

Capitolul 3

Calcul diferențial

3.1 Diferențiabilitatea funcțiilor

3.1.1 Recapitulare. Funcții de o singură variabilă

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Funcția f este derivabilă în $a \in I$ dacă există și este finită limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\text{def}}{=} f'(a) \quad (3.1)$$

Valoarea $f'(a)$ se numește derivata funcției f în punctul a .

Punând $x = a + h$, observăm că relația (3.1) este echivalentă cu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad (3.2)$$

Așadar, pentru valori mici ale lui h , are loc egalitatea aproximativă

$$f(a + h) \cong f(a) + f'(a)h \quad (3.3)$$

Dacă punem $f'(a) = D$, aplicația $h \rightarrow Dh$, definită pe \mathbb{R} cu valori în \mathbb{R} este liniară și, din (3.3), rezultă

$$f(a + h) - f(a) \cong Dh \quad (3.4)$$

Geometric, se poate spune că funcția f (*i.e.* $x \rightarrow f(x)$) și aplicația $x \rightarrow f(a) + D(x - a)$ sunt tangente în $x = a$ (v. Fig.3.1).

Definiție. Aplicația liniară $h \rightarrow Dh$, definită pe \mathbb{R} cu valori în \mathbb{R} se numește diferențiala lui f în punctul a și se notează cu $df(a)$. Așadar,

$$df(a): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad df(a)(h) = Dh.$$

De obicei (prin tradiție), se notează $h = dx$, astfel că putem scrie

$$df(a) = D dx = f'(a) dx \quad (3.5)$$

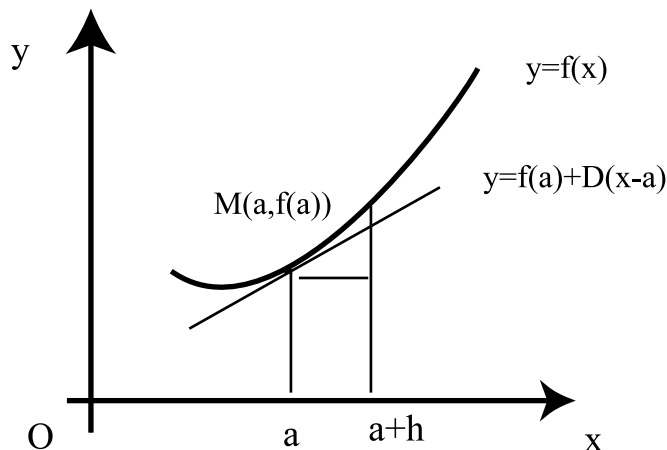


Fig. 3.1: Diferențiala

- Exemplul 3.1.** 1. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Avem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Prin urmare $df(1) = \frac{1}{2}dx$
2. Fie $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$. Avem $f'(x) = \frac{1}{1+x} \implies f'(4) = \frac{1}{5} \implies df(4) = \frac{1}{5}dx$.
3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$. Se deduce imediat că $df(1) = \frac{e}{(e+1)^2} dx$.

3.1.2 Funcții reale de variabilă vectorială

Fie $A \subset \mathbb{R}^d$ o mulțime deschisă și $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiție Se spune că funcțiile f și g sunt tangente în punctul $a \in A$, dacă

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - g(x)|}{\|x - a\|} = 0 \quad (3.6)$$

Relația (3.6) este echivalentă cu fiecare dintre următoarele:

$$f(x) - g(x) = o(\|x - a\|) \quad (3.7)$$

$$f(x) = g(x) + o(\|x - a\|) \quad (3.8)$$

Tinând seamă de inegalitatea

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

rezultă că, dacă perechile de funcții (f, h) și (h, g) sunt tangente în punctul $x = a$, atunci f și g sunt tangente în același punct.

Fie acum $A \subset \mathbb{R}^d$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiție Se spune că funcția f este diferențiabilă (în sens Fréchet) în punctul $x = a$, dacă există o aplicație liniară $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât

funcțiile f (i.e. $x \rightarrow f(x)$) și $x \rightarrow f(a) + T(x - a)$ să fie tangente în punctul $x = a$.

În acest caz, conform relației (3.8), avem

$$f(x) = f(a) + T(x - a) + o(\|x - a\|), \quad x \in A. \quad (3.9)$$

Aplicația T se numește *diferențiala funcției f în punctul $x = a$* și se notează $df(a)$.

Dacă punem $x - a = h$, atunci (3.9) poate fi scrisă într-una din următoarele forme echivalente:

$$f(a + h) = f(a) + T(h) + o(\|h\|), \quad a + h \in A \quad (3.10)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - T(h)}{\|h\|} = 0 \quad (3.11)$$

O aplicație liniară $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ este de forma $T(h) = D_1 h_1 + D_2 h_2 + \dots + D_d h_d$ pentru $h = (h_1, h_2, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$, unde D_1, D_2, \dots, D_d sunt constante reale ((D_1, D_2, \dots, D_d) este matricea aplicației liniare). Aceasta permite scrierea relației (3.11) sub forma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - \sum_{k=1}^d D_k h_k}{\|h\|} = 0. \quad (3.12)$$

Fie $1 \leq i \leq d$ arbitrar și $h = (0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0)$, $h_i \in \mathbb{R}$. Din (3.12) deducem

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - D_i h_i}{|h_i|} = 0. \quad (3.13)$$

iar, din (3.13), rezultă

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h_i} = D_i, \quad 1 \leq i \leq d. \quad (3.14)$$

Dacă $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$, atunci (3.14) poate fi scrisă pe componente astfel:

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h_i, a_{i+1}, \dots, a_d) - f(a_1, \dots, a_d)}{h_i} = D_i, \quad 1 \leq i \leq d. \quad (3.15)$$

Prin urmare, valorile D_i se obțin făcând, separat, derivatele în raport cu fiecare variabilă x_i , în punctul a_i , pe celelalte considerându-le constante (i.e. $x_j = a_j$, pentru $j \neq i$).

Observația 3.1. Limitele (3.14) sau, ceea ce este echivalent, (3.15) pot exista chiar dacă funcția f nu este diferențiabilă în punctul $x = a$.

