8. 續向量

8.1 向量的點積（第四及以上學習階段）

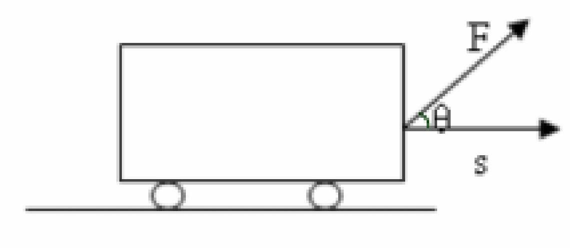
8.1.1 點積的概念

8.1.2 點積的運算

8.1.3 點積的應用

8.1.4 在三維空間上的點積

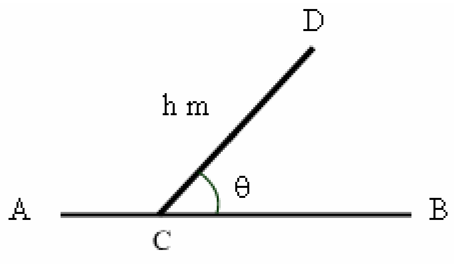
8.1.1 點積的概念



拉力 $\vec{F}$ 作用於車上，該車的位移是 $\vec{s}$，而 $\vec{F}$ 和 $\vec{s}$ 的夾角是θ（見上圖）。
那麼，所做的功 W 可以以下公式表示：
$W = Fs\cos\theta$。

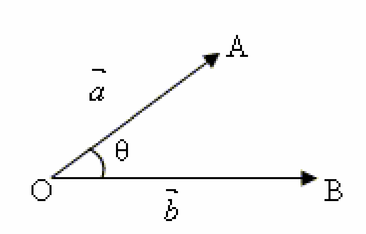
功率等於 $\vec{F}$ 在 $\vec{s}$ 方向所作的力乘以車子移動的距離。力所作的功率決定於力和位移兩個向量的大小和方向。

例 1



某木柱斜插在地上，其長度為 h m，而與地面的角度為 θ，那麼該木柱的影的長度為:
影長度 $= h\cos\theta$(m)。

在這個例子中，我們是要找出 CD 在 AB 上的投影。這類例子，與下面討論的向量點積有著密切的關係。



已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角是θ。

$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的點積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 定義為：

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

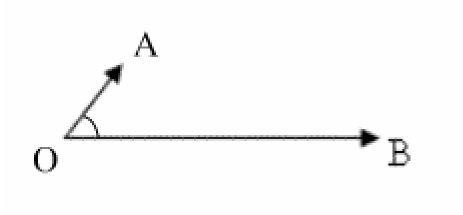
點積是向量積的一種。

要計算點積必須先清楚向量的夾角。

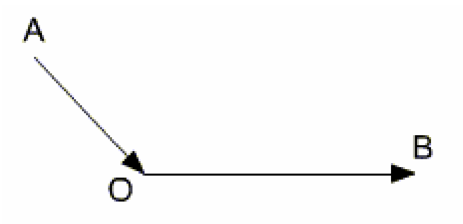
例 2

寫出下列各題中兩個向量的夾角。

1.

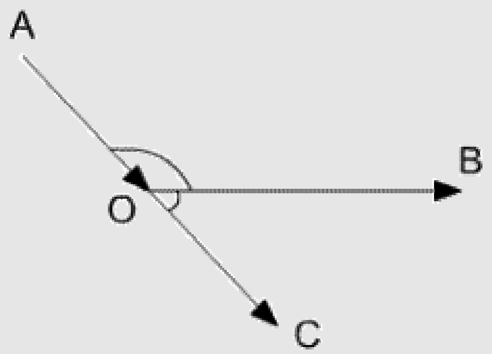


2.



