7. 向量

7.2 向量的加、減與純量積（第四學習階段）

7.2.1 向量的加法

7.2.2 向量的減法

7.2.3 純量積

7.2.4 向量的分解

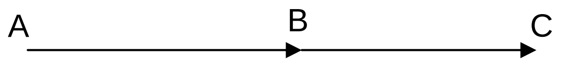
7.2.5 直角坐標系的向量運算

7.2.1 向量的加法

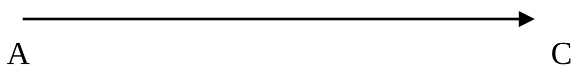
數值可以進行加減運算；同樣地，向量也可進行加減運算。要認識加減的運算，先看下面的實際問題。

生活實例 1

如下圖，若某人從 A 地到 B 地，再按原來的方向從 B 地到 C 地：



那麼由 A 到 C 便可表示爲：



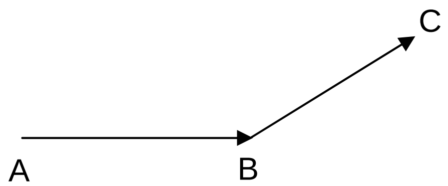
可以寫成爲兩個向量的相加：

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

生活實例 2

若一飛機從 A 地到 B 地，再改變方向從 B 地到 C 地，那麼由 A 地飛到 C 地，可表達成：

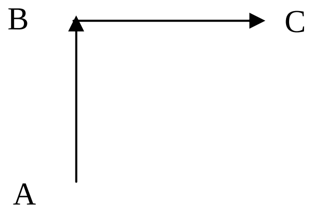
$\overrightarrow{AC}$



而，$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 。

生活實例 3

船的速度是 $\overrightarrow{AB}$ ，水流的速度是 $\overrightarrow{BC}$ ，那麼船實際航行的速度是多少？

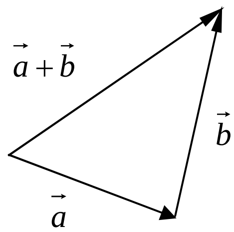


答案

船實際航行的速度 = $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

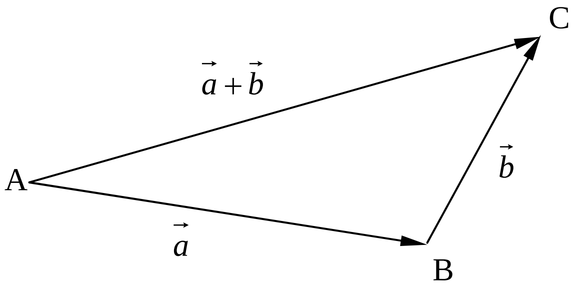
加法的三角形法則

已知向量 $\vec{a}$ 及向量 $\vec{b}$，則向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的和，稱爲 $\vec{a}+\vec{b}$。



這種求向量和的方法稱爲「三角形法則」。
將 $\vec{b}$ 的起點平移到 $\vec{a}$ 的終點，那麼由 $\vec{a}$ 的起點到 $\vec{b}$ 的終點，所形成的向量就是 $\vec{a}+\vec{b}$。

在平面內任取一點 A，作 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，則 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$。

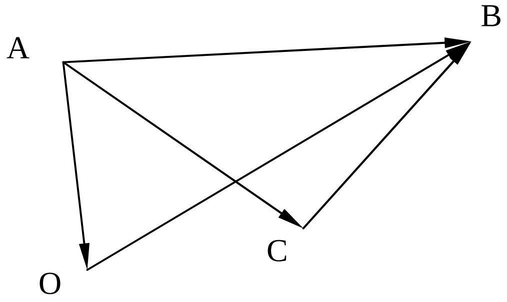


例 1

化簡

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ 。

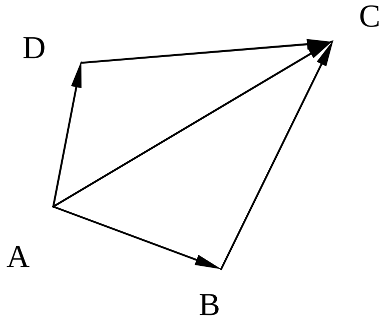
$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ 。



答案

1. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$

例 2



化簡

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ 。
2. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ 。

答案

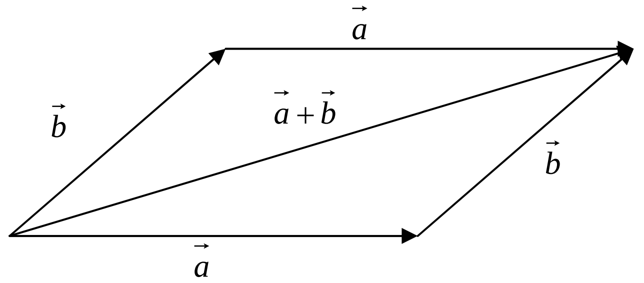
1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$

習題 7.2A

加法的平行四邊形法則

除了三角形法則外，還可以應用平行四邊形法則。

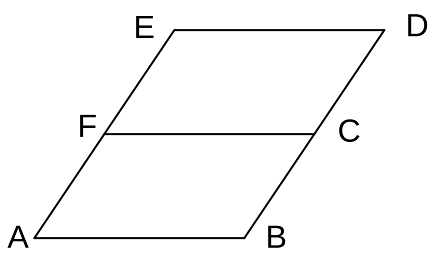
以 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 作邊畫出一個平行四邊形，那麼，這平行四邊形的對角線就是 $\vec{a}+\vec{b}$。這個求和的法則稱爲「加法的平行四邊形法則」。



例 3

ABDE 爲平行四邊形，C 及 F 分別是 BD 及 AE 的中點。簡化以下運算：

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$
2. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$
3. $\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FE}$
4. $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DB}$



答案

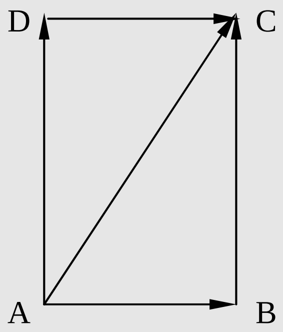
1. $\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AD}$
3. $\overrightarrow{FD}$
4. $\overrightarrow{DA}$

例 4

一艘船以 $2\sqrt{3}$ km/h 的速率向垂直於對岸的方向行駛，水流的速率爲 2 km/h，求船實際航行的速率與方向。

答案

設 $\overrightarrow{AD}$ 爲船的速度，而 $\overrightarrow{AB}$ 爲水流的速度。
以 AD 及 AB 爲平行四邊形的邊：



船的實際航行速度 $=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
在直角三角形 ABC 中：

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2$ km/h

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = 2\sqrt{3}$ km/h

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}$$
$$= \sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= 4$$

$$\because \tan\angle CAB = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$
$$\therefore \angle CAB = 60^\circ$$

所以，船實際航行的速率是 4 km/h 及與水流的夾角是 60°。

交換律與結合律

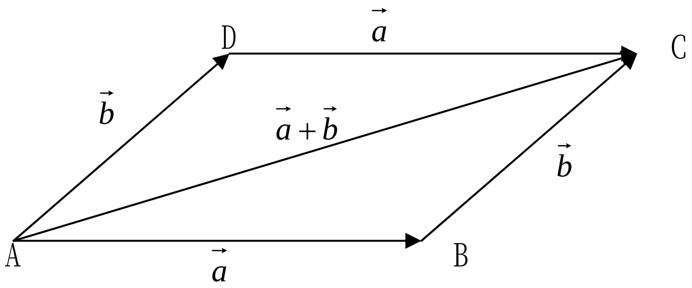
交換律

若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ；則 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ， $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$ 。