Definiție. Valoarea D_i se numește *derivata parțială a funcției f în raport cu x_i în punctul $x = a$* . Se folosec notațiile

$$D_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{x_i}(a). \quad (3.16)$$

Pentru $h = (h_1, \dots, h_d)$ (la fel ca pentru funcțiile de o variabilă reală, v. subsec. 3.1.1) se folosește notația $h = dx = (dx_1, \dots, dx_d)$, astfel că putem scrie

$$df(a)(h) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k = \sum_{k=1}^d f'_{x_k}(a) h_k \quad (3.17)$$

$$df(a) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k = \sum_{k=1}^d f'_{x_k}(a) dx_k \quad (3.18)$$

Teorema 3.1. *Diferențiala unei funcții într-un punct este unică.*

Demonstrație. Presupunem că $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, unde $A \subset \mathbb{R}^d$ este o mulțime deschisă, are în punctul $a \in A$ două diferențiale U și V . Conform cu (3.10) avem

$$f(a+h) = f(a) + U(h) + o(\|h\|) \quad (3.19)$$

$$f(a+h) = f(a) + V(h) + o(\|h\|), \quad a+h \in A \quad (3.20)$$

Deducem

$$(U - V)(h) = o(\|h\|)$$

și dacă punem $T = U - V$ rezultă

$$T\left(\frac{h}{\|h\|}\right) = \frac{o(\|h\|)}{h}. \quad (3.21)$$

Prin urmare $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$\left|T\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right| < \varepsilon, \quad (\forall) h \text{ cu } \|h\| < \delta(\varepsilon). \quad (3.22)$$

Fie acum $y \in \mathbb{R}^d$, $\|y\| = 1$. Punem în (3.22) $h = \frac{\delta y}{2}$ (întrucât $\|h\| = \delta/2 < \delta$) și obținem

$$|T(y)| = \left|T\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right| < \varepsilon \implies \frac{\left|T\left(\frac{\delta y}{2}\right)\right|}{\delta/2} < \varepsilon \implies |T(y)| < \varepsilon. \quad (3.23)$$

Din (3.23), deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă că

$$T(y) = 0, \quad (\forall) y \in \mathbb{R}^d, \quad \|y\| = 1. \quad (3.24)$$

Pentru $x \in \mathbb{R}^d$ arbitrar $x \neq 0$ se pune în (3.24) $y = x/\|x\|$ și va rezulta că aplicația T este nulă pe \mathbb{R}^d . \square

Exemplul 3.2. 1. Fie

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = e^x \ln(x^2 + y^2).$$

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \left(\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x}{x^2 + y^2} \right); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$df = e^x \left(\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x}{x^2 + y^2} \right) dx + e^x \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$$

2. Fie

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{pentru } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pentru } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Pentru a vedea dacă funcția este diferențabilă în origine, se folosește relația (3.12), ceea ce revine la a calcula

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)x - f'_y(0, 0)y}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

astfel că funcția este diferențabilă în origine.

Teorema 3.2. Fie $A \subset \mathbb{R}^d$ o mulțime deschisă $a \in A$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Dacă f este diferențabilă în punctul $x = a$, atunci f este continuă în acest punct.
2. Dacă f este diferențabilă în punctul $x = a$, atunci f admite derivate parțiale în acest punct, în raport cu fiecare variabilă.
3. Dacă f este liniară (i.e. $A = \mathbb{R}^d$ și $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}^d$), atunci $df = f$ în orice punct.
4. Dacă f este constantă atunci $df = 0$ în orice punct.

Demonstrație. 1. Este o consecință a relației (3.10) și continuității funcției liniare T .

2. Este o consecință relației (3.14) (sau (3.15)).

3. Intrucât $f(a + h) = f(a) + f(h)$, se observă cu ușurință că relația (3.10) este verificată dacă punem $T = f$ și $o(\|h\|) = 0$.

4. Presupunem $f(x) = c$, $(\forall) x \in A$. Se vede că relația (3.10) este verificată dacă punem $T = 0$ (aplicația nulă) și $o(\|h\|) = 0$. □

Observația 3.2. Așa cum s-a mai subliniat, reciproca pct. 2 al teoremei 3.2 nu este, în general, adevărată (v. exerc. următor).

Exercițiul 3.1. 1. Să se arate că funcția

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

admite derivate parțiale în origine, dar nu este diferentiabilă în acest punct.

2. Aceeași problemă pentru funcția

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pentru } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pentru } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. Fie

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}.$$

Să se calculeze $df(1, 1, 1)$.

Definiție Funcția $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ se numește *de clasă C^1 pe A* , ($f \in C^1(A)$), dacă admite derivate parțiale continue în orice punct din A .

Teorema 3.3. (*Criteriu de diferentiabilitate*) Fie $A \subset \mathbf{R}^d$, deschisă, $f: A \rightarrow \mathbf{R}$. Dacă $f \in C^1(A)$, atunci f este diferentiabilă în orice punct din A .

Demonstrație. Pentru simplificarea scrierii, vom considera cazul $d = 2$. Fie $a = (a_1, a_2) \in A$, arbitrar. Pentru orice $x = (x_1, x_2) \in A$, avem

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) \\ &= [f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)] + [f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)]. \end{aligned}$$

În cele două paranteze drepte aplicăm teorema creșterilor finite a lui Lagrange, considerând-o pe prima ca funcție de x_1 , iar pe cea de a doua ca funcție de x_2 . Așadar există ξ_1 între x_1 și a_1 , precum și ξ_2 între x_2 și a_2 , astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2)(x_2 - a_2).$$

Rezultă

$$\frac{f(x) - f(a)}{\|x - a\|} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) \frac{x_1 - a_1}{\|x - a\|} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2) \frac{x_2 - a_2}{\|x - a\|}$$

de unde

$$\frac{f(x) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)}{\|x - a\|} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right] \frac{x_1 - a_1}{\|x - a\|} + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right] \frac{x_2 - a_2}{\|x - a\|}$$

Deoarece derivatele parțiale sunt continue,

$$\left| \frac{x_1 - a_1}{\|x - a\|} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{x_2 - a_2}{\|x - a\|} \right| \leq 1, \quad \text{și } (x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2) \implies \xi_1 \rightarrow a_1, \xi_2 \rightarrow a_2$$

rezultă

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)}{\|x - a\|} = 0$$

și astfel, conform cu (3.12), funcția f este diferențiabilă în punctul arbitrar $a \in A$. \square

Exercițiul 3.2. Referitor la funcțiile de variabilă vectorială, să se facă o scurtă expunere cu titlul “operații cu funcții diferențiabile”.

