qquad (4.8)$$

Demonstraţie. Comparând cu (4.4) rezultă că este suficient să arătăm

$$[T_a^*(x)]^p - [T_a(x)]^p = o(||x-a||^p)$$

Pentru aceasta observăm că

$$|[T_a^*(x)]^p - [T_a(x)]^p| \leq$$
$$\sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d = p} \left| \frac{\partial^p f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_d} x_d}(\xi) - \frac{\partial^p f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_d} x_d}(a) \right| |x_1 - a_1|^{\alpha_1} \cdots |x_1 - a_1|^{\alpha_1}$$

şi apoi, din continuitatea derivatelor parţiale de ordinul p şi majorarea

$$\frac{|x_1 - a_1|^{\alpha_1} \cdots |x_d - a_d|^{\alpha_d}}{||x-a||^p} = \frac{|x_1 - a_1|^{\alpha_1}}{||x-a||^{\alpha_1}} \cdots \frac{|x_d - a_d|^{\alpha_d}}{||x-a||^{\alpha_d}} \leq 1$$

rezultă

$$\lim_{x \to a} \frac{|[T_a^*(x)]^p - [T_a(x)]^p|}{||x-a||^p} = 0$$

deoarece $x \to a \Rightarrow \xi \to a$. □

Definiţie Fie $A \subset \mathbb{R}^d$, $f: A \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1(A)$.

1. Punctul $a \in A$ se numeşte *punct de extrem local* pentru f dacă diferenţa $f(x) - f(a)$ păstrează semn constant într-o vecinătate a sa; dacă acest semn constant este plus, atunci punctul este un *minim local*, iar dacă este minus, atunci punctul este un*maxim local.*

2. Punctul $a \in A$ se numeşte *critic* (sau *staţionar*) dacă $df(a) = 0$, adică $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, d$.

Teorema 4.7. *(*Fermat*) Un punct de extrem local este punct critic.*

Demonstraţie. Fie $x = a$ un punct de extrem şi $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset A$. Considerăm $g\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(a + ts)$ unde $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $||s|| = 1$, este un versor oarecare. Prin ipoteză, punctul $t = 0$ este un punct de extrem local pentru funcţia de o variabilă g; rezultă (v. e.g. [6], [11]) că $g'(0) = 0$. Dar

$$g'(0) = \frac{d}{dt}[f(a_1 + ts_1, \ldots, a_d + ts_d)]\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)s_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_d}(a)s_d = 0$$

Această relaţie fiind valabilă pentru orice versor s rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_d}(a) = 0$$

□

Observaţia 4.2. **(importantă)** Reciproca teoremei lui Fermat nu este în general adevărată; deci pot exista puncte critice care să nu fie de extrem (v. exemplul următor). Un punct critic dar care nu este de extrem este numit *punct şa.*

Exemplul 4.4. Fie $f\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Sistemul $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ se scrie $x^2 - y = 0$, $y^2 - x = 0$ şi are soluţiile (deci punctele critice) $O(0, 0)$, $A(1, 1)$. Punctul $O(0, 0)$ nu este punct de extrem (deci este punct şa) deoarece diferenţa $f(x, y) - f(0, 0)$ poate fi atât pozitivă cât şi negativă în orice vecinătate a originii; într-adevăr, putem lua $y = 0$ şi atunci $f(x, 0) - f(0, 0)$ va avea semnul lui x.

In continuare vom căuta condiţii suficiente ca un punct critic să fie de extrem.

Propoziţia 4.1. *Fie* $(a_{ij}, 1 \le i, j \le d)$ *o matrice simetrică de numere reale iar* $\varphi(x) \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}x_i x_j$ *forma pătratică ataşată. Dacă* φ *este pozitiv definită (adică* $\varphi(x) > 0$, $(\forall)\, x \ne 0$*), atunci există* $\lambda > 0$ *astfel încât* $\varphi(y) \ge \lambda ||y||^2$, $(\forall)\, y \in \mathbb{R}^d$.