$\because\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$

$\quad\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}$ 。

$\therefore\ \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ 。

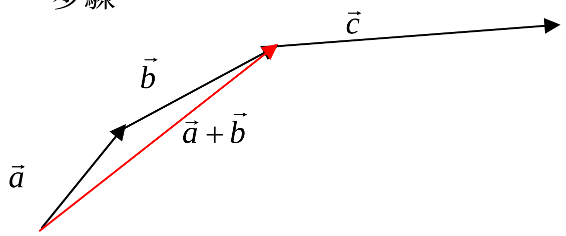


$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ 稱爲「交換律」。

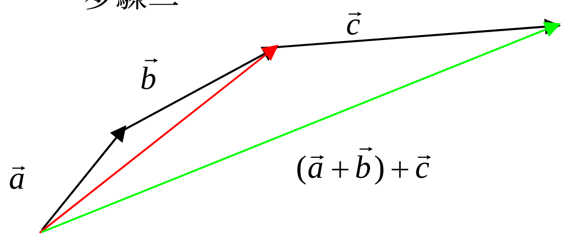
結合律

運算 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ ，如下圖：

步驟一

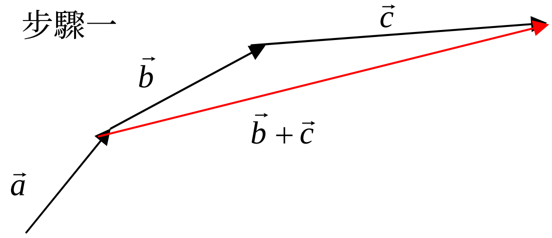


步驟二

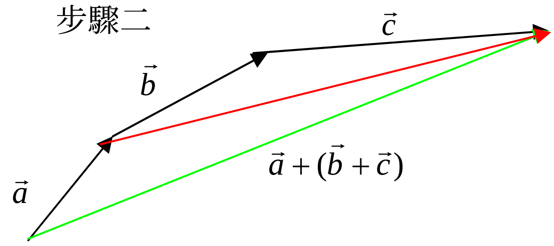


再運算 $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$，如下圖：

步驟一



步驟二

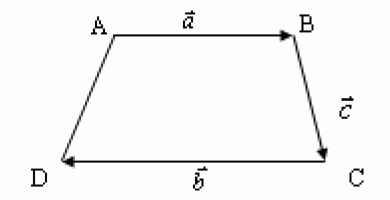


從以上得出：

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ 稱爲「結合律」。

例 5

求 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 。



答案

$$
\begin{aligned}
& \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \\
= \; & \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \\
= \; & \vec{a}+(\vec{c}+\vec{b}) \\
= \; & (\vec{a}+\vec{c})+\vec{b} \\
= \; & \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} \\
= \; & \overrightarrow{AD}
\end{aligned}
$$

例 6

簡化 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BC}$ 。

答案

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BC} \\
= \; & \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}) \\
= \; & \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE} \\
= \; & \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}) \\
= \; & \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF} \\
= \; & \overrightarrow{AF}
\end{aligned}
$$

習題 7.2B

7.2.2 向量的減法

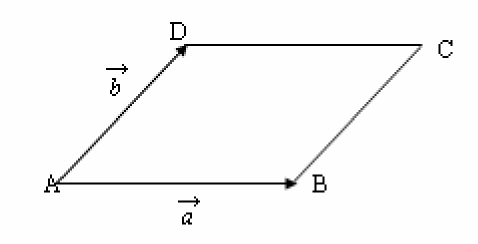
相反向量

定義

與 $\vec{a}$ 大小相等，方向相反的向量，稱爲 $\vec{a}$ 的相反向量，記作 $-\vec{a}$ 。

例 1

平行四邊形 ABCD， $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ 及 $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ，判斷下列是否正確。



1. $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$
2. $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$
3. $\overrightarrow{CD}=-\vec{a}$
4. $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$

答案

1. $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$ 正確
2. $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ 不正確（ $\overrightarrow{CB}=-\vec{b}$ ）
3. $\overrightarrow{CD}=-\vec{a}$ 正確
4. $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ 正確

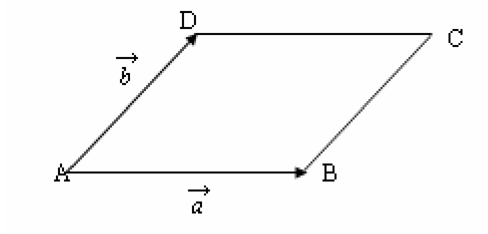
性質

(1) $-\left(-\vec{a}\right)=\vec{a}$

(2) $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(-\vec{a}\right)+\vec{a}=\vec{0}$

例 2

平行四邊形 ABCD，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ 及 $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示以下答案：



1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$
2. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}$

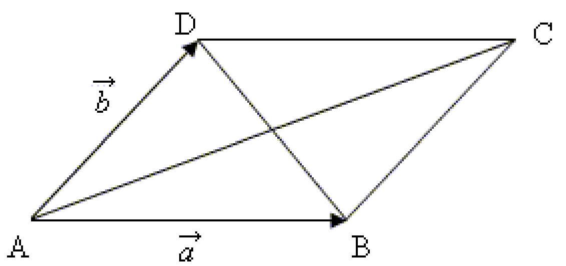
答案

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$
$= \vec{a}+\left(-\vec{a}\right)$
$= \vec{0}$

2. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}$
$= -\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)+\vec{a}$
$= -\vec{b}$

例 3

平行四邊形 ABCD，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ 及 $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{CA}$ 及 $\overrightarrow{BD}$。



答案

由平行四邊形法則得：

$\because\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$

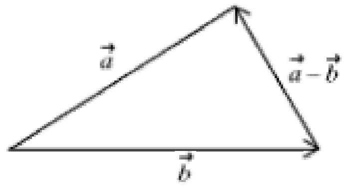
$\therefore\ \overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-(\vec{a}+\vec{b})$

$\because\ \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$

$\therefore\ \overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{DB}=-(\vec{a}-\vec{b})$

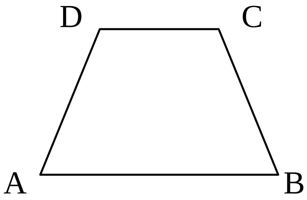
減法

向量 $\vec{a}$ 加上 $\vec{b}$ 的相反向量，稱爲 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的差，即 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$。



例 4

參照給定圖形，簡化
1. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ 。
2. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$ 。



答案

1.
$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD} \\ = & \overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AD}) \\ = & \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA} \\ = & \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB} \\ = & \overrightarrow{DB} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD} \\ = & \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+(-\overrightarrow{CD}) \\ = & \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC} \\ = & \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB} \\ = & \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} \\ = & \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

例 5

簡化以下各題。

1. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}$ 。
2. $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CO}$ 。

答案

1.
$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB} \\
= \; & \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}+\left(-\overrightarrow{OB}\right) \\
= \; & \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BO} \\
= \; & \vec{0}
\end{aligned}
$$

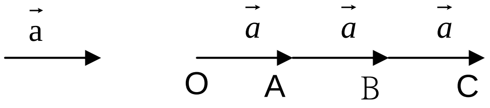
2.
$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CO} \\
= \; & \overrightarrow{OB}+\left(-\overrightarrow{OA}\right)-\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CO}\right) \\
= \; & \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}-\vec{0} \\
= \; & \overrightarrow{AB}
\end{aligned}
$$

習題 7.2C

7.2.3 純量積

純量積的運算

若$\vec{a}$是向量（$\vec{a} \neq \vec{0}$），那麼 $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ 的值是甚麼？

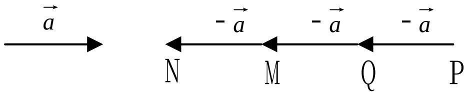


$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$

$\overrightarrow{OC}$的方向與$\vec{a}$的方向相同，而大小是$\vec{a}$的 3 倍。

因此，$\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ 記作 $3\vec{a}$ 。

同樣地，$(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$ 又是甚麼？



$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MN} = (-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$

$(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$ 記作$3(-\vec{a}) = -3\vec{a}$，
則$\overrightarrow{PN} = -3\vec{a}$ 。

