Ch.8(A)

Q1 解

設 P 的坐標為 $(x, 0)$。

則

$$|x| = \sqrt{(x-1)^2+(0+2)^2}$$

$\therefore \quad x = \dfrac{5}{2}$

即 P 為 $(\dfrac{5}{2}, 0)$。

Q2 解

設 R 的坐標為 (x, y) 。

$\because$ QR 的中點在 y 軸上,

$\therefore \quad \dfrac{-2+x}{2} = 0$

$\therefore \quad x = 2$

$\because$ PR 的中點在 x 軸上,

$\therefore \quad \dfrac{7+y}{2} = 0$

$\therefore \quad y = -7$

$\therefore$ R 的坐標為 $(2, -7)$ 。

PR 的中點 $= (\dfrac{5}{2}, 0)$

QR 的中點 $= (0, -1)$

Q3 解

$\because$ AC 的中點 = BD 的中點

$\therefore \quad (\dfrac{4-1}{2}, \dfrac{y+3}{2}) = (\dfrac{-3+x}{2}, \dfrac{-1+1}{2})$

$\therefore \quad x = 6$ 及 $y = -3$

Q4 解

設 B 為 (x_1, y_1) 及 C 為 (x_2, y_2) 。

$\because \quad AD : DB = 1 : 1$

$\therefore \quad (\dfrac{-1+x_1}{2}, \dfrac{5+y_1}{2}) = (1, \dfrac{3}{2})$

$\therefore \quad x_1 = 3, \quad y_1 = -2$

$\because \quad CG : GD = 2 : 1$

$$\therefore \quad \left(\frac{2(1)+x_2}{2+1}, \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)+y_2}{2+1}\right) = (1, 2)$$

$\therefore \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 3$

即 B 的坐標為 $(3, -2)$ 而 C 的坐標為 $(1, 3)$ 。

Q5 解

(a) ΔABC 的面積

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1+\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 \\ 1-\sqrt{3} & \sqrt{3}+1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3+\sqrt{3}$$

(b) 設 h 為所求的距離。

$$AB = \sqrt{(1-1-\sqrt{3})^2+(-1-\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{6}$$

$\because \quad \dfrac{1}{2}(AB)h = \Delta ABC$ 的面積

$$\therefore \quad h = \frac{2(3+\sqrt{3})}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

Q6 解

設 C 為 $(x, 0)$。

$$m_{AB} = \frac{3+1}{2-1} = 4$$

$$m_{AC} = \frac{3}{2-x}$$

$\because \quad \angle BAC = 45°$

$$\therefore \quad \tan\angle BAC = \left|\frac{4-\frac{3}{2-x}}{1+4\cdot\frac{3}{2-x}}\right| = 1$$

$\therefore \quad x = -3$ 或 $\dfrac{19}{5}$

$\therefore$ C 為 $(-3, 0)$ 或 $\left(\dfrac{19}{5}, 0\right)$。

Q7 解

(a)
$$m_{PQ} = \frac{7-3}{6-8} = -2$$

(b) AB 通過 R 且與 PQ 平行。

$\therefore$ AB 的方程為

$$y-1 = -2(x-5)$$

即 $2x+y-11 = 0$

(c) AB 與 PQ 的距離 = P 與 AB 的距離

$$= \frac{2(8)+3-11}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

Q8 解

(a) $\because$ $C(a, b)$ 在直線 $2x - 3y + 4 = 0$,

$\therefore \quad 2a - 3b + 4 = 0$

$$b = \frac{2a+4}{3}$$

(b)
$$\because \quad \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -2 \\ a & b \\ 6 & 3 \end{vmatrix}\right| = 5$$

$\therefore \quad -12 + b + 3a - 3 + 2a - 6b = \pm 10$

$\therefore \quad a = 19$ 或 7

當 $a = 19$ 時,

$b = \dfrac{2\times 19+4}{3} = 14$;

當 $a = 7$ 時,

$b = \dfrac{2\times 7+4}{3} = 6$。

$\therefore$ 點 C 的坐標為 $(19, 14)$ 或 $(7, 6)$。

Q9 解

(a) P 的坐標為 $\left(\dfrac{-2+k}{1+k}, \dfrac{2+7k}{1+k}\right)$。

(b) 設直線 $2x - 3y + 12 = 0$ 分割 AB 的比為 $k : 1$。由 **(a)** 的結果得:

$$2\cdot\frac{-2+k}{1+k}-3\cdot\frac{2+7k}{1+k}+12 = 0$$

$$\therefore \quad k = \frac{2}{7}$$

故所求之比為 $2 : 7$。

Q10 解

(a) 解 $\begin{cases} kx-y-k=0 \\ x+ky+1=0 \end{cases}$ 得

$x=\dfrac{k^2-1}{k^2+1}$, $y=\dfrac{-2k}{k^2+1}$

(b) $$x^2+y^2 = \left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2+\left(\frac{-2k}{k^2+1}\right)^2 = 1$$