Demonstraţie. Considerăm sfera $S = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid ||x|| = 1\right\}$ care este compactă (deoarece este mărginită şi închisă, v. sectiunea 2.4). Conform teoremei 2.8 rezultă că există $\xi \in S$ astfel încât $\inf_{x \in S} \varphi(x) = \varphi(\xi) > 0$. Aşadar, dacă notăm $\lambda = \varphi(\xi)$, vom avea $\varphi(x) \ge \lambda$ pentru orice $x \in S$. Pentru $y \ne 0$ arbitrar punem $x = \dfrac{y}{||y||}$ si rezultă

$$\varphi\left(\frac{y}{||y||}\right) = \frac{\varphi(y)}{||y||^2} \ge \lambda \Rightarrow \varphi(y) \ge \lambda\, ||y||^2,\ (\forall)\, y \ne 0$$

iar această inegalitate are loc şi pentru $y = 0$. □

Teorema 4.8. (Condiţie suficientă de extrem) *Presupunem că $f \in C^2(A)$ şi fie $a \in A$ un punct critic.*

1. Dacă forma pătratică $d^2f(a)$ este pozitiv definită, atunci punctul $x = a$ este punct de minim.

2. Dacă forma pătratică $d^2f(a)$ este negativ definită, atunci punctul $x = a$ este punct de maxim

Demonstraţie. 1. Prin ipoteză $T_a(x) = 0$ iar din propoziţia 4.1 rezultă existenţa lui $\lambda > 0$ astfel încât

$$d^2f(a)(x-a) = [T_a(x)]^{(2)} \geq \lambda\, ||x-a||^2,\ x \in \mathbb{R}^d \tag{4.9}$$

Apoi, din corolarul 4.2 rezultă

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}[T_a(x)]^{(2)} + o(||x-a||^2) \tag{4.10}$$

Astfel din (4.9) şi (4.10) deducem

$$f(x) - f(a) \geq \frac{\lambda}{2}||x-a||^2 + o(||x-a||^2) = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{o(||x-a||^2)}{||x-a||^2}\right)||x-a||^2 \tag{4.11}$$

Cum

$$\lim_{x \to a} \frac{o(||x-a||^2)}{||x-a||^2} = 0$$

va rezulta $f(x) - f(a) \geq 0$ într-o vecinătate a punctului a.
2. Se aplică raţionamentul precedent pentru funcţia $-f$. □

Corolarul 4.3. *In condiţiile teoremei 4.8, pentru $d = 2$, fie (a, b) un punct critic şi notăm:*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b);\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b);\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$$

1. Dacă $rt - s^2 > 0$ şi $r > 0$, atunci punctul (a, b) este punct de minim.
2. Dacă $rt - s^2 > 0$ şi $r < 0$, atunci punctul (a, b) este punct de maxim.
3. Dacă $rt - s^2 < 0$, atunci punctul (a, b) nu este punct de extrem (adică este punct şa).

Demonstraţie. Avem

$$d^2f(a,b)(u,v) = ru^2 + 2suv + tv^2 = r\left[\left(u + \frac{s}{r}v\right)^2 + \frac{rt - s^2}{r^2}v^2\right] \tag{4.12}$$

Astfel pct. 1 şi 2 rezultă din teorema 4.8 şi (4.12). Pentru a demonstra pct. 3 punem $\omega = ||(x-a, y-b)||$ $\alpha = \dfrac{x-a}{\omega}$, $\beta = \dfrac{y-b}{\omega}$ şi din (4.10) obţinem

$$f(x,y) - f(a,b) = \left(r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 + \frac{o(\omega^2)}{\omega^2}\right)\omega^2 \tag{4.13}$$

Funcţia de gradul II, $r\gamma^2 + 2s\gamma + t$ are rădăcini reale deci va avea atât valori pzitive, cât şi negative, atunci când γ parcurge $\mathbb{R}$. Pe de altă parte, $\alpha^2+\beta^2 = 1$, astfel că, atunci când punctul (x, y) parcurge un cerc cu centrul în (a, b), valorile α şi β parcurg intervalul $[-1, 1]$ iar valoarea $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ parcurge $\mathbb{R}$. Mai observăm că, atunci când (x, y) parcurge o semidreaptă ce pleacă din (a, b), valorile α şi β rămân constante, în timp ce