答案

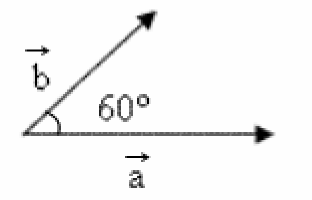
1. $\angle AOB$
2. 作 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}$
   $\angle BOC$（$=180°-\angle AOB$）



找向量的夾角時，先平移兩向量使它們有共同的起點，這時兩向量所形成的角 θ（$0°\le\theta\le180°$）就是它們的夾角。

例 3

已知 $|\vec{a}|=5$ 及 $|\vec{b}|=4$。$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角 θ 為 $60°$。求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$。



答案

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &= 5(4)\cos 60° \\ &= 10\end{aligned}$$

例 4

已知 $|\vec{a}|=2$ 及 $|\vec{b}|=3$。$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角 θ 為 $150°$。求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$。

（答案準確至 3 位有效數字）

答案

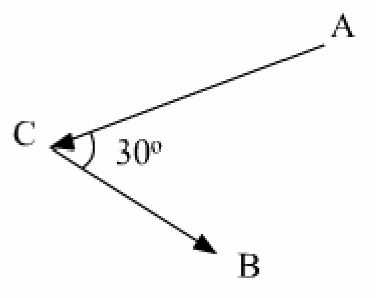
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &= 2(3)\cos 150° \\ &= -5.20\end{aligned}$$

設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是非零向量，其夾角為 θ。

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ 這是求向量夾角的主要方法。

例 5

在△ABC 中，已知 $|\overrightarrow{AC}| = 8$ 及 $|\overrightarrow{BC}| = 5$。



若 $\angle ACB = 30°$，求 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$。
若 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$，求 $\angle BCA$。

答案

1.
$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} \\ = & |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 150° \\ = & 8 \times 5 \times \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right) \\ = & -20\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AC}| \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{20}{8 \times 5} = 0.5$$

$\therefore \quad \angle BCA = 60°$

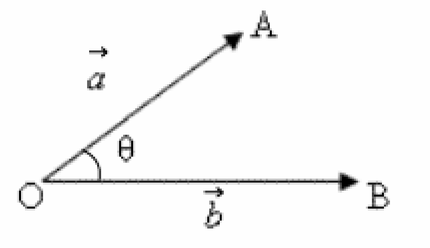
$|\vec{b}|\cos\theta$ 稱為向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影。

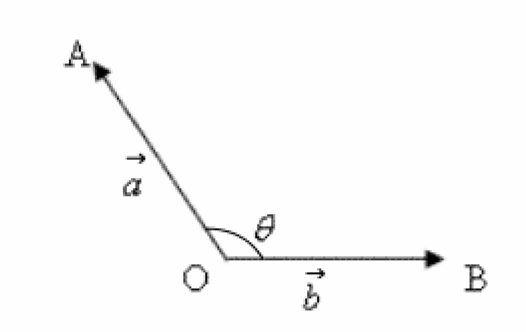
$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的幾何意義
點積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 等於 $\vec{a}$ 的長度 $|\vec{a}|$ 與 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影 $|\vec{b}|\cos\theta$ 的積。

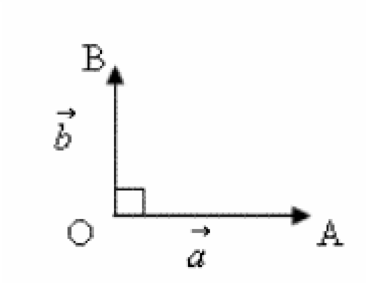
當 θ 為銳角時，$|\vec{b}|\cos\theta$ 的值是正值；

當 θ 為鈍角時，$|\vec{b}|\cos\theta$ 的值是負值；

當 $\theta = 90°$ 時，$|\vec{b}|\cos\theta$ 的值是 0。







例 6
已知 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影是 4 及 $|\vec{a}| = 5$。求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$。

答案

$$|\vec{b}|\cos\theta = 4$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &= 5(4) \\ &= 20\end{aligned}$$

例 7

已知 $\vec{a}\cdot\vec{b}=13$， $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影是 4。

1. 求向量 $\vec{b}$ 的大小。
2. 若 $|\vec{a}|=8$， 求向量的夾角。

答案

1. $|\vec{a}|\cos\theta=4$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=13$$

$$|\vec{b}|(4)=13$$

$$|\vec{b}|=\frac{13}{4}$$

2. $|\vec{a}|\cos\theta=4$

$$8\cos\theta=4$$

$$\theta=60^\circ$$

習題 8.1A

8.1.2 點積的運算

點積的性質

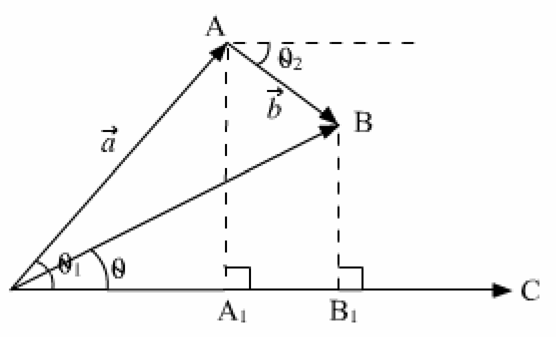
向量的點積與實數的積有很大分別，以下為點積的運算律：

若 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 為向量且 λ 為實數，則

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$
3. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

