QA1 解

設 S(n) 為命題

$$“1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)”。$$

當 $n = 1$,

左方 $= 1^2 = 1$

右方 $= \frac{1}{3}(1)[2(1)+1][2(1)-1] = 1$

∴ S(1) 成立。

假設 S(k) 成立。

即 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1)$。

兩邊同時加上 $[2(k+1)-1]^2$,

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + [2(k+1)-1]^2 = \frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1) + [2(k+1)-1]^2 = \frac{1}{3}(k+1)[2(k+1)+1][2(k+1)-1]$$

∴ S($k+1$) 成立。

根據數學歸納法, S(n) 對所有正整數 n 皆成立。

QA2 解

設 S(n) 為命題

$$“\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\ \ldots\ +\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}”。$$

當 $n = 1$,

左方 $= \frac{1}{2\times5} = \frac{1}{10}$

右方 $= \frac{1}{6(1)+4} = \frac{1}{10}$

∴ S(1) 成立。

假設 S(k) 成立。

即 $\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\ \ldots\ +\frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{k}{6k+4}$

兩邊同時加上 $\frac{1}{[3(k+1)-1][3(k+1)+2]}$, 即 $\frac{1}{3(k+2)(3k+5)}$。

$$\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\ \ldots\ +\frac{1}{(3k+2)(3k+5)} = \frac{k}{6k+4} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} = \frac{k+1}{6(k+1)+4}$$

∴ S($k+1$) 成立。

根據數學歸納法, S(n) 對所有正整數 n 皆成立。

QA3 解

設 S(n) 為命題

“$3^{2n+1} + 40n - 67$ 為 64 的倍數” 。

當 $n = 1$,

$3^{2n+1} + 40n - 67 = 3^3 + 40 - 67 = 0$ 為 64 的倍數。

∴ S(1) 成立。

假設 S(k) 成立。

即 $3^{2k+1} + 40k - 67 = 64m$, 其中 m 為任意正整數。

$3^{2(k+1)+1} + 40(k+1) - 67 = 3^{2k+3} + 40k - 27 = 9(3^{2k+1} + 40k - 67) - 8(40k) + 9(67) - 27$

$= 64(9m - 5k + 9)$ 為 64 的倍數。

∴ 根據數學歸納法, S(n) 對所有正整數 n 皆成立。

QA4 解

設 S(n) 為命題

“$3^n > n^3$”。

當 $n = 4$,

$3^n = 3^4 = 81$

$n^3 = 4^3 = 64$

∴ S(4) 成立。

假設 S(k) 成立, 其中 $k \geq 4$。

則 $3^{k+1} = 3(3^k) > 3(k^3)$。

∵ $3k^3 - (k+1)^3 = 2k^3 - 3k^2 - 3k - 1 = 2(k-1)^3 + 3k(k-3) + 1 > 0$

∴ $3^{k+1} > 3k^3 > (k+1)^3$

$\therefore$ S$(k+1)$ 成立。

根據數學歸納法， S(n) 對所有正整數 $n \geq 4$ 皆成立。

QA5 解

(a) 若 S(k) 成立， 則

$1+2+3+\ldots+k = \frac{1}{2}(k-1)(k+2)$。

兩邊同時加上 $k+1$,

$1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{1}{2}(k-1)(k+2)+(k+1) = \frac{1}{2}[(k+1)-1][(k+1)+2]$

即 S$(k+1)$ 成立。

(b) 當 $n = 1$,

左方 $= 1$

右方 $= \frac{1}{2}(1-1)(1+2) = 0$

$\therefore$ 左方 $\neq$ 右方

即 S(1) 不成立。

由此， S(n) 並非對所有自然數 n 皆成立。

QA6 解

$\because$ S(5) 成立。

$\therefore$ 由 (2), S(5 + 5), 即 S(10) 成立。

同樣地， S(15)、S (20) 、S (25)、 . . . 成立。

由此， S(n) 對所有 5 的倍數的 n 值皆成立。

QA7 解

設 S(n) 為命題

"$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$" 。

當 $n = 1$,

左方 $= 1^3 = 1$

右方 $= 1^2[2(1^2)-1)] = 1$

$\therefore$ S(1) 成立。

假設 S(k) 成立。

即 $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3 = k^2(2k^2-1)$

兩邊同時加上 $[2(k+1)-1]^3$, 即 $(2k+1)^3$, 得

$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3+[2(k+1)-1]^3 = k^2(2k^2-1)+(2k+1)^3 = (k+1)^2[2(k+1)^2-1]$