$-3\vec{a}$的方向與$\vec{a}$的方向相反，而$-3\vec{a}$的大小是$\vec{a}$的 3 倍。

即$|-3\vec{a}| = 3|\vec{a}|$ 。

定義

實數 λ 與向量$\vec{a}$的積是一個向量，記作 $\lambda\vec{a}$，而

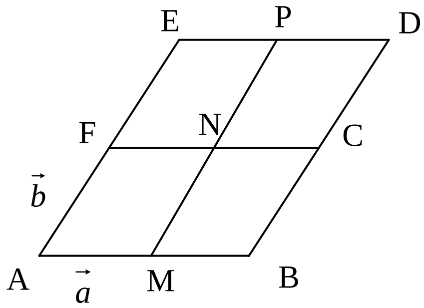
(1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$

(2) 當$\lambda > 0$，$\lambda\vec{a}$的方向與$\vec{a}$相同；
當$\lambda < 0$，$\lambda\vec{a}$的方向與$\vec{a}$相反；
當$\lambda = 0$，$\lambda\vec{a} = \vec{0}$ 。

例 1

平行四邊形 ABDE，F、M、C 及 P 分別是 AE、AB、BD 及 DE 的中點，$\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ 及 $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$。以 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 表示以下向量。

1. $\overrightarrow{AN}$
2. $\overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{BF}$
4. $\overrightarrow{DF}$



答案

1. $\overrightarrow{AN}$

$= \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}$

$= \vec{a}+\vec{b}$

2. $\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$= 2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}$

$= 2\vec{a}+\vec{b}$

3. $\overrightarrow{BF}$

$= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$

$= -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$

$= -2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AF}$

$= -2\vec{a}+\vec{b}$

4. $\overrightarrow{DF}$

$= \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$

$= \overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BA}$

$= -\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}$

$= -\vec{b}-2\vec{a}$

兩個向量只要方向及大小相同，便是「相等向量」，並不需要理會其起始點，所以在例子第 4 部份中，「$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FA}$」。所有只著重方向及大小，而不理會起始點的向量，均稱爲「自由向量」(free vector)。

性質

$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a})$

$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

λ、μ爲實數。

例 2

化簡下列各式。

1. $-3 \times (4\vec{a})$
2. $3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a}$
3. $(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}) - (3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$

答案

1. $-3 \times (4\vec{a}) = (-3 \times 4)\vec{a} = -12\vec{a}$

2.
$$\begin{aligned} & 3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} \\ = {} & 3\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{a} \\ = {} & 3\vec{a} - 2\vec{a} - \vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{b} \\ = {} & (3 - 2 - 1)\vec{a} + (3 + 2)\vec{b} \\ = {} & 5\vec{b} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} & (2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}) - (3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) \\ = {} & 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} - 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} \\ = {} & 2\vec{a} - 3\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{b} - \vec{c} - \vec{c} \\ = {} & (2 - 3)\vec{a} + (3 + 2)\vec{b} - (1 + 1)\vec{c} \\ = {} & -\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{c} \end{aligned}$$

習題 7.2D

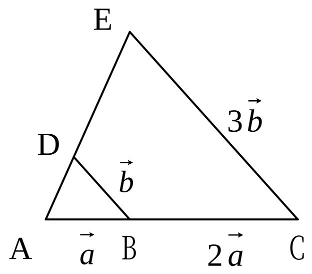
三點共線的條件

若有一個實數 λ，使 $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$ （$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$）
那麼，點 A、B 及 C 是共線。

另一方面，
已知 A、B 與 C 是共線，
那麼，便可找到 λ 以使 $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$ 。

例 3

在直線 ABC 上，BC = 2AB，$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ，$\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ 及 $\overrightarrow{CE} = 3\vec{b}$ 。A、D 及 E 是否共線？

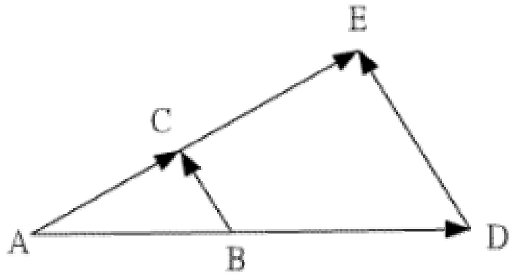


答案

$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
$= \vec{a} + 2\vec{a}$
$= 3\vec{a}$
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$
$= 3\vec{a} + 3\vec{b}$
$= 3(\vec{a} + \vec{b})$
$= 3\overrightarrow{AD}$
∴ A、D 及 E 是共線。

例 4

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{BC}$ 。證明 A、C 及 E 是共線。

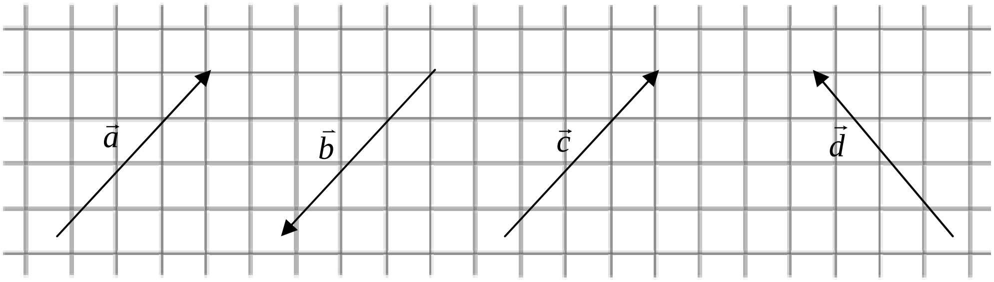


答案

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$
$= 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$
$= 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$
$= 3\overrightarrow{AC}$
∴A、C 與 E 是共線。

相等向量

例 5



以上那一對向量是相等的？

答案

$\vec{a} = \vec{c}$
當兩個向量其方向及大小都相等，那麼這兩個向量便是相等。所以，$\vec{a}$ 與 $\vec{c}$ 是相等的。

例 6

求 k 的值。

1. $3\vec{a} = k\vec{a}$
2. $(3k-2)\vec{b} = (6+k)\vec{b}$

答案

1. $3\vec{a} = k\vec{a}$
$3\vec{a} - k\vec{a} = \vec{0}$
$(3-k)\vec{a} = \vec{0}$
$3 - k = 0$
$k = 3$

2. $(3k-2)\vec{b}=(6+k)\vec{b}$
$3k-2=6+k$
$3k-k=6+2$
$2k=8$
$k=4$

若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 不平行及 $\vec{a}=\vec{b}$ ，
則 $\vec{a}=\vec{b}=\vec{0}$ 。
即若兩個不平行向量相等，這向量是零向量。

例 7

若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 是不平行向量， $4\vec{a}+(m-2)\vec{b}=(n+1)\vec{a}-3\vec{b}$ ，求 m 及 n 的數值。

答案

$4\vec{a}+(m-2)\vec{b}=(n+1)\vec{a}-3\vec{b}$
$4\vec{a}-(n+1)\vec{a}=-(m-2)\vec{b}-3\vec{b}$
$(4-(n+1))\vec{a}=((2-m)-3)\vec{b}$
$\because$ $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 是不平行向量
$\therefore$ $4-(n+1)=0$ 及 $(2-m)-3=0$
$4=n+1$ 及 $2-m=3$
$n=3$ 及 $m=-1$

例 8

1. 設 $\vec{e_1}$ 及 $\vec{e_2}$ 爲兩個不平行的向量， $\overrightarrow{AB}=2\vec{e_1}+k\vec{e_2}$ ， $\overrightarrow{CB}=\vec{e_1}+3\vec{e_2}$ 及 $\overrightarrow{CD}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}$ 。若 A、B、D 三點共線，求 k 的數值。

答案

$\because$ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$
$=(2\vec{e_1}-\vec{e_2})-(\vec{e_1}+3\vec{e_2})$
$=\vec{e_1}-4\vec{e_2}$
$\because$ A、B、D 三點共線。
$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BD}$ 共線。