1, 2 兩點的証明可留作練習之用，我們嘗試証明第 3 點。

證明



因為 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cos\theta=OB_1=OA_1+A_1B_1=\left|\vec{a}\right|\cos\theta_1+\left|\vec{b}\right|\cos\theta_2$,

所以 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta+\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta$。

即 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

例 1

已知 $|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角是 $60°$。求 $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$。

答案

$$\begin{aligned}
&(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})\\
&=\vec{a}\cdot\vec{a}-3\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{a}-6\vec{b}\cdot\vec{b}\\
&=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2\\
&=|\vec{a}|^2-|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta-6|\vec{b}|^2\\
&=6^2-6\times 4\cos 60°-6\times 4^2\\
&=-72
\end{aligned}$$

設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是非零向量。

1. 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。
2. 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，則 $\vec{a}\perp\vec{b}$。

例 2

已知 $\vec{a}$ 與 $\vec{c}$ 及 $\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 互相垂直。証明 $\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 互相垂直。

答案

$\because$ $\vec{a}$ 與 $\vec{c}$ 及 $\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 互相垂直

$\therefore$ $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$\therefore$ $\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 互相垂直。

例 3

已知 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$。若 $\vec{a}+k\vec{b}$ 與 $\vec{a}-k\vec{b}$ 互相垂直，求 k。

答案

$\vec{a}+k\vec{b}$ 與 $\vec{a}-k\vec{b}$ 互相垂直。

$$\therefore \quad (\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}-k\vec{b})=0$$
$$(\vec{a}\cdot\vec{a})-k^2(\vec{b}\cdot\vec{b})=0$$
$$|\vec{a}|^2-k^2|\vec{b}|^2=0$$
$$9-16k^2=0$$
$$k=\pm\frac{3}{4}$$

答：當 $k=\pm\frac{3}{4}$，$\vec{a}+k\vec{b}$ 與 $\vec{a}-k\vec{b}$ 便互相垂直。

例 4

$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 是單位向量，其夾角為 45°。求 $(\vec{e_1}+\vec{e_2})\cdot(\vec{e_1}-3\vec{e_2})$。

答案

$$\begin{aligned}
&(\vec{e_1}+\vec{e_2})\cdot(\vec{e_1}-3\vec{e_2})\\
=\ &(\vec{e_1})\cdot(\vec{e_1})+(\vec{e_1})\cdot(-3\vec{e_2})+(\vec{e_2})\cdot(\vec{e_1})+(\vec{e_2})\cdot(-3\vec{e_2})\\
=\ &|\vec{e_1}|^2-2\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}-3|\vec{e_2}|^2\\
=\ &1-2\cos 45^\circ-3\\
=\ &-2-\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1、\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1、\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0 \text{ 及 } \vec{j}\cdot\vec{i}=0.$$

當 $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ 及 $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\right)\cdot\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}\right)\\&=x_1x_2\vec{i}\cdot\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j}+x_2y_1\vec{j}\cdot\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\cdot\vec{j}\\&=x_1x_2+y_1y_2\end{aligned}$$

即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$。

兩個向量的點積等於它們對應坐標的乘積的和。

例 5

已知 $\vec{a}=5\vec{i}+7\vec{j}$，$\vec{b}=-6\vec{i}-4\vec{j}$。求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$。

答案

$\vec{a}\cdot\vec{b}=5(-6)+(7)(-4)=-58$

例 6

已知 $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$，$\vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}$ 及 $\vec{c}=-\vec{i}-\vec{j}$。求以下各點積的數值。

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}$
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$
3. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

答案

1.

$$\begin{aligned}&\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=(2\vec{i}+3\vec{j})\cdot(-2\vec{i}+4\vec{j})\\&=2(-2)+3(4)\\&=-4+12\\&=8\end{aligned}$$

2.