3.1.3 Funcții vectoriale de variabilă vectorială

Fie $A \subset \mathbb{R}^d$, deschisă și $f: A \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Funcțiile proiecție sunt

$$\text{pr}_i: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \text{pr}_i(y_1, y_2, \dots, y_p) \stackrel{\text{def}}{=} y_i, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Funcțiile $f_i = \text{pr}_i \circ f$ se numesc *componentele lui f* . Prin urmare $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ și, dacă $(y_1, y_2, \dots, y_p) = f(x_1, x_2, \dots, x_d)$, atunci

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_d) = \text{pr}_i(f(x_1, x_2, \dots, x_d)) = \text{pr}_i(y_1, y_2, \dots, y_p) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Se utilizează scrierea $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$.

Exemplul 3.3. 1. Fie

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (xy, x^2 + y^2).$$

Deci, $f_1(x, y) = xy$, $f_2(x, y) = x^2 + y^2$.

2. Fie

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (e^{x+y}, \ln|xy|, x^3 + y).$$

Avem $f_1(x, y) = e^{x+y}$, $f_2(x, y) = \ln|xy|$, $f_3(x, y) = x^3 + y$.

Diferențiabilitatea pentru funcții cu valori vectoriale se definește la fel ca și pentru funcții reale (v. subsec. 3.1.2 și relațiile (3.9)-(3.11)).

Definiție. Fie f definită ca mai sus și $a \in A$. Vom spune că funcția f este diferentiabilă în punctul $x = a$, dacă există o aplicație liniară $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$, astfel încât

$$f(a+h) = f(a) + T(h) + o(\|h\|), \quad h \in \mathbb{R}^d, \quad a+h \in A. \quad (3.25)$$

Relația (3.25) este echivalentă cu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|} = 0. \quad (3.26)$$

Dacă punem în evidență componentele lui T , i.e. $T = (T_1, T_2, \dots, T_p)$, atunci (3.26) se scrie pe componente astfel:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(a+h) - f_i(a) - T_i(h)}{\|h\|} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (3.27)$$

Fie $(D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{id})$ matricea aplicației liniare $T_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Rezultă că matricea aplicației liniare $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ va fi

$$[T] = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1d} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{p1} & D_{p2} & \dots & D_{pd} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Tinând seama de (3.16) rezultă că (3.28) se scrie

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_d}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Definiție. Aplicația liniară T se numește *diferențiala funcției f în punctul $x = a$* și se notează $df(a)$.

Matricea (3.29) a derivatelor parțiale (i.e. matricea aplicației liniare T) se numește *matricea jacobiană a funcției f în punctul $x = a$* , (după numele matematicianului german C. G. Jacobi (1804–1851)). Această matrice se notează $J_f(a)$.

Dacă $p = d$, atunci matricea jacobiană devine o matrice patratică de ordin d , iar determinantul

$$\det J_f(a) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_d)}{D(x_1, x_2, \dots, x_d)}(a)$$

se numește *jacobianul funcției f în punctul $x = a$* .

Egalitatea următoare, consecință a egalității (3.26), este similară relației (3.12), numai că de data aceasta este vorba de o egalitate în \mathbb{R}^p ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - J_f(a)h}{\|h\|} = 0 \quad (3.30)$$

Teorema 3.4. *O funcție cu valori vectoriale este diferențiabilă într-un punct dacă și numai dacă toate componentele sale sunt diferențiabile în acel punct.*

Demonstrație. Consecință a relațiilor (3.30) și (3.12). \square

Observația 3.3. Este evident că teorema 3.1, referitoare la unicitatea diferențialei este valabilă și pentru funcții vectoriale (de ce ?)

Exercițiul 3.3. Să se reformuleze teorema 3.2 pentru funcții cu valori vectoriale.

Exercițiul 3.4. Să se determine derivatele parțiale ale funcțiilor următoare, în raport cu fiecare variabilă, pe domeniul lor maxim de definiție

1. $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $f(x, y) = e^{x \ln y}$
3. $f(x, y) = \ln |\sec xy + \operatorname{tg} xy|$
4. $f(x, y, z, w) = x^2 e^{2y+3z} \cos(4w)$
5. $f(r, \theta, z) = \frac{r(2 - \cos 2\theta)}{r^2 + w^2}$
6. $f(x, y, u, v) = \frac{x^2 + y^2}{u^2 + v^2}$
7. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

În continuare ne vom referi la compunerea funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială.

Fie mulțimile deschise $A \subset \mathbb{R}^d$ și $B \subset \mathbb{R}^m$, iar $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Teorema 3.5. *Dacă f este diferențiabilă în punctul $a \in A$, iar g este diferențiabilă în punctul $b = f(a) \in B$, atunci funcția compusă $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ este diferențiabilă în punctul $a \in A$ și avem*

$$d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a). \quad (3.31)$$

Demonstrație. Notăm $T = df(a)$ și $U = dg(b)$. Din relația (3.25) rezultă

$$f(x) = f(a) + T(x - a) + o(\|x - a\|), \quad x \in A \quad (3.32)$$

$$g(y) = g(b) + U(y - b) + o(\|y - b\|), \quad y \in B \quad (3.33)$$

Dacă $y = f(x)$, atunci din (3.33) deducem

$$g(f(x)) = g(b) + U(f(x) - b) + o(\|f(x) - b\|)$$

iar dacă folosim (3.32)

$$g(f(x)) = g(b) + U(f(a) + T(x - a) + o(\|x - a\|) - b) + o(\|f(x) - b\|)$$

și cum U este liniară

$$g(f(x)) = g(b) + U(T(x - a)) + U(o(\|x - a\|)) + o(\|f(x) - b\|).$$

Așadar

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - (U \circ T)(x - a)}{\|x - a\|} = \frac{U(o(\|x - a\|))}{\|x - a\|} + \frac{o(\|f(x) - b\|)}{\|x - a\|}.$$