設 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BD}$ 。

$2\overrightarrow{e_1} + k\overrightarrow{e_2} = \lambda\overrightarrow{e_1} - 4\lambda\overrightarrow{e_2}$

$$\therefore \quad \begin{cases} 2 = \lambda \\ k = -4\lambda \end{cases}$$

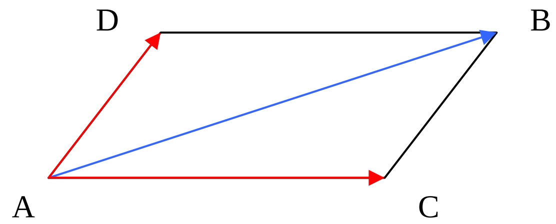
$$k = -8$$

當 A、B、D 共線時，k 的值爲 -8。

習題 7.2E

7.2.4 向量的分解

已知 ABCD 為平行四邊形。



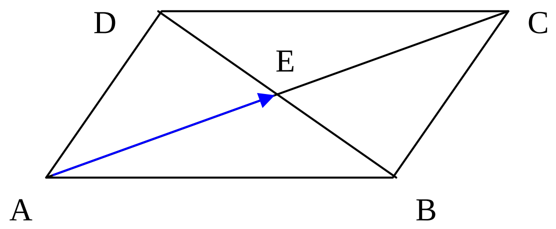
根據加法的平行四邊形法則：

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ 。

將一個向量寫成為兩個向量的總和，這個過程稱為「向量的分解」。在以上例子中，$\overrightarrow{AB}$ 可分解為 $\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{AD}$ 。

例 1

已知平行四邊形 ABCD，E 為 AC 的中點，將向量 $\overrightarrow{AE}$ 分解。



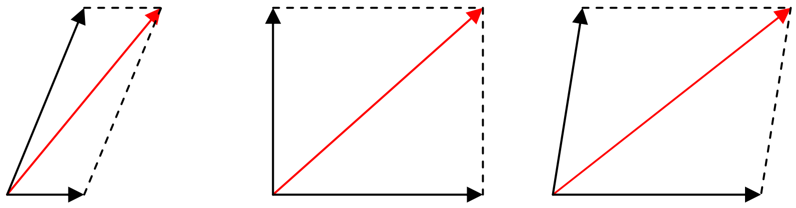
答案

根據圖中的資料，向量 $\overrightarrow{AE}$ 可以分解為：

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$$

一般來說，每個向量可以有無限種分解。如下圖，紅色的向量可以分解成為不同黑色向量的和。

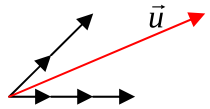


另外，可以將向量分解成為兩個向量倍數的相加，如：$\vec{u}=m\vec{a}+n\vec{b}$。

例 2

將圖中向量以 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 為分量作分解。

圖 1



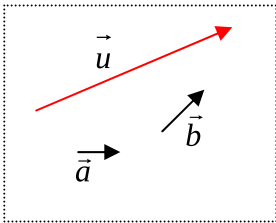
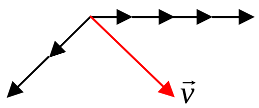


圖 2



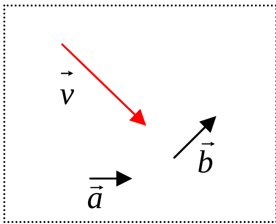
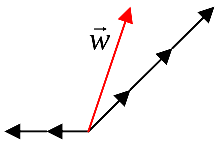
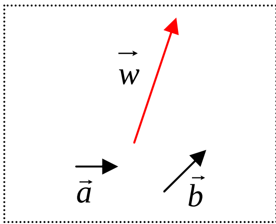


圖 3





答案

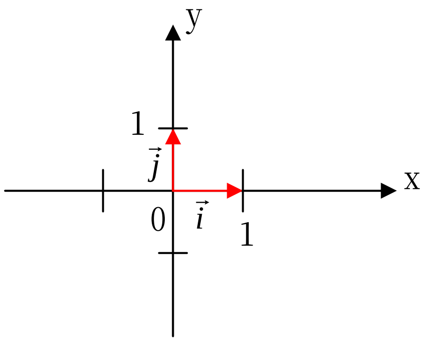
$\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}$
$\vec{v}=4\vec{a}-2\vec{b}$
$\vec{w}=-2\vec{a}+3\vec{b}$

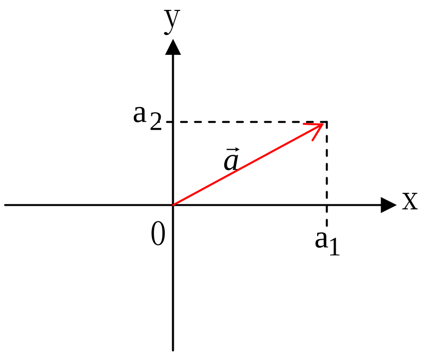
7.2.5 直角坐標系的向量運算

平面向量的坐標表示

在直角坐標系中，以 $\vec{i}$ 及 $\vec{j}$ 表示以 x 軸與 y 軸方向的單位向量。

$\vec{i}$ 及 $\vec{j}$ 的大小分別爲 1，所以它們又稱爲「基本單位向量（Unit Base Vector）」。





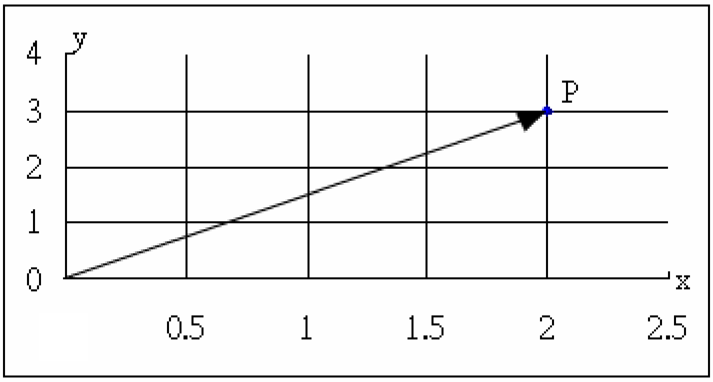
那麼，向量 $\vec{a}$ 可以寫成爲：

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ 。

在表示向量時，除了在字母上方加上「→」，如：$\vec{a}$；還可以將字母以粗黑色表示，如：**a**。

位置向量

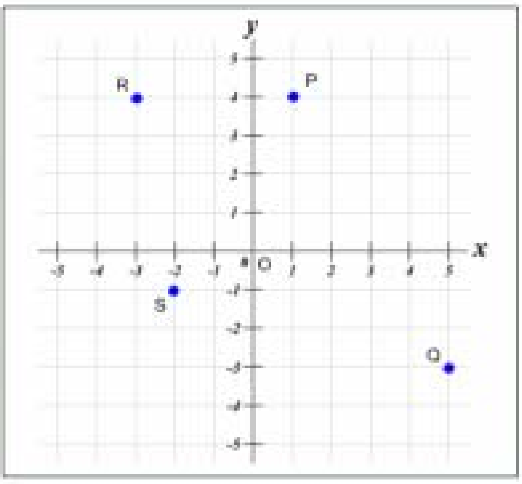
P 在直角坐標的位置是（2,3），$\overrightarrow{OP}$ 稱爲 P 的「位置向量」。



