Ch. 1 Solution

QA1 解

所求方程為

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{x}\right) + k = 0$$

即 $kx^2 - 5x + 1 = 0$。

QA2 解

方程有重根,

$\Delta = (-2p^2) - 4(1)(p+6) = 0$

$p = 3$ 或 -2

當 $p = 3$, 方程為

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$x = 3$

當 $p = -2$, 方程為

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$x = -2$ (捨去)

$\therefore$ 所求答案為 $p = 3$ 及 根 $= 3$。

QA3 解

$\alpha(\alpha+3) = 10$

$\alpha = -5$ 或 2

兩根之和為

$-k = \alpha + (\alpha+3)$

$\therefore\ k = -2\alpha - 3$

$k = -2(-5) - 3$ 或 $-2(2) - 3$

$\therefore\ k = 7$ 或 -7

QA4 解

$$f(x) = \frac{5}{2} - \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{6}{(x-1)^2 + 3}$$

$\because$ 當 $x = 1$, $(x-1)^2 + 3$ 的最小值為 3,

$\therefore\ \dfrac{6}{(x-1)^2+3}$ 的最大值 $= \dfrac{6}{3} = 2$。

由此, $f(x)$ 的最小值為 $\dfrac{5}{2} - 2 = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ f(x)$ 恆為正。

QA5 解

(a) $\because$ 方程有不等實根,

$\therefore\ \Delta = 10^2 - 4(1)(m) > 0$

$m < 25$

(b) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$

$= (\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta)]$

$\because\ \alpha^3 + \beta^3 = 370$, $\alpha + \beta = -10$,

$\alpha\beta = m$

$\therefore\ -10[(-10)^2 - 3m] = -370$

$\therefore\ m = 21$

QA6 解

$\therefore\ x^2 + 5x + (\lambda - 10) > 0$

若此對所有實數 x 皆成立, 則

$\Delta = 5^2 - 4(\lambda - 10) < 0$

$\therefore\ \lambda > \dfrac{65}{4}$

QA7 解

$[2(x+4) - 5][3(x+4) + 4] = 0$

$\therefore\ x = -\dfrac{3}{2}$ 或 $-\dfrac{16}{3}$

QA8 解

$3x^2 + 8x + 2 = 0$

$$x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$x^2 + \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}$$

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

$$x = -\frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}$$

QA9 解

$$3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

兩邊乘以 x^2,

$3x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

QA10 解

(a) 判別式 $= (k-3)^2 - 4(2)(18) = 0$

$k = -9$ 或 15

(b) 當 $k = -9$, 該方程為

$2x^2 - 12x + 18 = 0$

$\therefore\ x = 3$

當 $k = 15$, 該方程為

$2x^2 + 12x + 18 = 0$

$\therefore\ x = -3$

QA11 解

$y = x^2 - 2x$ .... (1)

$y = x + k$ .... (2)

把 (2) 代入 (1),

$x^2 - 3x - k = 0$ .... (3)

若聯立方程沒有實解, 則方程 (3) 沒有實根。

由此, 其判別式 < 0,

即 $(-3)^2 - 4(1)(-k) < 0$

$\therefore\ k < -\dfrac{9}{4}$

QA12 解

$\because\ x^2$ 的係數 $= 4 > 0$

$\therefore$ 對所有實數 x, 數式 $4x^2 + 5x + k > 0$ 若

$5^2 - 4(4)k < 0$

$k > \dfrac{25}{16}$

QA13 解

設 α 和 3α 為該方程的根。

兩根之和 $= \alpha + 3\alpha = -\dfrac{b}{a}$

$\alpha = -\dfrac{b}{4a}$ .... (1)

兩根之積 $= \alpha(3\alpha) = \dfrac{c}{a}$

$3\alpha^2 = \dfrac{c}{a}$ .... (2)

把 (1) 代入 (2), $3\left(\dfrac{-b}{4a}\right)^2 = \dfrac{c}{a}$

$\therefore\ 3b^2 = 16ac$

QB1 解

(a)
$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$= \frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\left(\frac{-6}{2}\right)}{\frac{-6}{2}}$$
$$= -\frac{49}{12}$$

(b)
$$\frac{4\alpha}{\beta}+\frac{4\beta}{\alpha} = 4\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$$= 4\left(-\frac{49}{12}\right)$$
$$= -\frac{49}{3}$$
$$\frac{4\alpha}{\beta}\cdot\frac{4\beta}{\alpha} = 16$$