Conform relației (3.26), demonstrația va fi încheiată dacă vom arăta că

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{U(o(\|x - a\|))}{\|x - a\|} + \frac{o(\|f(x) - b\|)}{\|x - a\|} \right] = 0. \quad (3.34)$$

Intrucât U este continuă și $U(0) = 0$ avem

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{U(o(\|x - a\|))}{\|x - a\|} = 0,$$

astfel că trebuie să ne ocupăm doar de limita termenului

$$\frac{o(\|f(x) - b\|)}{\|x - a\|} = \frac{o(\|f(x) - b\|) \|f(x) - b\|}{\|f(x) - b\| \|x - a\|}. \quad (3.35)$$

Funcția f este continuă în punctul $x = a$ (v. teorema 3.2), așa că, din definiția neglijabilei, rezultă

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o(\|f(x) - b\|)}{\|f(x) - b\|} = 0. \quad (3.36)$$

Comparând (3.35) și (3.36), rezultă că demonstrația va fi încheiată după ce arătăm că termenul

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x) - b\|}{\|x - a\|} &= \frac{\|T(x - a) + o(\|x - a\|)\|}{\|x - a\|} \\ &= \left\| T \left(\frac{x - a}{\|x - a\|} \right) + \frac{o(\|x - a\|)}{\|x - a\|} \right\| \\ &\leq \left\| T \left(\frac{x - a}{\|x - a\|} \right) \right\| + \left\| \frac{o(\|x - a\|)}{\|x - a\|} \right\|. \end{aligned} \quad (3.37)$$

este mărginit într-o vecinătate a punctului $x = a$. Vectorul $\frac{x-a}{\|x-a\|}$ are norma 1, deci se găsește pe sfera de rază 1, cu centrul în origine, care este mulțime compactă (închisă și mărginită). Funcția continuă T este mărginită pe acest compact, iar

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o(\|x-a\|)}{\|x-a\|} = 0$$

ceea ce arată că și $\frac{o(\|x-a\|)}{\|x-a\|}$ este mărginit într-o vecinătate a punctului $x = a$. Folosind (3.37), demonstrația este încheiată. \square

Corolarul 3.1. *In condițiile teoremei 3.5, între matricile jacobiene are loc relația:*

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(a) \cdot J_f(a) \quad (3.38)$$

Demonstrație. Este o consecință a relației (3.31), deoarece matricea compunerii a două aplicații liniare este egală cu produsul matricilor celor două aplicații. \square

Corolarul 3.2. *In cazul $p = 1$, i.e. $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, în condițiile teoremei 3.5, avem*

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_k}(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a), \quad k = 1, 2, \dots, d. \quad (3.39)$$

Demonstrație. In acest caz matricea jacobiană $J_{g \circ f}(a)$ este formată dintr-o singură linie, iar (3.39) se obține egalând elementele de pe coloana k din cei doi membri ai relației (3.38). \square

Exemplul 3.4. 1. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, iar $h(x, y) = f(xy, x^2 + y^2)$. Dacă punem $u(x, y) = xy$, $v(x, y) = x^2 + y^2$, atunci h reprezintă următoarea compunere de funcții

$$(x, y) \xrightarrow{(u,v)} (xy, x^2 + y^2) \xrightarrow{f} f(xy, x^2 + y^2).$$

Folosind (3.39) rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

2. Fie $w(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $z(x, y) = x^2 + y^2$. Punem $h(x, y) = w(x, y, z(x, y))$, și avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4xz = 2x + 4x^3 + 4xy^2 \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 4yz = 2y + 4y^3 + 4x^2y \end{aligned}$$

3. Se consideră ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = a, \quad a \in \mathbb{R}, \text{ dat}$$

Efectuăm schimbarea de variabile $u = x - y$, $v = x + y$ și avem

$$\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = a$$

sau

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = a$$

adică

$$2 \frac{\partial z}{\partial u} = a \implies z = \frac{au}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ etc.}$$

Definiție. Mulțimea deschisă $C \subset \mathbb{R}^d$ se numește *con deschis* dacă

$$(\forall) \lambda \in (0, \infty), x \in C \implies \lambda x \in C.$$

O funcție $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *pozitiv omogenă de ordin α* dacă

$$(\forall) \lambda \in (0, \infty), x \in C \implies f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x). \quad (3.40)$$

Teorema 3.6. (*Euler*) Fie $f: C \rightarrow \mathbb{R}^d$, unde $C \subset \mathbb{R}^d$ este un con deschis, diferențiabilă. Funcția f este pozitiv omogenă de ordin α dacă și numai dacă

$$\sum_{k=1}^d x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \alpha f(x), \quad (\forall) x = (x_1, \dots, x_d) \in C. \quad (3.41)$$

Demonstrație. a) Pentru $x = (x_1, \dots, x_d)$ fixat, considerăm funcția derivabilă

$$\phi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(\lambda) = f(\lambda x).$$

Folosind (3.39) rezultă

$$\phi'(\lambda) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) x_i \implies \phi'(1) = \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Pe de altă parte

$$\phi(\lambda) = \lambda^\alpha f(x) \implies \phi'(1) = \alpha f(x),$$

și (3.41) este demonstrată.

b) Reciproc, presupunem că (3.41) este verificată. Rezultă

$$\sum_{k=1}^d \lambda x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\lambda x) = \alpha f(x), \quad (\forall) x \in C, \quad (\forall) \lambda \in (0, \infty).$$

Prin urmare, funcția $\phi(\lambda) = f(\lambda x)$ verifică ecuația $\lambda \phi'(\lambda) = \alpha \phi(\lambda)$. Prin rezolvarea acestei ecuații diferențiale, cu condiția inițială $\phi(1) = f(x)$ se obține $\phi(\lambda) = \lambda^\alpha f(x)$, deci f este pozitiv omogenă. \square

Exercițiul 3.5. 1. Să se cerceteze cum poate fi folosită teorema 3.5 pentru rezolvarea exercițiului 3.2.