$\overrightarrow{OP} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ 。

例 1

寫出 P、Q、R 及 S 的位置向量。



答案

$\overrightarrow{OP} = \vec{i} + 4\vec{j}$

$\overrightarrow{OQ} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$

$\overrightarrow{OR} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$

$\overrightarrow{OS} = -2\vec{i} - \vec{j}$

例 2

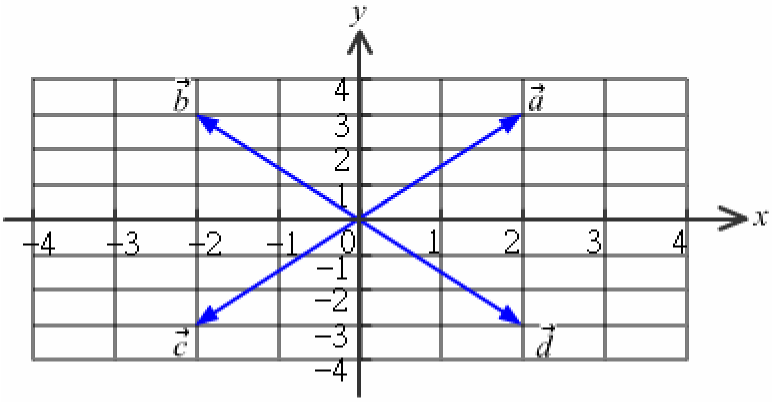
已知 A(0, 4)、B(−3, 6)及 C(4, 5)，寫出這三點的位置向量。

答案

$\overrightarrow{OA} = 4\vec{j}$ ；$\overrightarrow{OB} = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ ； $\overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$

例 3

將向量 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 及 $\vec{d}$ 以 $\vec{i}$ 及 $\vec{j}$ 表示。



答案

$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

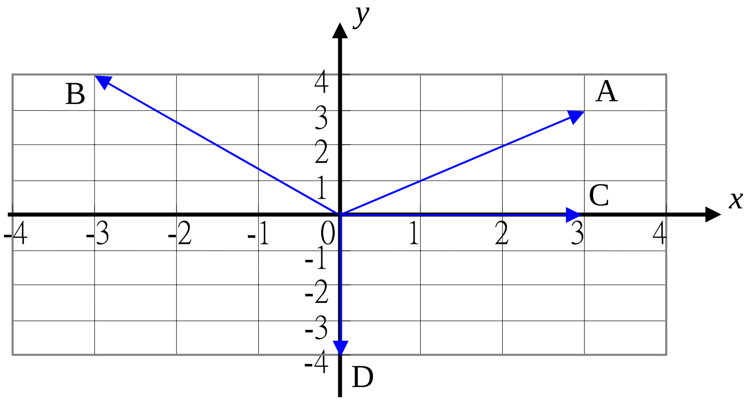
$\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

$\vec{c} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$

$\vec{d} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

例 4

以 $\vec{i}$ 及 $\vec{j}$ 表示圖中的向量。



答案

$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ ，$\overrightarrow{OB} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ ，$\overrightarrow{OC} = 3\vec{i}$ 及 $\overrightarrow{OD} = -4\vec{j}$ 。

平面向量的坐標運算

加法和減法

已知 $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ 及 $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$

$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}$

例 5

已知$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ 及$\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ 。求$\vec{a} + \vec{b}$ ，$\vec{a} - \vec{b}$ 。

答案

$\vec{a} + \vec{b}$
$= 2\vec{i} + \vec{j} + (-3\vec{i} + 4\vec{j})$
$= 2\vec{i} - 3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{j}$
$= -\vec{i} + 5\vec{j}$

$\vec{a} - \vec{b}$
$= 2\vec{i} + \vec{j} - (-3\vec{i} + 4\vec{j})$
$= 2\vec{i} + 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{j}$
$= 5\vec{i} - 3\vec{j}$

例 6

已知 A(2, 3)、B(4, 5)、C(0, 2)及 D(–1, –3)。求$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{CD}$ 。

答案

$\overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
$= (4\vec{i} + 5\vec{j}) - (2\vec{i} + 3\vec{j})$
$= 4\vec{i} - 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{j}$
$= 2\vec{i} + 2\vec{j}$

$\overrightarrow{CD}$
$= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$
$= (-\vec{i} - 3\vec{j}) - (2\vec{j})$
$= -\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{j}$
$= -\vec{i} - 5\vec{j}$

相等向量

已知$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$，$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$。
若$\vec{a} = \vec{b}$，
則$x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$。

例 7

$4\vec{i} + (m - 2)\vec{j} = (n + 2)\vec{i} + 6\vec{j}$。求 m 與 n。

答案

$4\vec{i} + (m - 2)\vec{j} = (n + 2)\vec{i} + 6\vec{j}$
$4 = n + 2$
$n = 4 - 2$
$n = 2$

$m - 2 = 6$
$m = 6 + 2$
$m = 8$

$\therefore m = 8$，$n = 2$。

例 8

已知平行四邊形 ABCD 的三個頂點 A、B 及 C 的坐標分別爲 $(-2, 1)$、$(-1, 3)$ 及 $(3, 4)$。求頂點 D 的坐標。

答案

設頂點 D 的坐標爲 (x, y)。
$\because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 3\vec{j} - (-2\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j}$
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - (x\vec{i} + y\vec{j}) = (3 - x)\vec{i} + (4 - y)\vec{j}$
而且 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
$\vec{i} + 2\vec{j} = (3 - x)\vec{i} + (4 - y)\vec{j}$
$1 = 3 - x$
$x = 2$

$2 = 4 - y$
$y = 2$

$\therefore$ D 點坐標爲 $(2, 2)$。

習題 7.2F

純量積

已知$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$。

$\lambda\vec{a} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j}) = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}$，$\lambda$ 爲實數。

例 9

簡化

1. $3(2\vec{i} - \vec{j}) + 4(\vec{i} + 2\vec{j})$
2. $2(\vec{i} + \vec{j}) - 3(\vec{j} - 2\vec{i})$

答案

1.
$$\begin{aligned} & 3(2\vec{i} - \vec{j}) + 4(\vec{i} + 2\vec{j}) \\ &= 6\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{i} + 8\vec{j} \\ &= 6\vec{i} + 4\vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{j} \\ &= 10\vec{i} + 5\vec{j} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} & 2(\vec{i} + \vec{j}) - 3(\vec{j} - 2\vec{i}) \\ &= 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{j} - 3(-2\vec{i}) \\ &= 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{j} + 6\vec{i} \\ &= 2\vec{i} + 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{j} \\ &= 8\vec{i} - \vec{j} \end{aligned}$$

例 10

已知$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$，$\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$。求$3\vec{a} + 4\vec{b}$。

答案

$$\begin{aligned} & 3\vec{a} + 4\vec{b} \\ &= 3(2\vec{i} + \vec{j}) + 4(-3\vec{i} + 4\vec{j}) \\ &= 6\vec{i} + 3\vec{j} - 12\vec{i} + 16\vec{j} \\ &= -6\vec{i} + 19\vec{j} \end{aligned}$$

單位向量

每個向量也有大小

向量 $\vec{a}$ 的大小以 $|\vec{a}|$ 來表示。

當向量的大小等於「1」，這個向量稱爲「單位向量」。

單位向量的表達

在向量的符號上加「∧」表示單位向量，如：$\hat{a}$ 。

例 11

若 $|\vec{u}| = 3$ ，求單位向量 $\hat{u}$ 。

答案

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u}}{3}$$

若 $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ，它的大小是 $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。而單位向量是 $\hat{v} = \dfrac{a\vec{i} + b\vec{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

例 12

求以下向量的單位向量。

1. $3\vec{i} + 4\vec{j}$
2. $10\vec{i} + 10\vec{j}$

答案

1.

$$|3\vec{i} + 4\vec{j}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\hat{u} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j}}{5} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

2.

$$\left|10\vec{i}+10\vec{j}\right|=\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$

$$\hat{u}=\frac{10\vec{i}+10\vec{j}}{10\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

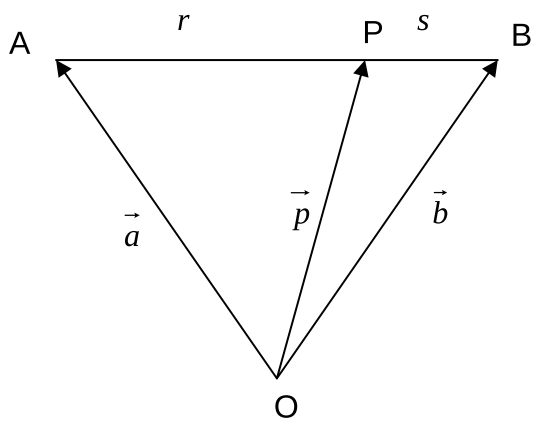
截點公式

設 A 及 B 的位置向量分別是 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 。若 P 點是線段 AB 上的其中一點，