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{o(\omega^2)}{\omega^2} = 0$$

Tinând seamă de toate acestea se deduce cu uşurinţă, din (4.13), că $f(x, y) - f(a, b)$, în orice vecinătate a punctului (a, b), are atât valori pozitive, cât şi negative. $\square$

Observaţia 4.3. 1. Corolarul 4.3 nu precizează ce se întâmplă dacă $rt - s^2 = 0$.
2. *Hessiana* unei funcţii $f \in C^2(A)$ în punctul critic $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ este matricea

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right);\ 1 \le i, j \le d$$

care este o matrice simetrică deci are toate valorile proprii reale. Tinând seamă de teorema 4.8 şi unele rezultate cunoscute de algebră rezultă:

a) Dacă toate valorile proprii ale lui H sunt strict pozitive, atunci punctul a este punct de minim local.

b) Dacă toate valorile proprii ale lui H sunt strict negative, atunci punctul a este punct de maxim local.

c) Dacă H admite atât valori proprii strict pozitive, cât şi strict negative, atunci punctul a este punct şa.

d) Dacă toate valorile proprii ale lui H sunt pozitive (negative) şi cel puţin una dintre ele este nulă, atunci teorema 4.8 nu poate fi folosită. In acest caz trebuie studiat semnul expresiei $f(x) - f(a)$ prin alte metode, de exemplu folosind o dezvoltare Taylor de ordin superior.

Exemplul 4.5. 1. Să determinăm extremele funcţiei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 + y^4 - 8xy$.

Punctele critice se determină prin rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} x^3 - 2y = 0 \\ y^3 - 2x = 0 \end{cases}$$

şi acestea sunt $O(0, 0)$, $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Vom folosi corolarul 4.3 şi avem:

- Pentru punctul O, $r = t = 0$, $s = -8$, deci $rt - s^2 < 0$; nu este extrem
- Pentru punctul A, $r = t = 24$, $s = -8$, deci $rt - s^2 > 0$, $r > 0$; este punct de minim
- Pentru punctul B, $r = t = 24$, $s = -8$, deci $rt - s^2 < 0$, $r > 0$; este punct de minim.

2. Fie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + x - 2z$. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

se găseşte un singur punct critic $A(-1, -\frac{1}{2}, 1)$ iar hessiana corespunzătoare este

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ale cărei valori proprii sunt soluţiile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

adică $\lambda_1 = 3 - \sqrt{5}$, $\lambda_2 = 3 + \sqrt{5}$, $\lambda_3 = 2$, care sunt toate strict pozitive, astfel că punctul A este de minim.

Fie $f(x,y)$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ o funcţie de $d+m$ variabile, $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, de clasă C^1 pe deschisul $U \subset \mathbb{R}^{d+m}$. Presupunem că între cele $d+m$ variabile există m "legături", adică m relaţii de forma

$$g_1(x,y) = 0, \ldots, g_m(x,y) = 0 \tag{4.14}$$

unde $g_i\colon U \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, sunt de clasă $C^1(U)$. Vom nota $M = \{(x,y) \in U \mid g_i(x,y) = 0,\ 1 \le i \le m\}$ mulţimea punctelor care verifică (4.14).

Definiţie Se numeşte *punct de extrem local al funcţiei f cu legăturile* (4.14) orice punct $(a,b) \in M$ având o vecinătate $W \subset U$ astfel încât diferenţa $f(x,y) - f(a,b)$ săaibă semn constant pentru orice $(x,y) \in M \cap W$.

Exemplul 4.6. Dintre toate dreptunghiurile de acelaşi perimetru să se determine cel care are aria maximă.

Pentru rezolvare notăm cu a valoarea constantă a semiperimetrului şi cu x, y dimensiunile unui dreptunghi oarecare. Problema revine la determinarea maximului funcţiei $f(x,y) = xy$ cu legătura $g(x,y) = x + y - a = 0$.