∴當 k 變化時，點 T 的軌跡方程為 $x^2+y^2=1$。

Q11 解

(a) L 的方程為

$$y-1 = m(x-2)$$

即 $mx-y+1-2m = 0$

(b) $$\left|\frac{m\cdot 3-(-2)+1-2m}{\sqrt{1+m^2}}\right| = \sqrt{2}$$

$$m+3 = \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+m^2}$$

∴ $m^2+6m+9 = 2+2m^2$

∴ $m = 7$ 或 -1

Q12 解

L： $(m^2-6m+10)x+(m-5)y-4m=0$

$$x \text{ 截距} = \frac{4m}{m^2-6m+10}$$

∴ $\dfrac{4m}{m^2-6m+10} = 12$

∴ $m = 3$ 或 $\dfrac{10}{3}$

Q13 解

設 A 為 $(a, 0)$ 及 B 為 $(0, b)$。

則 $\begin{cases} 1=\dfrac{a+0}{2} \\ 3=\dfrac{0+b}{2} \end{cases}$

∴ A 的坐標為 $(2, 0)$ ，B 的坐標為 $(0, 6)$。

∴ L 的方程為

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{6} = 1$$

即 $3x+y-6 = 0$。

Q14 解

設 L 的方程為

$$(7x+7y-24)+k(x-y) = 0$$

$$(7+k)x+(7-k)y-24 = 0$$

∴ $\left|\dfrac{24}{\sqrt{(7+k)^2+(7-k)^2}}\right| = 2\dfrac{2}{5}$

$$98+2k^2 = 100$$

$$k = -1$$

∴ L 的方程為 $4x+3y-12=0$ 或 $3x+4y-12=0$。

Q15 解

設 BC 的方程為

$$y+8 = m(x-3)。$$

AB 的斜率 $= 7$

AC 的斜率 $= -1$

∵ ΔABC 是一等腰三角形。

∴ $\dfrac{7-m}{1+7m} = \dfrac{m-(-1)}{1+m(-1)}$

$$3m^2+8m-3 = 0$$

$$m = \frac{1}{3} \text{ 或 } -3$$

∴ BC 的方程為

$x-3y-27=0$ 或 $3x+y-1=0$。

Q16 解

設 L : $y-2=m(x-5)$

即 $mx-y+(2-5m) = 0$

∴ $\left|\dfrac{m(-3)-1+(2-5m)}{\sqrt{1+m^2}}\right| = 4$

$$(1-8m)^2 = (4\sqrt{1+m^2})^2$$

$$m = \frac{3}{4} \text{ 或 } -\frac{5}{12}$$

∴ L 的方程為

$3x-4y-7=0$ 或 $5x+12y-49=0$。

Q17 解

設 C 為 (x, y)。

AC 的斜率 $= \dfrac{y}{x+4}$

BC 的斜率 $= \dfrac{y}{x-4}$

∴ $\left|\dfrac{\frac{y}{x+4}-\frac{y}{x-4}}{1+\frac{y}{x+4}\cdot\frac{y}{x-4}}\right| = \tan 45°$

$$\frac{8y}{x^2+y^2-16} = \pm 1$$

∴ C 的軌跡方程為

$x^2+y^2+8y-16=0$ 或 $x^2+y^2-8y-16=0$。

Q18 解

設 m 為所求直線的斜率。

直線 $y=5-2x$ 的斜率為 -2。

$$\left|\frac{m-(-2)}{1+m(-2)}\right| = \tan 45°$$

$$m+2 = \pm(1-2m)$$

∴ $m = -\dfrac{1}{3}$ 或 3

∴ 所求的方程為

$y=-\dfrac{1}{3}x$ 及 $y=3x$。

Q19 解

(a) 所求直線族為 $3x-2y+6+k(x+3y-1)=0$，其中 k 為常數。

(b) **(a)** 部的直線族可改寫為

$(3+k)x-(2-3k)y+6-k=0$。

此直線族的斜率可表為 $\dfrac{3+k}{2-3k}$。

直線 L 的斜率 $= 2$

依題意，$\left|\dfrac{2-\frac{3+k}{2-3k}}{1+2\cdot\frac{3+k}{2-3k}}\right| = \tan 45°$

$$4-6k-3-k = \pm(2-3k+6+2k)$$

∴ $k = -\dfrac{7}{6}$ 或 $k = \dfrac{9}{8}$

故所求的直線為

$11x-33y+43=0$ 及 $33x+11y+39=0$。

Q20 解

(a) L：$y-2=m(x-3)$

即 $mx-y+2-3m=0$

(b) $$\left|\frac{m-(-5)+2-3m}{\sqrt{1+m^2}}\right| = \left|\frac{2m-4+2-3m}{\sqrt{1+m^2}}\right|$$