$\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{r}{s}$ ，r 及 s 爲實數。

P 的位置向量

$$\vec{p}=\frac{s\vec{a}+r\vec{b}}{s+r}$$ 。



證明

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{r}{r+s}\overrightarrow{AB}=\frac{r}{r+s}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\frac{r}{r+s}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{s\vec{a}+r\vec{b}}{s+r}$$

例 13

已知 P 在線段 AB 中，$3\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$。若 A 及 B 的坐標分別是(–2, –6) 及 (8, 14)，求 P 的位置向量。

答案

$$\left|\overrightarrow{AP}\right|:\left|\overrightarrow{PB}\right|=2:3$$

$$\overrightarrow{OA}=-2\vec{i}-6\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OB}=8\vec{i}+14\vec{j}$$

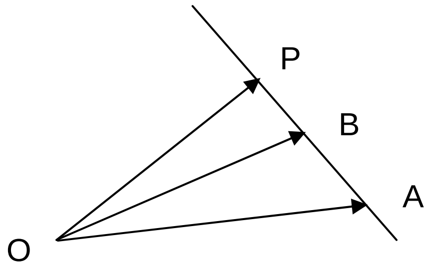
$$\overrightarrow{OP}=\frac{3(-2\vec{i}-6\vec{j})+2(8\vec{i}+14\vec{j})}{3+2}$$

$$=\frac{-6\vec{i}+16\vec{i}-18\vec{j}+28\vec{j}}{5}$$

$$=2\vec{i}+2\vec{j}$$

例 14

$\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 不是共線。若 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$，以 $\overrightarrow{OA}$ 及 $\overrightarrow{OB}$ 表達 $\overrightarrow{OP}$。



答案

方法一

$\because\ \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}\\ &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{OA} + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})\\ &= \overrightarrow{OA} - t\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\\ &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

方法二

$|\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{BP}| = t : 1-t$

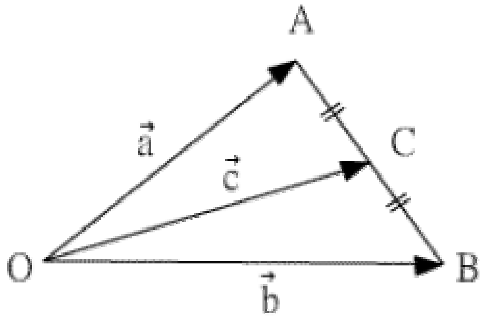
根據截點公式

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}}{t + (1-t)}\\ &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

中點公式

中點定理

設 A 點及 B 點的位置向量分別是 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 。
若 C 是線段 AB 的中點，
向量 $\vec{c} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ 。



證明

∵ C 是線段 AB 的中點。
∴ $r = s = 1$
根據截點公式

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{1+1} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$\therefore \quad \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

例 15

已知 P 點是 AB 的中點。若 A 及 B 分別是 (−3, 7) 及 (5, −19)，求 P 點的位置向量。

答案

$$\overrightarrow{OA} = -3\vec{i} + 7\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} - 19\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{(-3\vec{i} + 7\vec{j}) + (5\vec{i} - 19\vec{j})}{2}$$

$$= \frac{-3\vec{i} + 5\vec{i} + 7\vec{j} - 19\vec{j}}{2}$$

$$= \vec{i} - 6\vec{j}$$

例 16

已知點 P 是 AB 的中點。若 A 及 P 的位置向量分別是 $4\vec{i}+5\vec{j}$ 及 $3\vec{i}+3\vec{j}$ ，求 B 點的位置向量。

答案

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

$$3\vec{i}+3\vec{j}=\frac{4\vec{i}+5\vec{j}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

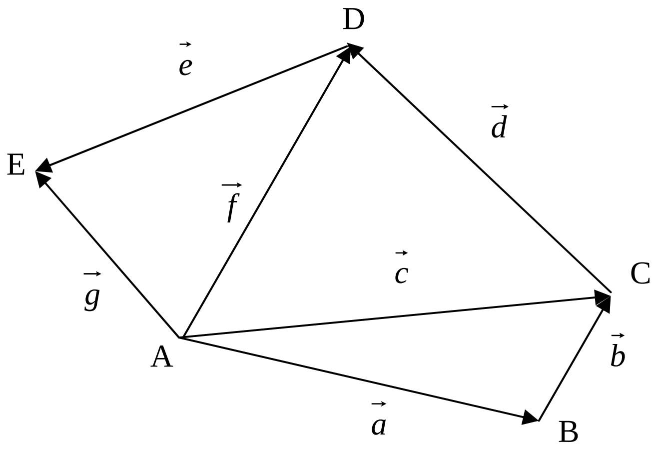
$$6\vec{i}+6\vec{j}=4\vec{i}+5\vec{j}+\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+\vec{j}$$

習題 7.2G

習題 7.2A

1. 根據下圖，簡化下列各題。



(1) $\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\vec{c}+\vec{d}$

(3) $\vec{f}+\vec{e}$

2. 簡化

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

(2) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$

(3) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$

答案

1. (1) $\vec{c}$ (2) $\vec{f}$ (3) $\vec{g}$

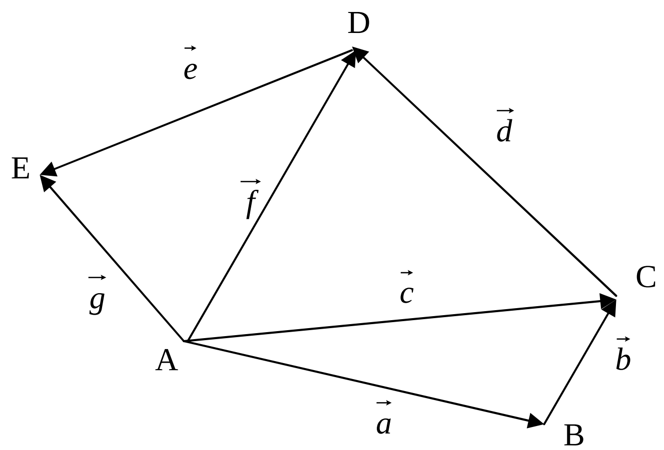
2. (1) $\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{BC}$ (3) $\overrightarrow{DC}$

習題 7.2B

1. 設 $\vec{a}$ 表示「向東走 10 公里」，$\vec{b}$ 表示「向西走 5 公里」，$\vec{c}$ 表示「向北走 10 公里」，$\vec{d}$ 表示「向南走 5 公里」，說明下列向量的大小和方向。

(1) $\vec{a}+\vec{a}$
(2) $\vec{a}+\vec{b}$
(3) $\vec{a}+\vec{c}$
(4) $\vec{b}+\vec{d}$
(5) $\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$
(6) $\vec{d}+\vec{a}+\vec{d}$

2. 根據下圖，簡化下列各題。



(1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}$
(2) $\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$
(3) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$

3. 簡化

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}$

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$

答案

1.