Teorema 4.9. (Lagrange) *Dacă (a,b) este un punct de extrem local al funcţiei f cu legăturile* (4.14) *şi, în plus,* $\dfrac{D(g_1, \ldots, g_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(a,b) \neq 0$, *atunci* *există m numere reale $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (numite* multiplicatorii lui Lagrange*) astfel încât, considerând funcţia $F = f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m$, punctul (a, b) să verifice următorul sistem de $d + 2m$ ecuaţii cu $d + 2m$ necunoscute λ, x, y:*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \ (1 \le j \le d); \ \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0, \ (1 \le k \le m); \ g_p = 0 \ (1 \le p \le m) \quad (4.15)$$

Demonstraţie. Conform teoremei 4.5, în vecinătatea lui a funcţiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ de clasă C^1 astfel încât $\varphi_i(a) = b$ şi $g_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) = 0$, $1 \le i \le m$. Prin derivare în raport cu x_j, $1 \le j \le d$, se obţine

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a, b) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(a, b) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(a) = 0, \ 1 \le i \le m, 1 \le j \le d \quad (4.16)$$

Pe de altă parte, deoarece $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) \in M$ şi (a, b) este extrem local cu legăturile (4.14), va rezulta că punctul a este extrem local liber (fără legături) pentru funcţia $h(x) = f(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$, astfel că din teorema 4.7 rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a, b) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(a, b) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(a) = 0, \ 1 \le i \le m, 1 \le j \le d \quad (4.17)$$

Vom nota acum $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ unica soluţie a sistemului liniar (determinantul sistemului este chiar jacobianul nenul din enunţ)

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(a, b)\, u_i = -\frac{\partial f}{\partial y_k}(a, b), \ 1 \le k \le m$$

Prin urmare

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(a, b)\, \lambda_i = -\frac{\partial f}{\partial y_k}(a, b), \ 1 \le k \le m \quad (4.18)$$

Să arătăm că funcţia $F = f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m$ şi punctul (a, b) verifică relaţiile (4.15). Intr-adevăr, $g_p(a, b) = 0$, $1 \le p \le m$ deoarece $(a, b) \in M$. Apoi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_j}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(a, b) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a, b) \overset{(4.16)}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a, b) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(a, b) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(a) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_j}(a, b) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(a) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(a, b) \\
&\overset{(4.18)}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a, b) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(a, b) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(a) \overset{(4.17)}{=} 0
\end{aligned}$$

In fine

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y_k}(a,b) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(a,b) \overset{(4.18)}{=} 0$$

□

Corolarul 4.4. *Intr-un punct de extrem local al funcţiei F cu legăturile* (4.14)*, diferenţiala lui f este o combinaţie liniară a diferenţialelor legăturilor.*

Demonstraţie. Din (4.15) rezultă că $dF(a,b) = 0$, adică $df(a,b) = -\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, dg_k(a,b)$. □

Observaţia 4.4. Teorema 4.9 dă numai condiţii necesare de extrem. Pentru a preciza dacă punctul este de extrem se poate folosi semnul diferenţialei a doua a lui F (în ipoteza că $f, g \in C^2(U)$) restrânsă la M.

Exemplul 4.7. 1. Vom rezolva problema enunţată în exemplul 4.6. Avem $F(x,y) = xy + \lambda(x+y-a)$. După rezolvarea sistemului $y+\lambda = 0$, $x+\lambda = 0$, $x+y-a = 0$, găsim $x = y = \frac{a}{2}$, $\lambda = -\frac{a}{2}$. Prin diferenţierea legăturii avem $dx + dy = 0$, astfel că $d^2F\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = -dx^2$ este negativ definită. Avem un maxim care arată că dreptunghiul cu aria maximă este pătratul.

2. Se cer extremele funcţiei $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ cu legăturile $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, $g_2(x,y,z)x + z - 1 = 0$ [1].