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$
$$=[(2\vec{i}+3\vec{j})+(-2\vec{i}+4\vec{j})]\cdot[(2\vec{i}+3\vec{j})-(-2\vec{i}+4\vec{j})]$$
$$=(7\vec{j})\cdot(4\vec{i}-\vec{j})$$
$$=7(-1)$$
$$=-7$$

3.
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$$
$$=(2\vec{i}+3\vec{j})\cdot[(-2\vec{i}+4\vec{j})+(-\vec{i}-\vec{j})]$$
$$=(2\vec{i}+3\vec{j})\cdot(-3\vec{i}+3\vec{j})$$
$$=2(-3)+3(3)$$
$$=-6+9$$
$$=3$$

已知 $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$。

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}$$

即 $|\vec{a}|=\sqrt{(x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2})}$

例 7

求以下向量的大小

1. $3\vec{i}+4\vec{j}$
2. $-5\vec{i}+12\vec{j}$
3. $-2\vec{i}-2\vec{j}$

答案

1.
$$(3\vec{i}+4\vec{j})\cdot(3\vec{i}+4\vec{j})=3(3)+4(4)=25$$
$$\therefore |3\vec{i}+4\vec{j}|=5$$

2.
$$(-5\vec{i}+12\vec{j})(-5\vec{i}+12\vec{j})=(-5)(-5)+12(12)=169$$
$$\therefore |-5\vec{i}+12\vec{j}|=13$$

3.
$$(-2\vec{i}-2\vec{j})\cdot(-2\vec{i}-2\vec{j})=(-2)(-2)+(-2)(-2)=8$$
$$\therefore |-2\vec{i}-2\vec{j}|=2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}}$$

例 8

已知 $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$， $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$。求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角（準確至 1 位小數點）。

答案

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$= 5$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$
$$= 5$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\vec{i} + 4\vec{j})\cdot(-3\vec{i} + 4\vec{j})$$
$$= 3(-3) + 4(4)$$
$$= -9 + 16$$
$$= 7$$
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$
$$= \frac{7}{5\times 5}$$
$$= 0.28$$
$$\theta = 73.7^\circ$$

例 9

已知 $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ ， $\vec{b} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$。求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角。

答案

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{5}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 6^2}$$
$$= 3\sqrt{5}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{i} - \vec{j})\cdot(3\vec{i} + 6\vec{j})$$
$$= 2(3) - 1(6)$$
$$= 0$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$
$$= \frac{0}{\sqrt{5}(3\sqrt{5})}$$
$$= 0$$
$$\theta = 90^\circ$$

已知 $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ 及 $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

1. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$，則 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$。
2. 若 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$，則 $\vec{a} \perp \vec{b}$。

例 10

証明 $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$ 與 $\vec{b} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ 垂直。

答案

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{i} - 3\vec{j}).\ (6\vec{i} + 2\vec{j})$$
$$= 1(6) - 3(2)$$
$$= 6 - 6$$
$$= 0$$
$$\therefore \vec{a}\perp\vec{b}$$

例 11

已知 A = (1, 2)， B = (2, 3)， C = (–2, 5)。證明 ΔABC 是直角三角形。

答案

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= 2\vec{i} + 3\vec{j} - (\vec{i} + 2\vec{j})$$
$$= 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{i} - 2\vec{j}$$
$$= \vec{i} + \vec{j}$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$
$$= -2\vec{i} + 5\vec{j} - (\vec{i} + 2\vec{j})$$
$$= -2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{i} - 2\vec{j}$$
$$= -3\vec{i} + 3\vec{j}$$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (\vec{i}+\vec{j}).\ (-3\vec{i}+3\vec{j})$
$= 1(-3) + 1\,(3)$
$= 0$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$
$\therefore\ \Delta ABC$ 是直角三角形。

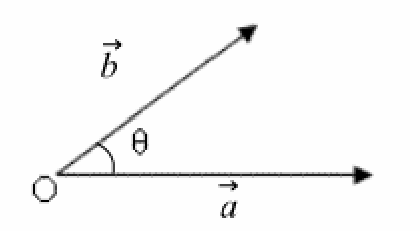
習題 8.1B

現在，總結一下在平面點積運算的特質。

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$|\vec{b}|\cos\theta$ 稱為向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影（projection of $\vec{b}$ on $\vec{a}$）