(1) 向東走 20 公里

(2) 向東走 5 公里

(3) 向東北走$10\sqrt{2}$公里

(4) 向西南走$5\sqrt{2}$ 公里

(5) 向西北走$5\sqrt{2}$公里

(6) 向東南走$10\sqrt{2}$公里

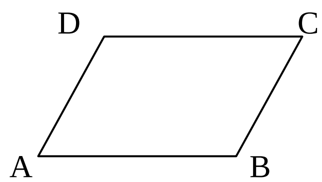
2. (1) $\vec{f}$ (2) $\vec{g}$ (3) $\vec{g}$

3. (1) $\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{DC}$

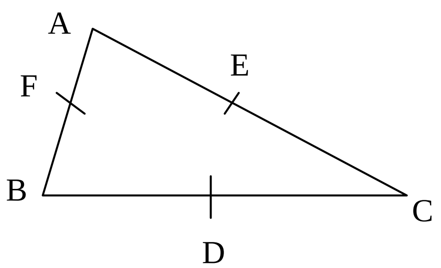
習題 7.2C

1. (1) 在△ABC 中，若$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$， $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，以 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$表示$\overrightarrow{AB}$。

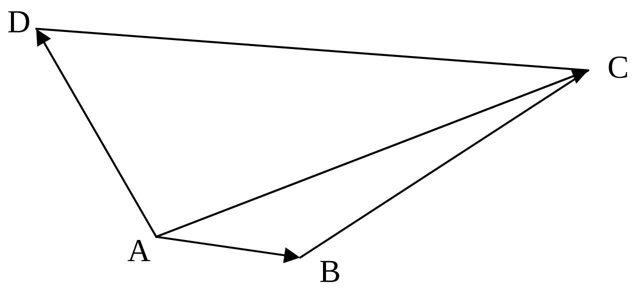
(2) 已知平行四邊形 ABCD，簡化$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}$。



(3) △ABC 各邊 BC、CA 及 AB 中點分別為 D、E 及 F，簡化$\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{FD}$。



2. 四邊形 ABCD，簡化 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$。

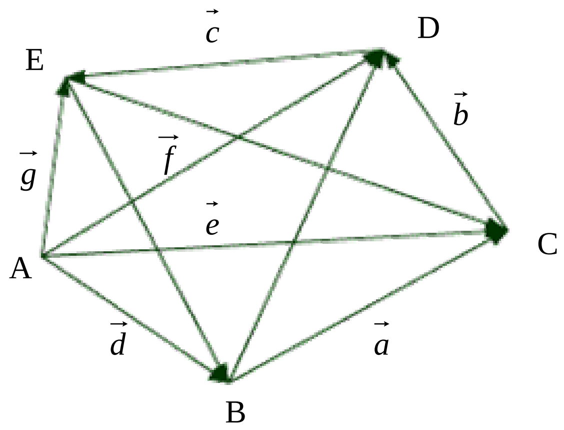


3. 將下列向量以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 表示。

(1) $\vec{e}-\vec{g}$

(2) $\vec{f}-\vec{d}$

(3) $\vec{d}-\vec{g}$



答案

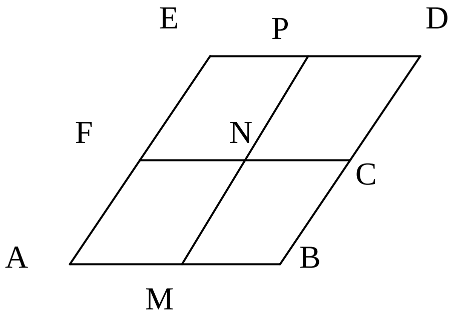
1. (1) $-\vec{a}-\vec{b}$ (2) $\overrightarrow{BC}$ (3) $\vec{0}$

2. $\overrightarrow{DC}$

3. (1) $-\vec{b}-\vec{c}$ (2) $\vec{a}+\vec{b}$ (3) $-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

習題 7.2D

1. ABDE 為平行四邊形。點 F、M、C 及 P 分別是 AE、AB、BD 及 DE 的中點，$\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ 及 $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$。以 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 表示以下向量。



(1) $\overrightarrow{AD}$
(2) $\overrightarrow{FD}$
(3) $\overrightarrow{BP}$
(4) $\overrightarrow{CA}$

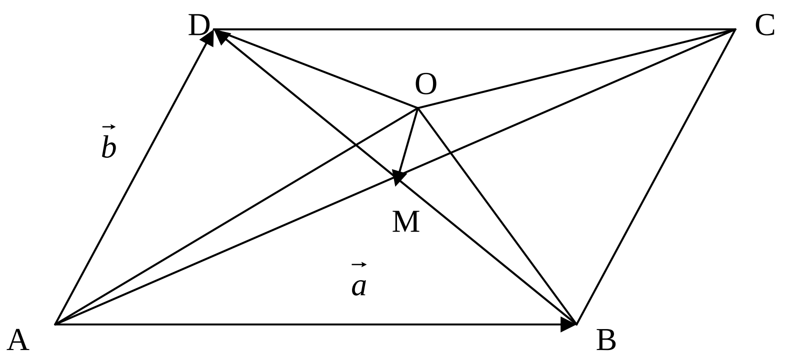
2. 簡化

(1) $2(\vec{c}+\vec{d})-\vec{c}$

(2) $2(3\vec{a}+\vec{b})+3(\vec{a}-2\vec{b})$

(3) $4(\vec{a}+\vec{c})+3(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

3. 已知平行四邊形 ABCD 的兩條對角線相交於點 M，且 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$。



(1) 以 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 及 $\overrightarrow{MD}$。

(2) O 是任何一點，證明 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}$。

答案

1. (1) $2\vec{a}+2\vec{b}$ (2) $2\vec{a}+\vec{b}$ (3) $-\vec{a}+2\vec{b}$ (4) $-2\vec{a}-\vec{b}$

2. (1) $\vec{c}+2\vec{d}$ (2) $9\vec{a}-4\vec{b}$ (3) $7\vec{a}+6\vec{b}+\vec{c}$

3. (1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\therefore\ \overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=-\vec{b}+\vec{a}$

$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

$\therefore\ \overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{MA}$

$\therefore\ \overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{MB}$

$\therefore\ \overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}-4\overrightarrow{OM}$

$=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OM}$

$=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

$=(-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b})+(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b})+(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})+(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})$

$=0$

$\therefore\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}$

習題 7.2E

1. 已知 $A(-1,-1)$，$B(1,3)$，$C(2,5)$，證明 A、B、C 三點共線。
2. $2\vec{a}+3\vec{b}=(k+1)\vec{b}+2\vec{a}$，其中 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為不共線向量。求 k 的數值。
3. 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 是不平行，求以下未知數的數值。

$$(3-m)\vec{a}-(4-n)\vec{b}+5\vec{c}=2\vec{a}+(2n-1)\vec{b}-(3-p)\vec{c}$$

4. 已知 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 不平行及 $3\vec{a}+(10-y)\vec{b}=(2+x)\vec{b}+(4y+7)\vec{a}$，求 x 與 y 的數值。

答案

1. $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}-\vec{j}$

$\overrightarrow{OB}=\vec{i}+3\vec{j}$

$\overrightarrow{OC}=2\vec{i}+5\vec{j}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(\vec{i}+3\vec{j})-(-\vec{i}-\vec{j})=2\vec{i}+4\vec{j}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+5\vec{j}-(\vec{i}+3\vec{j})=\vec{i}+2\vec{j}$

