Ch.2 Solution

A1 解

$$\begin{cases} \left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{9}{2} \\ |x-1| \ge 2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} -\frac{9}{2} < x-\frac{1}{2} < \frac{9}{2} \\ x-1 \le -2 \text{ 或 } x-1 \ge 2 \end{cases}$$

$\therefore \quad -4 < x \le -1$ 或 $3 \le x < 5$

A2 解

$|2x-5| \ge 4x-1$

$2x-5 \ge 4x-1$ 或 $2x-5 \le -(4x-1)$

$x \le -2$ 或 $x \le 1$

$\therefore \quad x \le 1$

A3 解

情況一： $x > 1$

$|x+2|+|x-1| \le 5$

$(x+2)+(x-1) \le 5$

$x \le 2$

$\therefore$ 解為 $1 < x \le 2$。

情況二： $-2 \le x \le 1$

$|x+2|+|x-1| \le 5$

$(x+2)+[-(x-1)] \le 5$

$3 \le 5$

這對區間內所有的 x 值皆成立。

$\therefore$ 解為 $-2 \le x \le 1$。

情況三：$x < -2$

$|x+2|+|x-1| \le 5$

$-(x+2)-(x-1) \le 5$

$x \ge -3$

$\therefore$ 解為 $-3 \le x < -2$。

綜合以上三種情況，所求不等式的解為 $-3 \le x \le 2$。

A4 解

(a) 對於 $x > -2$，$x+2 > 0$。

$\frac{3}{x+2} < x$

$\therefore \quad 3 < x(x+2)$

$x^2+2x-3 > 0$

$\therefore \quad x < -3$ 或 $x > 1$

$\therefore$ 所求的解為 $x > 1$。

(b) 對於 $x < -2$，$x+2 < 0$。

$\frac{3}{x+2} < x$

$\therefore \quad 3 > x(x+2)$

$x^2+2x-3 < 0$

$\therefore \quad -3 < x < 1$

$\therefore$ 所求的解為 $-3 < x < -2$。

A5 解

數式 $x^2+2kx+k+2$ 對所有 x 皆為正，若

$(2k)^2-4(k+2) < 0$

$k^2-k-2 < 0$

$\therefore \quad -1 < k < 2$

A6 解

$x^2+kx+k = -3$

$x^2+kx+k+3 = 0$

該方程有實根若

$k^2-4(k+3) \ge 0$

$\therefore \quad k \le -2$ 或 $k \ge 6$

A7 解

(a) (i) $a^m-a^n = a^n(a^{m-n}-1)$

若 $a > 1$，則 a^n 及 $a^{m-n}-1$ 皆為正數。

$\therefore \quad a^m - a^n > 0$

即 $a^m > a^n$

(ii) 若 $0 < a < 1$，則 a^n 為正數但 $a^{m-n}-1$ 為負數。

$\therefore \quad a^m-a^n < 0$

即 $a^m < a^n$

(b) $(a^5-a^3)-(a^{-3}-a^{-5}) = (a^5-a^3)-a^{-8}(a^5-a^3)$

$= (a^5-a^3)(1-a^{-8})$

若 $a > 1$，則 a^5-a^3 及 $1-a^{-8}$ 皆為正數；

若 $0 < a < 1$，則 a^5-a^3 及 $1-a^{-8}$ 皆為負數。

由此可得，

$(a^5-a^3)-(a^{-3}-a^{-5}) > 0$

即 $a^5-a^3 > a^{-3}-a^{-5}$

A8 解

(a) $\because$ 對於任意實數 x，$x^2 \ge 0$。

$\therefore$ 對於任意實數 p 和 q，$(p^2-q^2)^2 \ge 0$。

$p^4-2p^2q^2+q^4 \ge 0$

由此，$p^4+q^4 \ge 2p^2q^2$ ...... (1)

(b) $(pq-rs)^2 \ge 0$

$\therefore \quad p^2q^2-2pqrs+r^2s^2 \ge 0$

由此，$p^2q^2+r^2s^2 \ge 2pqrs$ ...... (2)

(c) 採用與**(a)**相同的方法，可得

$r^4+s^4 \ge 2r^2s^2$ ...... (3)