2. Pentru fiecare dintre următoarele două funcții determinați cel mai mare deschis G din \mathbb{R}^3 pe care funcția este diferențiabilă și apoi scrieți diferențiala într-un punct arbitrar $(x, y, z) \in G$.

$$a) f(x, y, z) = z^{xy}; \quad b) f(x, y, z) = (xy)^z$$

3. Pentru $z: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, se consideră ecuația cu derivate parțiale

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = a \sqrt{x^2 + y^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se efectueze în această ecuație schimbarea de variabile (coordonate polare) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

4. Fie

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - 2y^2)}{x^2 + y^2} & \text{pentru } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pentru } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Arătați că f este continuă în $(0, 0)$
- Arătați că f admite derivate parțiale în $(0, 0)$
- Deduceți că $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ și scrieți diferențiala într-un punct arbitrar, inclusiv în origine.

5. Fie $A = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \theta < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$ și $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = (f_1, f_2, f_3)$, $f_1(r, \theta, z) = r \cos \theta$, $f_2(r, \theta, z) = r \sin \theta$, $f_3(r, \theta, z) = z$. Să se determine $F(A)$ și să se arate că F este o bijecție de la A la $F(A)$. Să se calculeze jacobianul lui F .

3.2 Derivata după o direcție

Fie $a, b \in \mathbb{R}^d$. Definim:

- *dreapta* ce trece prin a și b este

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid x = a + t(b - a), t \in \mathbb{R}\}$$

- *semidreapta* din a spre b este

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid x = a + t(b - a), t \in \mathbb{R}_+\}$$

- *segmentul* ce unește a cu b este

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid x = a + t(b - a), t \in [0, 1]\}$$

- *direcție în \mathbf{R}^d* este o semidreaptă din $0 \in \mathbf{R}^d$.

Este clar că fiecare punct $b \in \mathbf{R}^d$ determină o direcție, dar puncte diferite pot determina aceeași direcție. Fiecare direcție conține un punct unic de normă 1 numit *versorul* direcției respective. Prin urmare, o direcție poate fi definită ca un vector de normă 1, *versorul său*.

Fie $A \subset \mathbf{R}^d$, deschisă, $a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in A$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_d)$ un versor din \mathbf{R}^d , ($\|s\| = \sqrt{s_1^2 + \dots + s_d^2} = 1$) și $f: A \rightarrow \mathbf{R}$.

Deoarece mulțimea A este deschisă, există $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset A$. Definim funcția $g: (-r, r) \rightarrow \mathbf{R}$, $g(t) = f(a + ts)$. Observăm că g este bine definită întrucât $\|a + ts - a\| = \|ts\| = |t| \|s\| = |t| < r$ astfel că $a + ts \in B(a, r) \subset A$.

Definiție. Se spune că funcția f este derivabilă în punctul $a \in A$, după direcția s , dacă funcția g este derivabilă în punctul $t = 0$. În acest caz $g'(0)$ se numește *derivata lui f după direcția s* , (v. Fig. 3.2). Se utilizează notația

$$\frac{df}{ds}(a) \stackrel{\text{def}}{=} g'(0). \quad (3.42)$$

Direcția dată de versorul s

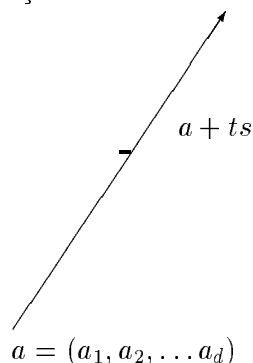


Fig. 3.2: Derivata după o direcție

Fie e_1, e_2, \dots, e_d versorii axelor de coordonate, i.e. $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots, e_d = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Din relația (3.42) rezultă

$$\begin{aligned} \frac{df}{de_k}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + ts)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_d) - f(a_1, \dots, a_d)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, d. \end{aligned}$$

Prin urmare, derivatele în punctul $x = a$ după direcțiile axelor sunt derivatele parțiale ale funcției în acest punct.

Definiție. Vectorul din \mathbb{R}^d

$$\nabla_a f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(a) \right)$$

se numește *gradientul lui f în punctul $x = a$* și se mai notează și $\text{grad}_a f$, ($\nabla_a f$ se citește “nabla de f în a ”).

Teorema 3.7. *Cu notațiile precedente, dacă funcția f este diferențiabilă în punctul $x = a$, atunci f admite derivată după orice direcție s în acest punct și avem*

$$\frac{df}{ds}(a) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k} s_k = s \cdot \nabla_a f \quad (3.43)$$

(cu “ \cdot ” s -a notat produsul scalar a doi vectori).

Demonstrație. Folosind relația (3.11) în care punem $h = ts$ avem

$$f(a + ts) = f(a) + T(ts) + o(\|ts\|).$$

De aici obținem succesiv

$$\begin{aligned} f(a + ts) - f(a) &= tT(s) + o(\|ts\|) \\ \left| \frac{f(a + ts) - f(a)}{t} - T(s) \right| &= \left| \frac{o(\|ts\|)}{t} \right| \\ \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(a + ts) - f(a)}{t} - T(s) \right| &= 0. \end{aligned}$$

Limita de mai sus se justifică prin faptul că

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{o(\|ts\|)}{t} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|o(\|ts\|)|}{\|ts\|} \left| \frac{\|ts\|}{t} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|o(\|ts\|)|}{\|ts\|} = 0.$$

Tinând seamă de (3.42) rezultă

$$\frac{df}{ds}(a) = T(s) = df(a)(s) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k} s_k.$$

□

Observația 3.4. Diferența $\Delta_a f = f(a + ts) - f(a)$ este numită *variația* funcției f atunci când punctul curent se deplasează din $x = a$ în $x = a + ts$. Din relația (3.7) rezultă că, pentru valori mici ale lui t , avem

$$\Delta_a f = f(a + ts) - f(a) \cong s \cdot \nabla_a f = \|\nabla_a f\| \cos \theta \quad (3.44)$$

unde θ este unghiul dintre s și $\nabla_a f$. Observăm următoarele:

- variația $\Delta_a f$ este maximă atunci când s are aceeași direcție cu $\nabla_a f$, (i.e. $\cos \theta = 1$);
- variația $\Delta_a f$ este minimă atunci când s are direcție contrară celei a lui $\nabla_a f$, (i.e. $\cos \theta = -1$);
- $\Delta_a f = 0$ dacă s este perpendicular pe $\nabla_a f$, (i.e. $\cos \theta = 0$).