$\therefore$ 所求方程為
$$x^2-\left(-\frac{49}{3}\right)x+16 = 0$$
即 $3x^2+49x+48 = 0$。

QB2 解

(a) $f(x) = 3+2x-x^2 = 0$

$\therefore$ $x = -1$ 或 3

(b)
$$f(x) = 3+2x-x^2$$
$$= 3-(x^2-2x)$$
$$= 3-(x^2-2x+1)+1$$
$$= 4-(x-1)^2$$

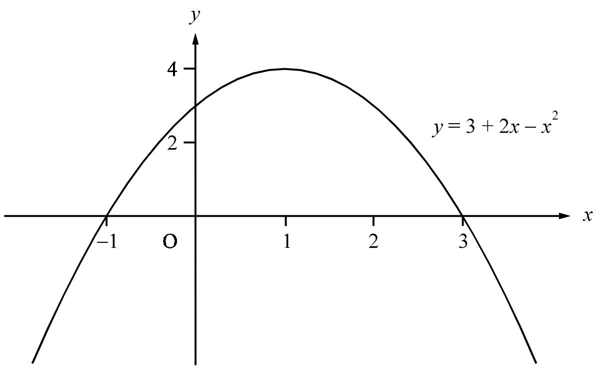
$\therefore$ $f(x)$ 的極大值 $= f(1)$

$= 4$

(c) $y=f(x)$ 的圖像與 x 軸相交於 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$。

它有極大點 $(1, 4)$。

因此，可得 $y=f(x)$ 的圖像如下。



QB3 解

(a) $y = ax^2-12x+c$ 有最大值當
$$x = \frac{6}{a} = -\frac{3}{2}$$
$\therefore$ $a = -4$

由此，
$$10 = -4\left(-\frac{3}{2}\right)^2-12\left(-\frac{3}{2}\right)+c$$
$\therefore$ $c = 1$

(b)
$$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$= \left(\frac{12}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)$$
$$= \frac{19}{2}$$
$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$$
$$= \left(\frac{c}{a}\right)^2$$
$$= \frac{1}{16}$$

$\therefore$ 所求方程為
$$x^2-\frac{19}{2}x+\frac{1}{16} = 0$$
即 $16x^2-152x+1 = 0$。

QB4 解

(a)
$$\left(\alpha+\frac{m}{\alpha}\right)+\left(\beta+\frac{m}{\beta}\right) = (\alpha+\beta)+\frac{m(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$
$$= 3+3m$$
$$\left(\alpha+\frac{m}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{m}{\beta}\right) = \alpha\beta+m\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+\frac{m^2}{\alpha\beta}$$
$$= \alpha\beta+m\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+\frac{m^2}{\alpha\beta}$$
$$= \alpha\beta+m\cdot\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+\frac{m^2}{\alpha\beta}$$
$$= 1+m\cdot\frac{(3)^2-2(1)}{1}+\frac{m^2}{1}$$
$$= 1+7m+m^2$$

$\therefore$ 以 $\alpha+\frac{m}{\alpha}$ 及 $\beta+\frac{m}{\beta}$ 為根的方程為
$$x^2-(3+3m)x+(1+7m+m^2) = 0。$$

(b) 以上方程有重根，若

$(3+3m)^2-4(1+7m+m^2) = 0$

$\therefore$ $m = 1$

QB5 解

(a) $\Delta = (2k)^2-4(-1)(6-5k)$

$= 4(k^2-5k+6)$

(b) $\because$ $f(x)\le 0$，對所有實數 x，

$\therefore$ $\Delta \le 0$

即 $4(k^2-5k+6) \le 0$

$(k-2)(k-3) \le 0$

$\therefore 2 \le k \le 3$

QB6 解
$$\alpha+\beta = -\frac{k+5}{2} \qquad \alpha\beta = -\frac{3k}{2}$$
$$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$= \left(-\frac{k+5}{2}\right)^2-2\left(-\frac{3k}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}(k^2+22k+25)$$
$$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$
$$= \left(-\frac{k+5}{2}\right)\left[\frac{1}{4}(k^2+22k+25)-\left(-\frac{3k}{2}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{8}(k+5)(k^2+28k+25)$$