(1) + (3)，$p^4+q^4+r^4+s^4 \ge 2p^2q^2+2r^2s^2$

由此，$p^4+q^4+r^4+s^4 \ge 4pqrs$ (由 (2))

A9 解

$9x-5 < 7x+3$

$x < 4$ .... (1)

$\frac{x}{3} < 2x+\frac{5}{6}$

$x > -\frac{1}{2}$ .... (2)

綜合(1)和(2)，所求的解為 $-\frac{1}{2} < x < 4$。

A10 解

$5 < \frac{1-2x}{3} < 9$ 或 $8+\frac{x+1}{7} > \frac{4-3x}{4}$

$\therefore \quad -13 < x < -7$ 或 $x > -8$

由此，所求的解為 $x > -13$。

A11 解

$3x^2-2x-7=0$ 的解為

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4(3)(-7)}}{2(3)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{88}}{6}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{22}}{3}。$$

$\therefore$ 所給出的不等式相等於

$$\left(x-\frac{1+\sqrt{22}}{3}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{22}}{3}\right) > 0。$$

$\therefore$ 所求的解為 $x < \frac{1-\sqrt{22}}{3}$ 或 $x > \frac{1+\sqrt{22}}{3}$。

A12 解

	$x<-\frac{1}{2}$	$x=-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<3$	$x=3$	$3<x<\frac{17}{3}$	$x=\frac{17}{3}$	$x>\frac{17}{3}$
$2x+1$	–	0	+	+	+	+	+
$x-3$	–	–	–	0	+	+	+
$3x-17$	–	–	–	–	–	0	+
$(2x+1)(x-3)(3x-17)$	–	0	+	0	–	0	+

∴ 所求的解為 $-\frac{1}{2}\le x\le 3$ 或 $x\ge\frac{17}{3}$。

A13 解

$$\frac{2x+1}{x-3}\ \le\ 5$$

∴ $(3x-16)(x-3)\ \ge\ 0$ 及 $x\ne 3$

由此, $x<3$ 或 $x\ge\frac{16}{3}$。

A14 解

$$\begin{cases}\frac{5}{x-1}<-6\\ 9x^2-4\ge 0\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}\frac{6x-1}{x-1}<0\\ x\le-\frac{2}{3}\ \text{或}\ x\ge\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{6}<x<1\\ x\le-\frac{2}{3}\ \text{或}\ x\ge\frac{2}{3}\end{cases}$$

∴ $\frac{2}{3}\le x<1$

A15 解

$$\left|\frac{4x-1}{7x+3}\right|>2$$

$$\therefore\quad \frac{4x-1}{7x+3}\ <\ -2\quad\text{或}\quad\frac{4x-1}{7x+3}\ >\ 2$$

$$-\frac{3}{7}\ <\ x\ <\ -\frac{5}{18}\quad\text{或}\quad-\frac{7}{10}\ <\ x\ <\ -\frac{3}{7}$$