∴ $m = 9$ 或 $\frac{5}{3}$

故 L 的方程為

$9x-y-25=0$ 或 $5x-3y-9=0$。

Q21 解

(a) 設 A 及 B 的坐標分別為 $(a, 0)$ 及 $(0, b)$。

則 $$\begin{cases} x=\dfrac{2a+1\cdot 0}{1+2} \\ y=\dfrac{2\cdot 0+1\cdot b}{1+2} \end{cases}$$

∴ $a=\frac{3}{2}x,\quad b=3y$

故 A 及 B 的坐標分別為 $(\frac{3x}{2}, 0)$ 及 $(0, 3y)$。

(b) ∵ $AB=6$

∴ $a^2+b^2=6^2$

即 $(\frac{3}{2}x)^2+(3y)^2=36$

∴ P 的軌跡方程為 $x^2+4y^2=16$。

此軌跡為一橢圓。

Q22 解

(a) $$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ x & y \\ 3 & -2 \end{matrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{2}|3-2y-2x-4-x-3y|$$

$$= \frac{1}{2}|3x+5y+1|$$

(b) $S = 6$

∴ $\frac{1}{2}|3x+5y+1| = 6$

$3x+5y+1 = \pm 12$

故 C 的軌跡方程為

$3x+5y-11=0$ 或 $3x+5y+13=0$。

Q23 解

依題意 $\angle ABC = \angle ACB = 45°$

直線 L 的斜率 $= \frac{2}{3}$

設與 L 成 45° 角的直線之斜率為 m。

則 $$\left|\frac{m-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}m}\right| = \tan 45° = 1$$

$m = 5$ 或 $-\frac{1}{5}$

∴ 所求的方程為

$5x-y-7=0$ 及 $x+5y+9=0$

Q24 解

(a) F：$2x+y+4+k(x-2y-3)=0$ 其中 k 為常數。

(b) F 可改寫為 $(2+k)x+(1-2k)y+4-3k=0$。

∵ 原點至所求直線的距離為 1,

∴ $$\left|\frac{4-3k}{\sqrt{(2+k)^2+(1-2k)^2}}\right| = 1$$

$k = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{11}{2}$

∴ 所求的方程為

$2x+y+4+\frac{1}{2}(x-2y-3) = 0$

即 $x+1 = 0$

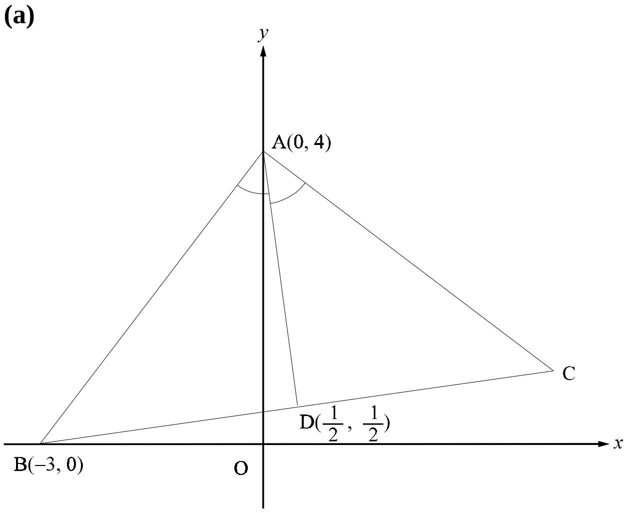
及 $2x+y+4+\frac{11}{2}(x-2y-3) = 0$

即 $3x-4y-5 = 0$

Ch.8(B)

Q1 解

(a)



$m_{AB} = \frac{4-0}{0+3} = \frac{4}{3}$

$m_{AD} = \dfrac{4-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}} = -7$

(b) 設 AC 的斜率為 m。

∵ $\angle BAD = \angle CAD$

∴ $\tan\angle BAD = \tan\angle CAD$

$$\frac{-7-\frac{4}{3}}{1+(-7)(\frac{4}{3})} = \frac{m-(-7)}{1+m(-7)}$$

∴ $m = -\frac{3}{4}$

(c) 設 C 的坐標為 (x, y)。

∵ $m_{AC} = m$

∴ $\frac{y-4}{x-0} = -\frac{3}{4}$

即 $3x+4y-16 = 0$ .... (1)