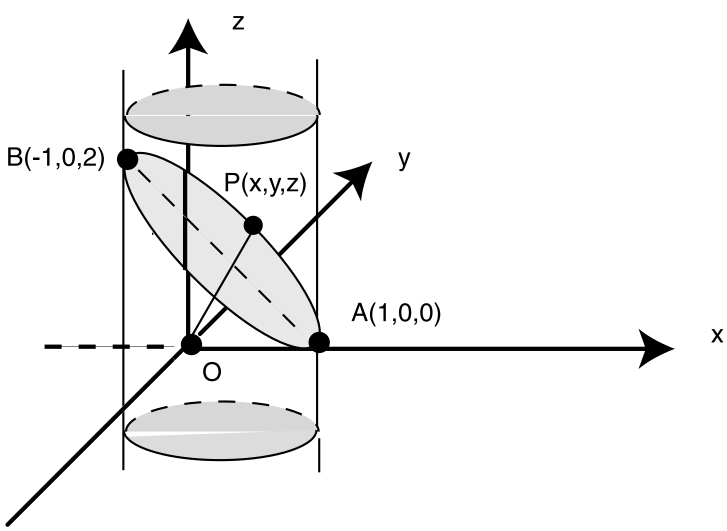

Fig. 4.5: Extreme cu legături

Mulţimea M este elipsa cu axa mare AB (v. Fig. 4.5) iar $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$. Prin rezolvarea sistemului (v. teorema 4.9) $2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$,

[1] comunicat de dl. S. Dincă

$y + \lambda_1 y = 0$, $2z + \lambda_2 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$, se obţin punctele critice $A(1,0,0)$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ şi $B(-1,0,2)$, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$.

- Pentru punctul A avem $d^2F = 2dz^2$ deci este un punct de minim.
- Pentru punctul B avem $d^2F = -4dx^2 - 4dy^2 + 2dz^2$ şi cum $dx + dz = 0$ rezultă $d^2F = -2dx^2 - 4dy^2$ astfel că punctul este de maxim.

Din Fig. 4.5 se observă că mulţimea M este elipsa cu axa mare AB iar $f(x,y,z)$ este lungimea segmentului OP pentru care punctele de extrem sunt A şi B.

Fie $f\colon A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^d$ şi fie $K \subset A$ un compact a cărui frontieră poate fi definită prin ecuaţii carteziene. Conform cu teorema 2.8 există $a, b \in K$ astfel încât $f(a) = \inf_{x\in K} f(x)$, $f(b) = \sup_{x\in K} f(x)$. Dacă $a \in \operatorname{Int} K$, atunci a este minim local. Dacă $a \notin \operatorname{Int} K$, atunci $a \in K \setminus \operatorname{Int} K = \operatorname{Fr} A$ şi a va fi punct de minim cu legăturile date de ecuaţiile carteziene ale frontierei. O discuţie similară se face pentru punctul de maxim b.

Exemplul 4.8. Să determinăm extremele globale ale funcţiei $f(x,y) = x^2 + 2xy$ pe compactul $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$. Folosind teorema 4.7 se vede că originea este singurul punct critic pentru f, dar, aplicând corolarul 4.3, se deduce că nu este punct de extrem. Astfel, marginile lui f sunt atinse pe frontieră şi va trebui să aflăm extremele lui f cu legătura $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$; pentru aceasta aplicăm teorema 4.9. Avem $F(x,y) = x^2 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ şi găsim $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ căruia îi corespund punctele critice $A\left(-\lambda_1\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)$ şi $B\left(\lambda_1\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}, -\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)$, precum şi $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ căruia îi corespund punctele critice $C\left(-\lambda_2\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)$ şi $D\left(\lambda_2\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}, -\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)$. Pentru a cerceta natura acestor puncte obsrvăm că pe mulţimea M avem $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, dar în vecinătatea punctelor A, B, C, D, $y = -\sqrt{1-x^2}$ astfel că putem considera semnul derivatei a doua a funcţiei de o variabilă $h(x) = x^2 - 2x\sqrt{1-x^2}$ în punctele critice. In final se găseşte $\inf_{x\in K} f(x) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ şi $\sup_{x\in K} f(x) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.