B1 解

分別考慮以下 3 種情況。

情況一：$x<-4$

所給不等式為

$$\begin{aligned}|-(2x-1)-[-(x+4)]|&<3\\ -3<\ -x+5&<3\\ 2<\ x&<8\end{aligned}$$

這違反上述假設 $x<-4$, 因此這種情況沒有解。

情況二：$-4\le x<\frac{1}{2}$

所給不等式為

$$\begin{aligned}|-(2x-1)-(x+4)|&<3\\ -3<\ -3x-3&<3\\ -2<\ x&<0\end{aligned}$$

情況三：$x\ge\frac{1}{2}$

所給不等式為

$$\begin{aligned}|2x-1-(x+4)|&<3\\ -3<\ x-5&<3\\ 2<\ x&<8\end{aligned}$$

綜合三種情況, 所求的解為 $-2<x<0$ 或 $2<x<8$。

B2 解

(a) 判別式 $=(k-2)^2-4(1)(2k-7)$

$=k^2-12k+32$

(b) 所求 k 的值域為

$$k^2-12k+32\ <\ 0$$

即 $4<\ k\ <\ 8$

B3 解

$$\begin{aligned}y&=\frac{x^2-x+7}{x+1}\\ x^2-(y+1)x+7-y&=0\end{aligned}$$

若 x 為實數, 則

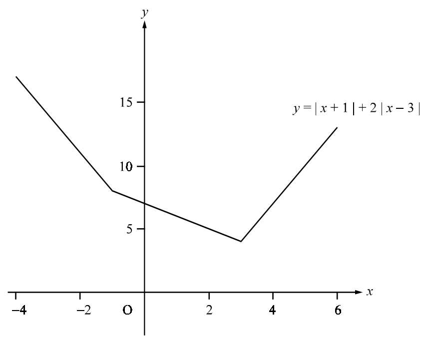
$$\begin{aligned}(y+1)^2-4(7-y)&\ge 0\\ y^2+6y-27&\ge 0\end{aligned}$$

即 $y\ \le\ -9$ 或 $y\ \ge\ 3$

B4 解

(a)

$$\begin{aligned}y&=|x+1|+2|x-3|\\ &=\begin{cases}-3x+5 & \text{當 } x<-1\\ -x+7 & \text{當 } -1\le x\le 3\\ 3x-5 & \text{當 } x>3\end{cases}\end{aligned}$$



(b) $|x+1|+2|x-3|\ =\ 6$

從圖像可見, 區間 $[-1, 3]$ 和 $[3, 6]$ 內各有一根。

∴ $-x+7=6$ 或 $3x-5\ =\ 6$

$x=1$ 或 $x\ =\ \frac{11}{3}$

(c) 若 $|x+1|+2|x-3|=5$, 則

$$-x+7=5 \quad 或 \quad 3x-5=5$$

$$x=2 \quad 或 \quad x=\frac{10}{3}$$

$\therefore$ $|x+1|+2|x-3| \le 5$

當 $2 \le x \le \frac{10}{3}$

B5 解

(a)

$$f(x) = 3x^2-12x+17$$
$$= 3(x-2)^2+5$$

$\therefore$ $p=3$; $q=-2$; $r=5$。

(b) $f(x)$ 在 $x=2$ 時極小。

$\therefore$ $f(x)$ 的極小值 $=5$

(c)

$$f(x) \le k$$
$$3x^2-12x+17-k \le 0$$

若解為 $1 \le x \le 3$, 則

$$3x^2-12x+17-k \equiv m(x-1)(x-3)$$

其中 m 為常數。

比較恆等式兩邊的係數, 得

$$m = 3$$

由於 $17-k = 3m$,

$\therefore$ $k = 8$

B6 解

$|x-5|+|2x+1|=10$ .... (*)

當 $x<-\frac{1}{2}$, (*)可寫成

$$-(x-5)-(2x+1)=10$$

$\therefore$ $x = -2$

當 $-\frac{1}{2} \le x \le 5$, (*)可寫成

$$-(x-5)+(2x+1)=10$$
$$x=4$$

當 $x>5$, (*)可寫成

$$x-5+2x+1=10$$

$x = \frac{14}{3}$ (捨去)

$\therefore$ 答案: $x=-2$ 或 $x=4$

B7 解

$(x-4)^2 \ge 5|x-4|+6$ .... (*)

當 $x<4$, (*) 可寫成

$$(x-4)^2 \ge -5(x-4)+6$$
$$[(x-4)+6][(x-4)-1] \ge 0$$
$$(x+2)(x-5) \ge 0$$

$\therefore$ $x \le -2$ 或 $x \ge 5$

即 $x \le -2$

當 $x \ge 4$, (*) 可寫成

$$(x-4)^2 \ge 5(x-4)+6$$
$$[(x-4)-6][(x-4)+1] \ge 0$$
$$(x-10)(x-3) \ge 0$$

$\therefore$ $x \le 3$ 或 $x \ge 10$

即 $x \ge 10$

由此, (*) 的解為 $x \le -2$ 或 $x \ge 10$。

或 $(x-4)^2 \ge 5|x-4|+6$

即 $|x-4|^2-5|x-4|-6 \ge 0$

$|x-4| \ge 6$ 或 $|x-4| \le -1$ (捨去)

$\therefore$ $x-4 \ge 6$ 或 $x-4 \le -6$

$x \ge 10$ 或 $x \le -2$