性質

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$
3. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$
4. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$
5. 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$。
6. 已知 $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$，$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$。

   $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

   $\vec{a}\cdot\vec{a} = x_1{}^2 + y_1{}^2$ 即 $|\vec{a}| = \sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2)}$

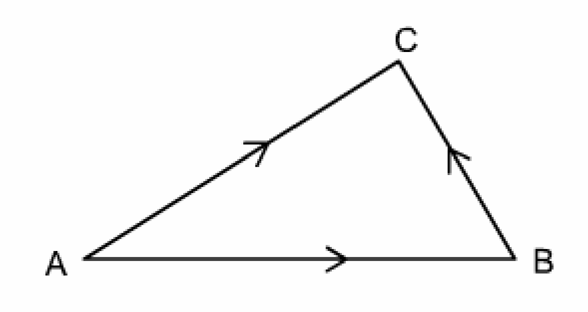
   $$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}\sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2}}$$
7. 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，則 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$。

8.1.3 點積的應用

例 1

已知 $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$， $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ 。

1. 證明 ΔABC 是直角的。
2. 求 ΔABC 的面積。



答案

1.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$
$$= (3\vec{i} + 4\vec{j}) - (4\vec{i} + 2\vec{j})$$
$$= -\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (4\vec{i} + 2\vec{j}).\ (-\vec{i} + 2\vec{j})$$
$$= 4(-1) + 2(2)$$
$$= 4 - 4$$
$$= 0$$

$\therefore \Delta ABC$ 是直角三角形。

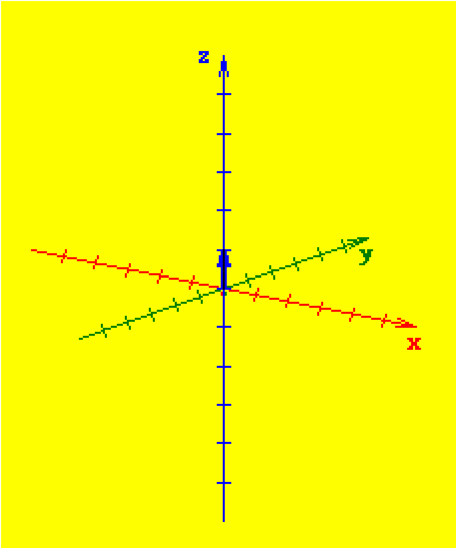
2.

面積

$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 2^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (2)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{20} \times \sqrt{5}$$
$$= 5$$

8.1.4 在三維空間上的點積

x 軸方向的單位向量為 $\vec{i}$，y 軸方向的單位向量為 $\vec{j}$，而 z 軸方向的單位向量為 $\vec{k}$（如下圖所示）。

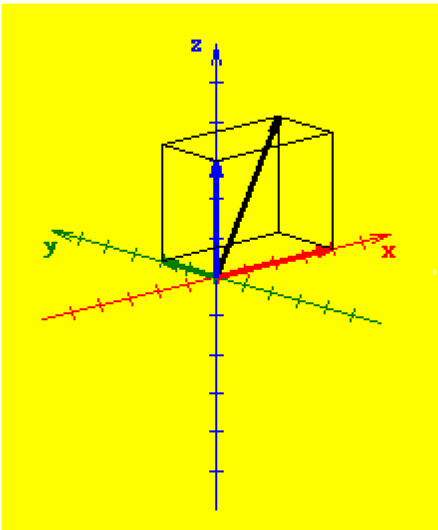


於是，三維空間的向量便可以 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 及 $\vec{k}$ 來表達。

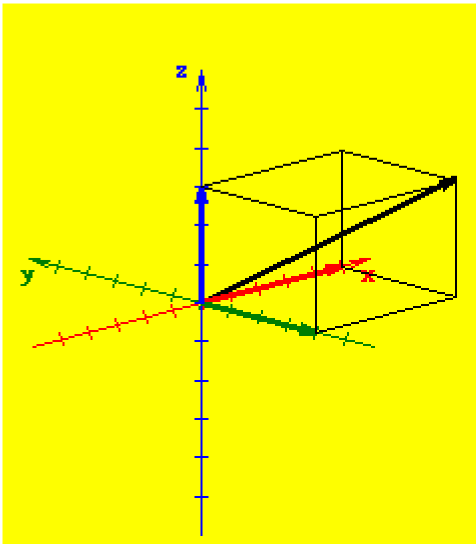
例 1

將圖中的黑色向量，以 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 及 $\vec{k}$ 來表達。

1.