Observația 3.5. Reciproca teoremei 3.7 nu este adevărată, în general. Mai precis, există funcții derivabile într-un punct, după orice direcție, dar care nu sunt diferențiabile în acel punct, (v. exemplul următor).

Noțiunile următoare sunt utilizate în *Teoria câmpului*. Ne vom referi la cazul cel mai frecvent $d = 3$.

Definiție. Fie $A \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă. O funcție $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}$ este numită *câmp scalar pe A*, iar o funcție $\vec{v}: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ este numită *câmp vectorial pe A*. De obicei, componentele unui câmp vectorial se notează cu P, Q, R . Dacă se fixează un reper ortonormat $Oxyz$ de versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, atunci orice punct se identifică prin vectorul său de poziție și avem

$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Fie ϕ un câmp scalar de clasă $C^1(A)$. Gradientul lui ϕ în punctul $a \in A$ este

$$\nabla_a \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(a), \frac{\partial \phi}{\partial y}(a), \frac{\partial \phi}{\partial z}(a) \right)$$

iar aplicația $a \rightarrow \nabla_a \phi$ definește un câmp de vectori în A , notat $\nabla \phi$ și numit *gradientul lui ϕ* . Deci

$$\nabla_a \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}(a)\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}(a)\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}(a)\vec{k}. \quad (3.45)$$

Notând $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vectorul de poziție al punctului curent $M(x, y, z)$, definim *vectorul deplasare* $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, iar relația (3.18) se scrie

$$d\phi(a) = \text{grad}_a \phi \cdot d\vec{r}. \quad (3.46)$$

Fie acum \vec{v} un câmp vectorial de clasă $C^1(A)$.

Definiție. Pentru orice $a \in A$ se definește *divergența lui \vec{v} în a* prin

$$\text{div}_a \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

și *rotorul lui \vec{v} în a* prin

$$\text{rot}_a \vec{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}(a) - \frac{\partial Q}{\partial z}(a) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}(a) - \frac{\partial R}{\partial x}(a) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a) \right) \vec{k}.$$

Rotorul poate fi scris “formal” sub formă de determinant astfel

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Operatorul “nabla” poate fi folosit pentru scrierea divergenței și a rotorului, prin utilizarea formală a produsului scalar și a produsului vectorial

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}; \operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} \quad (3.47)$$

Exemplul 3.5. 1. Fie

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6 + y^2} & \text{pentru } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pentru } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Vom arăta că f este derivabilă în origine după orice direcție $s = (s_1, s_2)$. Intr-adevăr:

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ts_1, ts_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 s_1^2 s_2}{t(t^6 s_1^6 + t^2 s_2^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s_1^2 s_2}{t^4 s_1^6 + s_2^2} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } s_2 = 0 \\ \frac{s_1^2}{s_2} & \text{dacă } s_2 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pe de altă parte, funcția nu are limită în origine deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) = \infty,$$

ceea ce arată că f nu poate fi diferențiabilă în origine.

2. Fie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^y + yz$. Pentru a calcula derivata lui f după direcția dată de vectorul $\overrightarrow{M_0 M_1}$ cu $M_0(2, 0, 0)$ și $M_1(4, 1, -2)$, în punctul M_0 , observăm că $\vec{u} = \overrightarrow{M_0 M_1} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, calculăm versorul lui u , $\vec{s} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{3}(2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$, aplicăm (3.43) și obținem $\frac{df}{ds}(2, 0, 0) = \frac{4}{3}$. Variația Δf corespunzătoare unei deplasări $\Delta s = 0.1$ de la M_0 spre M_1 va fi (v. observația 3.4)

$$\Delta f \cong \frac{df}{ds}(2, 0, 0) \Delta s = 0.1 \times \frac{4}{3} \cong 0.13.$$

3. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 100 - x^2 - y^2$, $M_0(3, 4)$ și versorul $\vec{s} = s_1\vec{i} + s_2\vec{j}$. Gradientul în M_0 este $\nabla f = -6\vec{i} - 8\vec{j}$, deci derivata în M_0 după direcția \vec{s} este $\frac{df}{ds} = -6s_1 - 8s_2$. Funcția crește cel mai rapid în direcția gradientului, (v. observația 3.4). Deoarece $\|\nabla f\| = 10$, această direcție este

$$\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}.$$

Derivata după această direcție este $\|\nabla f\| = 10$. Direcția perpendiculară pe ∇f este $\vec{u} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$ și avem

$$\frac{df}{du} = \vec{u} \cdot \nabla f = \left(\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j} \right) \cdot (-6\vec{i} - 8\vec{j}) = 0.$$

4. Notăm $r = \|\vec{r}\|$, ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ este, așa cum s-a arătat, vectorul de poziție al punctului curent $M(x, y, z)$). Forța de atracție newtoniană realizată de O în M are o expresie de forma $\vec{F} = -k \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$, și este definit pe $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Avem $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ iar componentele lui \vec{F} sunt $P = -k \frac{x}{r^3}$, $Q = -k \frac{y}{r^3}$, $R = -k \frac{z}{r^3}$. Deci

$$\text{grad } r = \nabla r = \text{grad } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = -k \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = -k \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{r^3} \right) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{r^3} \right) \right) \vec{j} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{r^3} \right) \right) \vec{k} \right] = 0. \end{aligned}$$

Exercițiul 3.6. 1. Să se determine vectorul *intensitate electrică* $\vec{E} = -\nabla V$, pentru fiecare din funcțiile potențial V , în punctele indicate:

$$a) V = e^{-2y} \cos 2x, (\pi/4, 0, 0); \quad b) V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, (3, 4, 0)$$

$$c) V = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (1, 2, -2); \quad d) V = e^{3x+4y} \cos 5z, (0, 0, \pi/6).$$

2. Să se calculeze variația funcției $f(x, y, z) = e^x \cos yz$, atunci când punctul $M(x, y, z)$ se deplasează din origine, cu distanța $\Delta s = 0.1$ pe direcția vectorului $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

3. Pentru funcția $f(x, y) = x^2y + 2xy^2$, în punctul $M_0(1, 3)$, să se determine:

- direcția celei mai mari creșteri a lui f ;
- derivata după direcția celei mai mari creșteri a lui f ;
- direcția celei mai mari descreșteri a lui f ;
- direcția după care derivata lui f este nulă.