$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$

$\therefore$ A、B 及 C 三點共線。

2. $2\vec{a}+3\vec{b}=(k+1)\vec{b}+2\vec{a}$

$2\vec{a}+3\vec{b}=2\vec{a}+(k+1)\vec{b}$

$\therefore\ 3=k+1$

$k=2$

3. $(3-m)\vec{a}-(4-n)\vec{b}+5\vec{c}=2\vec{a}+(2n-1)\vec{b}-(3-p)\vec{c}$

$3 - m = 2$
$m = 1$

$-(4 - n) = 2n - 1$
$-4 + n = 2n - 1$
$n = -3$

$5 = -(3 - p)$
$5 = -3 + p$
$p = 8$

$\therefore$ $m = 1$、$n = -3$ 及 $p = 8$。

4. $3\vec{a}+(10-y)\vec{b}=(2+x)\vec{b}+(4y+7)\vec{a}$

$3\vec{a}+(10-y)\vec{b}=(4y+7)\vec{a}+(2+x)\vec{b}$

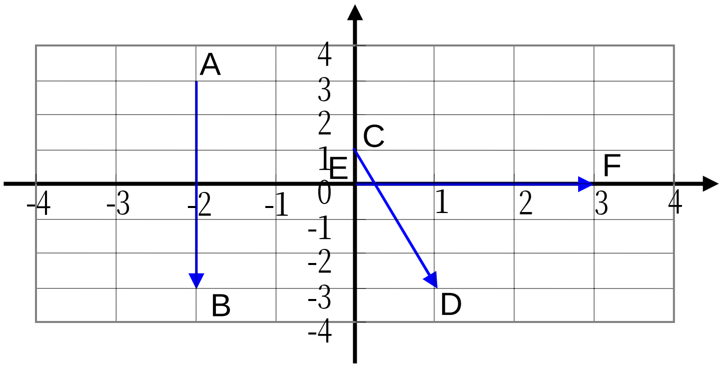
$3 = 4y + 7$
$4y = -4$
$y = -1$

$10 - y = 2 + x$
$10 - (-1) = 2 + x$
$x = 11 - 2 = 9$

$\therefore$ $x = 9$， $y = -1$

習題 7.2F

1. 以 $\vec{i}$ 及 $\vec{j}$ 表示圖中的向量。



2. 簡化
   (1) $3(2\vec{i} + 3\vec{j}) - (\vec{i} - 4\vec{j})$
   (2) $4(\vec{i} - 3\vec{j}) + 3(2\vec{i} + \vec{j})$
   (3) $6(\vec{i} + 3\vec{j}) - 4(2\vec{i} + 4\vec{j})$
3. 求以下未知數的數值。
   (1) $(n + 2)\vec{i} + 4\vec{j} = 5\vec{i} + m\vec{j}$
   (2) $(4 - m)\vec{i} - (5 - n)\vec{j} = 6\vec{j}$
   (3) $(20 - 3m)\vec{i} + (30 - 5n)\vec{j} = (m - 4)\vec{i} + 10\vec{j}$
4. 已知 $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$，$\vec{b} = x\vec{i} + \vec{j}$ 及 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 與 $2\vec{a} - \vec{b}$ 平行。求 x 的數值。
5. 若 $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{i}$，$\vec{b} = x\vec{i} - 6\vec{j}$ 及 $\vec{a} // \vec{b}$。求 x 的數值。

答案

1. $\overrightarrow{AB} = -6\vec{j}$，$\overrightarrow{CD} = \vec{i} - 4\vec{j}$，$\overrightarrow{EF} = 3\vec{i}$。

2.
   (1) $3(2\vec{i} + 3\vec{j}) - (\vec{i} - 4\vec{j}) = 6\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{i} + 4\vec{j} = 5\vec{i} + 13\vec{j}$
   (2) $4(\vec{i} - 3\vec{j}) + 3(2\vec{i} + \vec{j}) = 4\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{i} + 3\vec{j} = 10\vec{i} - 9\vec{j}$
   (3) $6(\vec{i} + 3\vec{j}) - 4(2\vec{i} + 4\vec{j}) = 6\vec{i} + 18\vec{j} - 8\vec{i} - 16\vec{j} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$

3.
   (1) $(n + 2)\vec{i} + 4\vec{j} = 5\vec{i} + m\vec{j}$
   $n + 2 = 5$
   $n = 3$
   $4 = m$
   $\therefore m = 4, n = 3$

(2) $(4 - m)\vec{i} - (5 - n)\vec{j} = 6\vec{j}$

$4 - m = 0$

$m = 4$

$-(5 - n) = 6$

$-5 + n = 6$

$n = 11$

$\therefore$ $m = 4$, $n = 11$

(3) $(20 - 3m)\vec{i} + (30 - 5n)\vec{j} = (m - 4)\vec{i} + 10\vec{j}$

$20 - 3m = m - 4$

$4m = 24$

$m = 6$

$30 - 5n = 10$

$5n = 20$

$n = 4$

$\therefore$ $m = 6$, $n = 4$

4. $\vec{a} + 2\vec{b} = (\vec{i} + \vec{j}) + 2(x\vec{i} + \vec{j}) = (1 + 2x)\vec{i} + 3\vec{j}$

$2\vec{a} - \vec{b} = 2(\vec{i} + \vec{j}) - (x\vec{i} + \vec{j}) = (2 - x)\vec{i} + \vec{j}$

$\because$ $\vec{a} + 2\vec{b}$ 與 $2\vec{a} - \vec{b}$ 平行

$\therefore$ $\vec{a} + 2\vec{b} = k(2\vec{a} - \vec{b})$

$(1 + 2x)\vec{i} + 3\vec{j} = (2 - x)k\vec{i} + k\vec{j}$

$k = 3$

$1 + 2x = 3(2 - x)$

$5x = 5$

$\therefore$ $x = 1$

5. $\because$ $\vec{a} \,//\, \vec{b}$

$2\vec{i} + 3\vec{j} = k(x\vec{i} - 6\vec{j})$

$2 = kx$

$3 = -6k$ $\therefore$ $k = -0.5$

$2 = -0.5x$

∴ $x = -4$

習題 7.2G

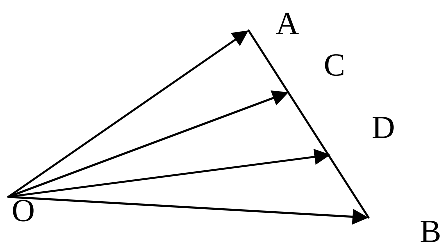
1. 寫出以下向量的單位向量。

   $3\vec{i} + 3\vec{j}$

   $-8\vec{i} + 6\vec{j}$

   $-5\vec{i} - 12\vec{j}$

2. 寫出 A=(–3, 5)，B=(3, 6)及 C=(4, 0) 的位置向量。
3. 已知點 P 是線段 AB 上的中間點。若 A 點及 P 點的坐標分別是 (–4, –7) 及 (6, 11)。求 B 點的位置向量。
4. 已知 $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{e_1}$ 及 $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{e_2}$，C 與 D 將 AB 分為三等份，以 $\overrightarrow{e_1}$ 及 $\overrightarrow{e_2}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$ 及 $\overrightarrow{OD}$。



5. 已知 P 是 AB 上的一點，$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$。若 A 點及 P 點的坐標分別是 $(-3,-6)$ 及 $(6,18)$。求 B 點的位置向量。
6. 若 M = (3, 2)、N = (–5, –1)，且 $2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN}$，求點 P 的位置向量。

答案

1. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$　　(2) $-\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$　　(3) $-\frac{5}{13}\vec{i} - \frac{12}{13}\vec{j}$

2. $\overrightarrow{OA} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$，$\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$，$\overrightarrow{OC} = 4\vec{i}$。

3.

$\overrightarrow{OA} = -4\vec{i} - 7\vec{j}$

$\overrightarrow{OP} = 6\vec{i} + 11\vec{j}$

根據中點定理

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$\therefore\ \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = 2(6\vec{i} + 11\vec{j}) - (-4\vec{i} - 7\vec{j}) = 16\vec{i} + 29\vec{j}$

4.

根據截點定理

$\overrightarrow{OC} = \frac{2(3\overrightarrow{e_1}) + 3\overrightarrow{e_2}}{2+1}$

$\therefore\ \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$

$\overrightarrow{OD} = \frac{3\overrightarrow{e_1} + 2(3\overrightarrow{e_2})}{1+2}$

$\therefore\ \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$

5.

$\overrightarrow{OA} = -3\vec{i} - 6\vec{j}$

$\overrightarrow{OP} = 6\vec{i} + 18\vec{j}$

$\because\ \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$

$\therefore\ AP : PB = 2 : 1$

根據截點定理

$\overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}}{2+1}$

$\therefore\ \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}[3(6\vec{i} + 18\vec{j}) - (-3\vec{i} - 6\vec{j})] = \frac{21}{2}\vec{i} + 27\vec{j}$

6.

$\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

$\overrightarrow{ON} = -5\vec{i} - \vec{j}$

$\because\ 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN}$

$\therefore$ MP : PN = 1 : 1（P 是 MN 的中點）

根據中點公式

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{2} = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$