2.



答案

1. $4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$
2. $5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{i}\cdot\vec{i}=1$， $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$， $\vec{k}\cdot\vec{k}=1$。
$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ 及 $\vec{j}\cdot\vec{i}=0$， $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$ 及 $\vec{k}\cdot\vec{j}=0$， $\vec{k}\cdot\vec{i}=0$ 及 $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$。

例 2

計算

1. $(4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})\cdot\vec{j}$
2. $(\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k})\cdot\vec{k}$
3. $\vec{i}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})$
4. $\vec{j}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k})$

答案

1.
$$\begin{aligned}&(4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})\cdot\vec{j}\\ &=4\vec{i}\cdot\vec{j}+3\vec{j}\cdot\vec{j}-\vec{k}\cdot\vec{j}\\ &=4(0)+3-0\\ &=3\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}&(\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k})\cdot\vec{k}\\ &=\vec{i}\cdot\vec{k}+3\vec{j}\cdot\vec{k}+2\vec{k}\cdot\vec{k}\\ &=0+3(0)+2\\ &=2\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}&\vec{i}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})\\ &=\vec{i}\cdot\vec{i}+2\vec{i}\cdot\vec{j}-\vec{i}\cdot\vec{k}\\ &=1+2(0)-0\\ &=1\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}&\vec{j}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k})\\ &=2\vec{j}\cdot\vec{i}-\vec{j}\cdot\vec{j}+4\vec{j}\cdot\vec{k}\\ &=2(0)-1+4(0)\\ &=-1\end{aligned}$$

若 $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ 及 $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$，
那麼， $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$。

例 3

已知 $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$。求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$。

答案

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}).\ (4\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k})\\ &= 1(4)+(-2)(5)+4(-2)\\ &= 4-10-8\\ &= -14\end{aligned}$$

例 4

已知 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=4\vec{i}+6\vec{j}+(m+2)\vec{k}$ 及 $\vec{a}\cdot\vec{b}=8$。求 m 的數值。

答案

$$(3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}).\ [4\vec{i}+6\vec{j}+(m+2)\vec{k}]=8$$
$$3(4)-1(6)-2(m+2)=8$$
$$12-6-2m-4=8$$
$$2-2m=8$$
$$2m=-6$$
$$m=-3$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

例 5

利用以上的結果，求：

1. $|3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}|$
2. $|-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}|$
3. $|-\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}|$

答案

1. $$\begin{aligned}&(3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}).\ (3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})\\ &= 3(3)+2(2)+1(1)\\ &= 9+4+1\\ &= 14\\ &\therefore\ |3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}|=\sqrt{14}\end{aligned}$$

2. $(-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}).\ (-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$
$= (-1)(-1)+1(1)+2(2)$
$= 1+1+4$
$= 6$
$\therefore\ \left|-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right| = \sqrt{6}$

3. $(-\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}).\ (-\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k})$
$= (-1)(-1)+(-3)(-3)+4(4)$
$= 1+9+16$
$= 26$
$\therefore\ \left|-\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\right| = \sqrt{26}$

習題 8.1C

已知 $\vec{a} = x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ 及 $\vec{b} = x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$，
若 θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角，則

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}}。$$

例 6

已知 $\vec{a} = 2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b} = \vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$。求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角。（準確至 3 位有效數字）

答案

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k})(\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})$
$= 2(1)+3(3)+1(-2)$
$= 2+9-2$
$= 9$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$
$$= \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$$

$$= \frac{9}{14}$$
$\theta = 50.0°$

設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是非零向量。
1. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$。
2. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$，則 $\vec{a} \perp \vec{b}$。

例 7
已知 $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$，$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$。証明 $\vec{a} \perp \vec{b}$。

答案

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k})(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})$
$= 4(1) + 3(2) + 5(-2)$
$= 4 + 6 - 10$
$= 0$
$\therefore \vec{a} \perp \vec{b}$

例 8
已知 $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + m\vec{k}$，$\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ 及 $\vec{a} \perp \vec{b}$。求 m 的數值。