$\therefore$ S$(k+1)$ 成立。

根據數學歸納法， S(n) 對所有自然數 n 皆成立。

QA8 解

設 S(n) 為命題

"$7^{n+1}+3n+2$ 可被 9 整除" 。

當 $n = 1$,

$7^{n+1}+3n+2 = 7^2+3(1)+2 = 54 = 9\times 6$

$\therefore$ S(1) 成立。

假設 S(k) 成立。

即 $7^{k+1}+3k+2 = 9m$, 其中 m 為整數。

則 $7^{(k+1)+1}+3(k+1)+2 = 7\cdot 7^{k+1}+3k+5 = 7(7^{k+1}+3k+2)-21k-14+3k+5 = 9(7m-2k-1)$ 可被 9 整除。

$\therefore$ S$(k+1)$ 成立。

根據數學歸納法， S(n) 對所有自然數 n 皆成立。

QA9 解

設 S(n) 為命題

"$a^n - b^n$ 可被 $a+b$ 整除" 。

當 $n = 2$,

$a^n - b^n = a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

$\therefore$ S(2) 成立。

假設 S(k) 成立。

即 $a^k - b^k = m(a+b)$, 其中 m 為整數。

則 $a^{k+2}-b^{k+2} = a^2a^k-b^2b^k = a^2(a^k-b^k)+a^2b^k-b^2b^k = (a+b)[ma^2+(a-b)b^k]$ 可被 $a+b$ 整除。

$\therefore$ S$(k+2)$ 成立。

根據數學歸納法， S(n) 對所有正偶數 n 皆成立。

QA10 解

設 S(n) 為命題

“$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{n+n}>\dfrac{13}{24}$”。

當 $n=2$,

$$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}。$$

∴ S(2) 成立。

假設 S(k) 成立。

即 $\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+...+\dfrac{1}{k+k}>\dfrac{13}{24}$。

則
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+...+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}\\
=\ &(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{k+k})+(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1})\\
=\ &(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{k+k})+(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2})\\
>\ &\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{k+k} \qquad (\because\ \frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}>0)\\
>\ &\frac{13}{24} \qquad (\text{根據假設})
\end{aligned}$$

∴ S($k+1$) 成立。

根據數學歸納法, S(n) 對所有自然數 $n\geq 2$ 皆成立。

QA11 解

設 S(n) 為命題“$L_n=n^2$”。

明顯地, 當 $n=1$, 只有一條線段。

∴ S(1) 成立。

假設 S(k) 成立。

即 $L_k = k^2$。

若在原有的 k 條直線上再加上第 $(k+1)$ 條直線, 則它會被原有的 k 條直線分成 $(k+1)$ 條線段, 而它亦會令該 k 條直線每條多分一條線段。

$$\begin{aligned}
\therefore\quad L_{k+1} &= k^2+(k+1)+k\\
&= (k+1)^2
\end{aligned}$$

即 S($k+1$) 成立。

根據數學歸納法, S(n) 對所有自然數 n 皆成立。

QB1 解

設 S(n) 為命題

“$(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})...(1-\dfrac{1}{n^2})=\dfrac{n+1}{2n}$”。

當 $n=2$,

$$\text{左方} = 1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{右方} = \frac{2+1}{2(2)} = \frac{3}{4}$$

∴ S(2) 成立。

假設 S(k) 成立。

即 $(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})...(1-\dfrac{1}{k^2})=\dfrac{k+1}{2k}$。

$$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})...(1-\frac{1}{k^2})[1-\frac{1}{(k+1)^2}] = \frac{k+1}{2k}\cdot\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

∴ S($k+1$) 成立。

根據數學歸納法, S(n) 對所有自然數 $n\geq 2$ 皆成立。

QB2 解

設 S(n) 為命題

“n 邊形的內角和為 $(n-2)\cdot 180°$”。

∵ 三角形的內角和 $=180°$,

∴ S(3) 成立。

假設 S(k) 成立。

設 X 為一 $(k+1)$ 邊形。 透過連接多邊形的任意一個凸角的兩個相連的頂點, 將該多邊形分割成一個三角形和一個 k 邊形。

由此，多邊形 X 的內角和 = 三角形的內角和 + k 邊形的內角和 = $180° + (k-2) \cdot 180°$ = $[(k+1)-2)] \cdot 180°$