3. Utilizând definițiile divergenței și rotorului să se demonstreze următoarele reguli de calcul:

- $\text{div } \vec{c} = 0$, $\text{rot } \vec{c} = 0$, (i.e. $\nabla \cdot \vec{c} = 0$, $\nabla \times \vec{c} = 0$), pentru orice vector constant \vec{c} ;

- $\operatorname{div}(\vec{u} + \vec{v}) = \operatorname{div} \vec{u} + \operatorname{div} \vec{v}$, $\operatorname{rot}(\vec{u} + \vec{v}) = \operatorname{rot} \vec{u} + \operatorname{rot} \vec{v}$, $\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}$, (i.e. $\nabla \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \nabla \cdot \vec{u} + \nabla \cdot \vec{v}$, $\nabla \times (\vec{u} + \vec{v}) = \nabla \times \vec{u} + \nabla \times \vec{v}$, $\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{v})$) pentru orice câmpuri vectoriale \vec{u} și \vec{v} ;
- $\operatorname{div}(a\vec{v}) = a \operatorname{div} \vec{v}$, $\operatorname{rot}(a\vec{v}) = a \operatorname{rot} \vec{v}$, (i.e. $\nabla \cdot (a\vec{v}) = a(\nabla \cdot \vec{v})$, $\nabla \times (a\vec{v}) = a(\nabla \times \vec{v})$), $a \in \mathbb{R}$, constant;
- $\operatorname{div}(\phi\vec{v}) = \phi \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \phi$, $\operatorname{rot}(\phi\vec{v}) = \phi \operatorname{rot} \vec{v} - \vec{v} \times \operatorname{grad} \phi$, (i.e. $\nabla \cdot (\phi\vec{v}) = \phi(\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla \phi$, $\nabla \times (\phi\vec{v}) = \phi(\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \times \nabla \phi$), pentru orice câmp scalar ϕ și orice câmp vectorial \vec{v} ;
- $\operatorname{div} \vec{r} = 3$, $\operatorname{div}(\vec{c} \times \vec{r}) = 0$, $\operatorname{rot}(\vec{c} \times \vec{r}) = 2\vec{c}$, pentru orice vector constant \vec{c} , \vec{r} fiind vectorul de poziție.

3.3 Derivate parțiale de ordin superior

Fie $A \subset \mathbb{R}^d$ o mulțime deschisă și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiție. Funcția f se numește:

- de clasă $C^0(A)$ dacă este continuă pe A ;
- de clasă $C^1(A)$, sau *continuu diferentiabilă*, dacă admite derivate parțiale, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}$, continue pe A ;
- de clasă $C^2(A)$ dacă $f \in C^1(A)$ și $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1(A)$, pentru orice $1 \leq i \leq d$,
i.e. pentru orice $1 \leq i, j \leq d$, există $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$, în fiecare punct din A și acestea sunt funcții continue pe A ;
- de clasă $C^p(A)$, $p \geq 3$, prin inducție, dacă $f \in C^{p-1}(A)$, iar derivatele sale de ordin $p-1$ sunt de clasă $C^1(A)$;
- de clasă $C^\infty(A)$, dacă $f \in C^p(A)$, pentru orice $p \geq 0$; prin urmare $C^\infty(A) = \bigcap_{p \geq 0} C^p(A)$.

Evident

$$C^\infty(A) \subset \dots \subset C^p(A) \subset C^{p-1}(A) \subset \dots \subset C^1(A) \subset C^0(A).$$

Pentru derivatele de ordin superior se folosesc notațiile:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_j^2 \partial x_i},\end{aligned}$$

Observația 3.6. În special pentru funcțiile de două sau trei variabile se mai utilizează notațiile

$$f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{xyz}, \text{ etc.}$$

Exemplul 3.6. 1. Fie $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$. Avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + 3y; & \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 + 3x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6y; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 3\end{aligned}$$

2. Fie $f(x, y, z) = e^{xyz}$. Avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= yze^{xyz}; & \frac{\partial f}{\partial y} &= xze^{xyz}; & \frac{\partial f}{\partial z} &= xye^{xyz} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^2 z^2 e^{xyz}; & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= x^2 z^2 e^{xyz}; & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= x^2 y^2 e^{xyz} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z(1 + xyz)e^{xyz} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y(1 + xyz)e^{xyz} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = x(1 + xyz)e^{xyz}\end{aligned}$$

Dacă derivatele de ordin superior depind de ordinea de derivare, atunci forma acestor derivate devine foarte complicată. Există însă criterii care, în condiții destul de generale, stabilesc posibilitatea de intervertire a ordinii de derivare.

Teorema 3.8. (Criteriul lui Schwarz) Fie $A \subset \mathbb{R}^d$ o mulțime deschisă. Dacă $f \in C^2(A)$, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad (3.48)$$

în orice punct $a \in A$ și pentru orice $1 \leq i, j \leq d$.

Demonstrație. Pentru simplificarea scrierii vom considera cazul $d = 2$. Fie $a = (a_1, a_2)$ și $h = (h_1, h_2)$, astfel încât punctul $(a_1 + h_1, a_2 + h_2)$ se găsește într-o bilă deschisă cu centrul în a . Considerăm expresia

$$w = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2).$$

Considerăm funcția de o singură variabilă

$$\phi(x_1) = f(x_1, a_2 + h_2) - f(x_1, a_2), \quad x_1 \in [a_1, a_1 + h_1].$$

Această funcție este de clasă $C^1[a_1, a_1 + h_1]$, deci, conform teoremei creșterilor finite a lui Lagrange, există $0 < \theta_1 < 1$, astfel încât

$$\begin{aligned} w &= \phi'(a_1 + \theta_1 h_1) h_1 \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2) \right] h_1 \end{aligned} \quad (3.49)$$