∵ $m_{BC} = m_{BD}$

∴ $$\frac{y-0}{x+3} = \frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}+3}$$

∴ $x-7y+3 = 0$ .... (2)

解 (1) 和 (2),

$x = 4,\quad y = 1$。

∴　C 的坐標為 (4, 1)。

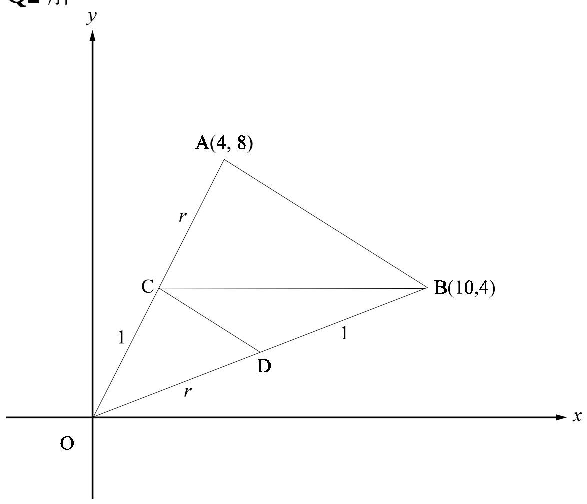
ΔABC 的周界

$= AB + BC + AC$

$= \sqrt{(0+3)^2+(4-0)^2} + \sqrt{(4+3)^2+(1-0)^2} + \sqrt{(0-4)^2+(4-1)^2}$

$= 10 + 5\sqrt{2}$

Q2 解



(a)

$$C = \left(\frac{1(4)+r(0)}{1+r}, \frac{1(8)+r(0)}{1+r}\right) = \left(\frac{4}{1+r}, \frac{8}{1+r}\right)$$

$$D = \left(\frac{r(10)+1(0)}{1+r}, \frac{r(4)+1(0)}{1+r}\right) = \left(\frac{10r}{1+r}, \frac{4r}{1+r}\right)$$

(b)

$$\Delta ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ \frac{4}{1+r} & \frac{8}{1+r} \\ 10 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 32 - \frac{32}{1+r}$$

$$\Delta BCD \text{ 的面積} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ \frac{4}{1+r} & \frac{8}{1+r} \\ \frac{10r}{1+r} & \frac{4r}{1+r} \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = \frac{32}{1+r} - \frac{32r}{(1+r)^2}$$

(c)

$$32 - \frac{32}{1+r} = 2\left[\frac{32}{1+r} - \frac{32r}{(1+r)^2}\right]$$

∴　$r = 1$ 或 -2 (捨去)

∴　$r = 1$

Q3 解

(a) L_1 的方程為

$(x-u)^2 + (y-0)^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2$

即　$2ux - 8y + 16 - u^2 = 0$ .... (1)

C 的坐標 $= (u+2, 0)$

∴　BC 的中點 $= (u+1, 0)$

∴　L_2 的方程為

$x = u + 1$。 .... (2)

(b) 把 (2) 代入 (1),

$2u(u+1) - 8y + 16 - u^2 = 0$

∴　$y = \dfrac{u^2+2u+16}{8}$ .... (3)

∴　$G = \left(u+1, \dfrac{u^2+2u+16}{8}\right)$

(c) 由 (2),

$u = x - 1$。 .... (4)

把 (4) 代入 (3),

$y = \dfrac{(x-1)^2+2(x-1)+16}{8}$

$8y = x^2 + 15$

即　$x^2 = 8y - 15$　為所求的軌跡方程。

Q4 解

(a) $m_{CT} = \dfrac{4-0}{0-t} = -\dfrac{4}{t}$

∴　$m_{TD} = \dfrac{t}{4}$

TD 的方程為

$y - 0 = \dfrac{t}{4}(x-t)$

即　$tx - 4y - t^2 = 0$ .... (1)

(b) ∵　$\angle DAE = \dfrac{90°}{2} = 45°$

∴　$m_{AD} = 1$

AD 的方程為

$y - 0 = 1(x-4)$

即　$x - y - 4 = 0$ .... (2)

(c) 解 (1) 和 (2),

$x = t + 4,\quad y = t$

∴　$D = (t+4, t)$

$m_{CD} = \dfrac{t-4}{t+4}$

$$\tan\angle TDC = \left|\frac{\frac{t-4}{t+4} - \frac{t}{4}}{1 + \frac{t-4}{t+4}\cdot\frac{t}{4}}\right| = 1$$

(d) $\angle TDC = 45°$

∴　$\angle TCD = 180° - 90° - 45° = 45°$

∴　CT = DT　(等角對等邊)