∴ $S(k+1)$ 成立。

根據數學歸納法， $S(n)$ 對所有自然數 $n \geq 3$ 皆成立。

QB3 解

(a) 總項數 = $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$ = $\frac{1}{2}n(n-1)$

(b) 所求的項 = 第 $[\frac{1}{2}n(n-1)+1]$ 個正奇數 = $2[\frac{1}{2}n(n-1)+1]-1$ = $n(n-1)+1$

(c) 第 n 行為 $[n(n-1)+1] + [n(n-1)+3] + \ldots + [n(n-1)+(2n-1)]$ = n^3。

(d) 設 $S(n)$ 為 **(c)** 部的推斷。

當 $n = 1$,

左方 $= 1(1-1)+1 = 1$

右方 $= 1^3 = 1$

∴ $S(1)$ 成立。

假設 $S(k)$ 成立。

即 $[k(k-1)+1] + [k(k-1)+3] + \ldots + [k(k-1)+(2k-1)] = k^3$。

當 $n = k+1$,

$[(k+1)k+1] + [(k+1)k+3] + \ldots + [k(k+1)k+(2k+1)]$

$= [k(k-1)+1] + [k(k-1)+3] + \ldots + [k(k-1)+(2k-1)] + (2k+2k+ \ldots +2k) + [(k+1)k+(2k+1)]$

$= (k+1)^3$

∴ $S(k+1)$ 成立。

故根據數學歸納法，$S(n)$ 對所有正整數 n 皆成立。

QB4 解

(a) $a_2 = 3a_1 + 1 = 3(2) + 1 = 7$

$a_3 = 3a_2 + 1 = 3(7) + 1 = 22$

(b) 設 $S(n)$ 為命題

“$a_n = \frac{5}{2}(3^{n-1}) - \frac{1}{2}$”。

當 $n = 1$,

$\frac{5}{2}(3^{n-1}) - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 = a_1$

∴ $S(1)$ 成立。

假設 $S(k)$ 成立。

即 $a_k = \frac{5}{2}(3^{k-1}) - \frac{1}{2}$。

考慮 $a_{k+1} = 3a_k + 1 = 3[\frac{5}{2}(3^{k-1}) - \frac{1}{2}] + 1 = \frac{5}{2}(3^k) - \frac{1}{2}$

∴ $S(k+1)$ 成立。

根據數學歸納法， $S(n)$ 對所有正整數 n 皆成立。

(c) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{5}{2}(3^{i-1}) - \frac{1}{2}\right] = \sum_{i=1}^{n}\frac{5}{2}(3^{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2} = \frac{\frac{5}{2}(3^n-1)}{3-1} - \frac{n}{2} = \frac{5}{4}(3^n-1) - \frac{n}{2}$

QB5 解

設 $S(n)$ 為命題

“$\log_7 2 + \log_7 14 + \log_7 98 + \ldots + \log_7(2 \times 7^n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+\log_7 4)$”。

當 $n = 1$,

左方 $= \log_7 2 + \log_7 14 = \log_7 28$

右方 $= \frac{1}{2}(1+1)(1+\log_7 4) = \log_7 7 + \log_7 4 = \log_7 28$

∴ $S(1)$ 成立。

假設 $S(k)$ 成立。

即 $\log_7 2 + \log_7 14 + \ldots + \log_7(2 \times 7^k) = \frac{1}{2}(k+1)(k+\log_7 4)$。

兩邊同時加上 $\log_7(2 \times 7^{k+1})$，得

$\log_7 2 + \log_7 14 + \ldots + \log_7(2 \times 7^k) + \log_7(2 \times 7^{k+1}) = \frac{1}{2}(k+1)(k+\log_7 4) + \log_7(2 \times 7^{k+1}) = \frac{1}{2}(k+2)(k+1+\log_7 4)$

∴ $S(k+1)$ 成立。

根據數學歸納法， $S(n)$ 對所有自然數 n 皆成立。