答案

$\because$ $\vec{a} \perp \vec{b}$
$\therefore$ $(4\vec{i} + 3\vec{j} + m\vec{k}).\ (2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}) = 0$
$4(2) + 3(-4) + m(2) = 0$
$8 - 12 + 2m = 0$
$m = 2$

習題 8.1D

習題 8.1A

1. 已知 $|\vec{a}| = 6$ 、 $|\vec{b}| = 7$ 及向量的夾角 $= 45°$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 。

2. 已知 $|\vec{b}| = 5$ 及 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影爲 3.5，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 。

3. 已知 $\vec{a}\cdot\vec{b} = -15$ 、 $|\vec{a}| = 10$ 及 $|\vec{b}| = 6$ ，求向量的夾角。

4. 已知 $|\vec{a}| = 12$ 及 $|\vec{b}| = 9$ ，若 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 54$ ，求 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的夾角。

5. 已知 $|\vec{b}| = 3$ 及 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影爲 $0.5|\vec{b}|$ ，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 。

6. 已知 $|\vec{a}| = 6$ ，$\vec{e}$ 爲單位向量（unit vector），而它們之間的夾角等於 45°。求 $\vec{a}$ 在 $\vec{e}$ 上的投影。

答案

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 6(7)\cos45° = 21\sqrt{2}$（或 29.70）

2. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}|(\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影$) = 5(3.5) = 17.5$

3.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\therefore\ -15 = 10(6)\cos\theta$

$\cos\theta = -0.25$

$\theta = 104.5°$

4.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\therefore\ 54 = 12(9)\cos\theta$

$\cos\theta = 0.5$

$\theta = 60°$

5.

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影 $= 0.5|\vec{b}| = 0.5(3) = 1.5$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|(\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影$) = 3(1.5) = 4.5$

6.

$\vec{a}\cdot\vec{e} = |\vec{a}||\vec{e}|\cos\theta = |\vec{e}|$ ($\vec{a}$ 在 $\vec{e}$ 上的投影)

(6)(1)cos 45° = (1) ($\vec{a}$ 在 $\vec{e}$ 上的投影)

$\vec{a}$ 在 $\vec{e}$ 上的投影 $= 3\sqrt{2}$ （4.24）

習題 8.1B

1. $\vec{e_1}$ 、$\vec{e_2}$ 是單位向量，夾角爲 60°。求 $\left(2\vec{e_1}-\vec{e_2}\right)\cdot\left(-3\vec{e_1}+2\vec{e_2}\right)$。

2. $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$ 及 $\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=61$。求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角。

3. 已知 $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$，$\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$。求

   (1) $|\vec{a}|$。

   (2) $|\vec{b}|$。

   (3) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角。

4. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$，$\vec{b} = (x-1)\vec{i} + (3x-2)\vec{j}$ 及 $\vec{b} \perp \vec{a}$。求 x。

5. 在直角三角形 ABC 中，$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$，$\overrightarrow{AC} = \vec{i} + m\vec{j}$ 及 $\angle A = 90°$。求 m 的值。

答案

1) 因爲 $\vec{e_1}$ 、$\vec{e_2}$ 是單位向量, 所以 $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1$

$(2\vec{e_1} - \vec{e_2})\cdot(-3\vec{e_1} + 2\vec{e_2})$

$= \left(2\vec{e_1}\right)\cdot\left(-3\vec{e_1}\right)+\left(-\vec{e_2}\right)\cdot\left(-3\vec{e_1}\right)+\left(2\vec{e_1}\right)\cdot\left(2\vec{e_2}\right)+\left(-\vec{e_2}\right)\cdot\left(2\vec{e_2}\right)$

$= -6|\vec{e_1}|^2 + 3|\vec{e_1}||\vec{e_2}|\cos 60^\circ + 4|\vec{e_1}||\vec{e_2}|\cos 60^\circ - 2|\vec{e_2}|^2$

$= -6 + 7\cos 60^\circ - 2$

$= -\dfrac{9}{2}$

2) 設 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 的夾角爲 θ 。

$(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 61$

$(2\vec{a}) \cdot (2\vec{a}) - (3\vec{b}) \cdot (2\vec{a}) + (2\vec{a}) \cdot (\vec{b}) - (3\vec{b}) \cdot (\vec{b}) = 61$

$4|\vec{a}|^2 - 6|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta - 3|\vec{b}|^2 = 61$

$4(4)^2 - 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta - 3(3)^2 = 61$

$64 - 4(3)(4)\cos\theta - 27 = 61$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