În paranteza dreaptă din (3.49) aplicăm din nou teorema lui Lagrange pe intervalul $[a_2, a_2 + h_2]$. Așadar, există $0 < \theta_2 < 1$, astfel încât

$$w = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + \theta_2 h_2) h_1 h_2. \quad (3.50)$$

În mod similar, considerăm funcția de o singură variabilă

$$\psi(x_2) = f(a_1 + h_1, x_2) - f(a_1, x_2), \quad x_2 \in [a_2, a_2 + h_2].$$

Conform teoremei lui Lagrange, există $0 < \tau_2 < 1$, astfel încât

$$\begin{aligned} w &= \psi'(a_2 + \tau_2 h_2) h_2 \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2 + \tau_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \tau_2 h_2) \right] h_2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

În paranteza dreaptă din (3.51) aplicăm, din nou teorema lui Lagrange, astfel că există $0 < \tau_1 < 1$, pentru care

$$w = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \tau_1 h_1, a_2 + \tau_2 h_2) h_1 h_2. \quad (3.52)$$

Din (3.50) și (3.52) rezultă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + \theta_2 h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \tau_1 h_1, a_2 + \tau_2 h_2). \quad (3.53)$$

În mod evident avem

$$(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0) \implies \begin{cases} (a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + \theta_2 h_2) \rightarrow (a_1, a_2) \\ (a_1 + \tau_1 h_1, a_2 + \tau_2 h_2) \rightarrow (a_1, a_2) \end{cases}$$

ceea ce, împreună cu continuitatea derivatelor parțiale de ordinul al doilea, antrenează egalitatea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)$$

□

În continuare se va presupune că sunt îndeplinite condiții care asigură posibilitatea de intervertire a ordinii de derivare.

Definiție.

1. Se numește *multi-indice d-dimensional* un sistem ordonat $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ de d numere naturale; numărul natural $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ se numește *ordinul* lui α ;
2. Dacă $f \in C^p(A)$, $A \subset \mathbb{R}^d$, deschisă, iar $|\alpha| \leq p$, atunci se definește funcția

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} : A \rightarrow \mathbb{R}$$

de clasă $C^{p-|\alpha|}$;

3. Aplicația $D^\alpha : C^p(A) \rightarrow C^{p-|\alpha|}(A)$, $f \rightarrow D^\alpha f$ se numește *operatorul de derivare de multi-indice α* ;
4. Fie $a \in A$. Forma pătratică

$$d^2 f(a) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad d^2 f(a)(h_1, \dots, h_d) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

se numește *diferențiala de ordinul al doilea* a funcției f în punctul a . În punctul curent din A , pentru diferențiala de ordinul II, se utilizează notația

$$d^2 f = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

cu convenția $dx_i dx_i = dx_i^2$; această diferențială se scrie utilizând "puteri formale" astfel

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_d} dx_d \right)^2 f(a) \quad (3.54)$$

5. Matricea pătratică și simetrică

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}$$

este numită *hessiana lui f în punctul a* , (după numele matematicianului german O. Hesse, 1811-1874).

Observația 3.7. Fie $\alpha \in \mathbb{N}^*$ și $f \in C^p(A)$, $\alpha \leq p$. Diferențiala de ordin α se definește ca o “putere formală”, după modelul diferențialei de ordinul II, (v. (3.54)), astfel

$$d^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_d} dx_d \right)^\alpha f(a) \quad (3.55)$$

Dacă folosim formula următoare, care generalizează formula binomului a lui Newton,

$$(a_1 + \cdots + a_d)^\alpha = \sum_{\substack{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d = \alpha \\ 0 \leq \alpha_i \leq \alpha}} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \cdots \alpha_d!} a_1^{\alpha_1} \cdots a_d^{\alpha_d}$$

atunci diferențiala de ordin α se scrie, cf. (3.55)

$$d^\alpha f = \sum_{\substack{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d = \alpha \\ 0 \leq \alpha_i \leq \alpha}} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \cdots \alpha_d!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} dx_1^{\alpha_1} \cdots dx_d^{\alpha_d} \quad (3.56)$$

(dacă $\alpha_i = 0$ atunci nu se efectuează derivare în raport cu x_i).

Exemplul 3.7. 1. Fie $f(x, y) = e^{ax+by}$, $x, y \in \mathbb{R}$, a, b sunt constante reale date. Folosind (3.56) găsim cu ușurință

$$d^\alpha f = (a dx + b dy)^\alpha e^{ax+by}$$

2. Fie $f \in C^2(\mathbb{R})$, $u(x, y) = x^2 - x^2$, $v(x, y) = 2xy$. Punem $h(x, y) = f(u, v)$.

Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(2x \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= 2x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + 2y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) + 2 \frac{\partial f}{\partial v} \\ &= 2x \left(-2y \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right) + 2y \left(-2y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) + 2 \frac{\partial f}{\partial v} \\ &= 4xy \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right) + 4(x^2 - y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2 \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2x \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial f}{\partial v} \right), \text{ etc.}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-2y \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial f}{\partial v} \right), \text{ etc.}$$

3. Pentru a calcula

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}(x \sin y + e^y)$$

observăm că

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x \sin y + e^y) = \frac{\partial^3}{\partial y^3} \frac{\partial}{\partial x}(\sin y) = 0$$

Exercițiul 3.7. 1. Să se generalizeze exemplul 1 de mai sus pentru o funcție de d variabile.

2. Să se calculeze

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

dacă $f(x, y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ cu ϕ, ψ de clasă $C^2(\mathbb{R})$.

3. Să se determine o funcție $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ care să satisfacă ecuația

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x + y, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

4. Fie $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Expresia

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

se numește *laplacianul* lui f , (după numele lui P. Laplace, 1749-1827). Pentru funcții de două variabile laplacianul se definește de o manieră evidentă. Să se demonstreze că $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$.

5. Ecuația $\Delta f = 0$ se numește ecuația lui Laplace. Arătați că, dacă $w = f(u, v)$ verifică ecuația lui Laplace, atunci $h(x, y) = w\left(\frac{x^2 - y^2}{2}, xy\right)$ verifică aceeași ecuație.

6. Fie $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ și $u(x, y) = f(x - y) + g(x + y)$. Să se arate că u verifică ecuația

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$