$\theta = 120^{\circ}$

3) (1) $|\vec{a}|^2 = |2\vec{i} - 3\vec{j}|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$

$|\vec{a}| = \sqrt{13}$

(2) $|\vec{b}|^2 = |4\vec{i} + 5\vec{j}|^2 = 4^2 + 5^2 = 41$

$|\vec{b}| = \sqrt{41}$

(3) 設 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 的夾角爲 θ 。

$\cos\theta$

$= \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$= \dfrac{(2)(4) + (-3)(5)}{\sqrt{13}\sqrt{41}}$

$= -0.303$

$\therefore \theta = 107.7^{\circ}$

4)

因爲 $\vec{b} \perp \vec{a}$, 所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$(3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot [(x-1)\vec{i} + (3x-2)\vec{j}] = 0$

$3(x-1) + 4(3x-2) = 0$

$3x - 3 + 12x - 8 = 0$

$\therefore \quad x = \dfrac{11}{15}$

5)

因爲 $\angle A = 90°$，所以 $AB \perp AC$。

$(2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (\vec{i} + m\vec{j}) = 0$

$2 + 3m = 0$

$\therefore \quad m = -\dfrac{2}{3}$

習題 8.1C

1. 求以下向量的點積。

(1) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ 及 $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$。

(2) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ 及 $\vec{b} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$。

(3) $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ 及 $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$。

(4) $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ 及 $\vec{b} = 7\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$。

(5) $\vec{a} = 9\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ 及 $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$。

2. 求以下向量的大小。

(1) $2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

(2) $\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$

(3) $2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

(4) $4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

(5) $4\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$

答案

1)

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= (2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k})$

$= 2(1) + 1(-3) + 4(2)$
$= 7$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot (6\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})$

$= 1(6) + 2(2) + 1(-2)$
$= 8$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= (3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k})$

$= (3)(1) + (-1)(5) + 2(3)$
$= 4$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= (\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (7\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k})$

$= 1(7) + 4(1) + 4(-4)$
$= -5$

(5) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= (9\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}) \cdot (-3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k})$

$= 9(-3) + 5(2) + 1(7)$
$= -10$

2)

(1) $|2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}|=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3$

(2) $|\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}|=\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}=\sqrt{30}$

(3) $|2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}|=\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$

(4) $|4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}|=\sqrt{4^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

(5) $|4\vec{i}+7\vec{j}-4\vec{k}|=\sqrt{4^2+7^2+(-4)^2}=9$

習題 8.1D

1. 已知 $\vec{a}=\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$ 及 $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$。求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角。（準確至 3 位有效數字）
2. 已知 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ 及 $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$。求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角。（準確至 3 位有效數字）
3. 已知 $\vec{a}=5\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ 及 $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$。証明 $\vec{a}\perp\vec{b}$。
4. 已知 $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ 及 $\vec{b}=-2\vec{i}+m\vec{j}+7\vec{k}$ 及 $\vec{a}\perp\vec{b}$。求 m 的數值。
5. 已知 $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ 及 $\vec{b}=7\vec{i}+(m-2)\vec{j}+6\vec{k}$ 及 $\vec{a}\perp\vec{b}$。求 m 的數值。

答案

1.

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{59}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{38}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}) = 1(1) + (7)(1) + 3(-6) = -10$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$-10 = (\sqrt{59})(\sqrt{38})\cos\theta$$

$$\theta = 102^\circ$$

2.

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (-2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = 3(-2) + (-1)(1) + 4(3) = 5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$5 = (\sqrt{26})(\sqrt{14})\cos\theta$$

$$\theta = 74.8^\circ$$

3.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}) = 5(2) + 2(1) + 3(-4) = 0$$

$$\therefore\ \vec{a} \perp \vec{b}$$

4.

$$\because\ \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$(\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (-2\vec{i} + m\vec{j} + 7\vec{k}) = 0$

$1(-2) + (-3)m + 2(7) = 0$
$12 - 3m = 0$
$m = 4$

5.

$\because\ \vec{a} \perp \vec{b}$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$(3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}) \cdot [7\vec{i} + (m - 2)\vec{j} + 6\vec{k}] = 0$

$3(7) + 1(m - 2) + (-4)(6) = 0$
$21 + m - 2 - 24 = 0$
$m = 5$