Ch.10 Solution

QA1 解

C_2: $x^2+y^2-2x-35 = 0$

$\therefore$ C_2的圓心 $= (1, 0)$ ； C_2的半徑$= 6$

$\because$ C_1的面積 $= \frac{1}{2}$ C_2的面積

$\therefore$ C_1的半徑 $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ C_2的半徑 $= \frac{6}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ C_1 的方程為 $(x-1)^2+y^2 = (\frac{6}{\sqrt{2}})^2$

QA2 解

半徑 $= \left|\frac{5(1)-12(-1)+9}{\sqrt{5^2+12^2}}\right| = 2$

$\therefore$ 所求的方程為 $(x-1)^2+(y+1)^2 = 2^2$

QA3 解

C_1: $x^2+y^2+2x-6y+5 = 0$

$\therefore$ C_1的圓心 G $= (-1, 3)$

BG 的方程為 $y-3 = \frac{3-2}{-1-1}(x+1)$

即 $x+2y-5 = 0$ ....(1)

AB 的垂直平分線的方程為

$(x-4)^2+(y+1)^2 = (x-1)^2+(y-2)^2$

即 $x-y-2 = 0$ ....(2)

解 (1) 和 (2), $x=3$, $y=1$。

$\therefore$ 所求圓的圓心 H 為 $(3, 1)$。

AH $= \sqrt{(4-3)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{5}$

$\therefore$ 所求圓的方程為 $(x-3)^2+(y-1)^2 = 5$

QA4 解

設 C 的方程為 $x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-6x)=0$。

$\because$ $P(2, -2)$ 在 C 上,

$\therefore$ $2^2+(-2)^2-4+k[2^2+(-2)^2-6(2)]=0$

$\therefore$ $k=1$

$\therefore$ 所求的方程為 $x^2+y^2-3x-2=0$。

QA5 解

設所求切線的方程為 $2x+y+k=0$。

$C: x^2+y^2+10x-2y+6 = 0$

即 $(x+5)^2+(y-1)^2 = 20$

$\therefore$ $\left|\frac{2(-5)+1+k}{\sqrt{2^2+1^2}}\right| = \sqrt{20}$

$\therefore$ $k = -1$ 或 19

即 所求的方程為 $2x+y-1=0$ 及 $2x+y+19=0$。

QA6 解

$C: (x-2)^2+(y-1)=25$

$\therefore$ 圓心 G 的坐標 $=(2, 1)$ ； 半徑 $r=5$

由 L 至 G 的距離 $= \left|\frac{2+2(1)+1}{\sqrt{1^2+2^2}}\right| = \sqrt{5}$

弦的長度 $= 2\times\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5}$

QA7 解

設 $y=mx$ 為所求的切線。

把 $y=mx$ 代入 $x^2+y^2-8x-4y+16 = 0$,

$\therefore$ $(1+m^2)x^2-(8+4m)x+16 = 0$

由於 $\Delta=0$,

$(8+4m)^2-4(1+m)^2(16) = 0$

$\therefore$ $m = 0$ 或 $\frac{4}{3}$

$\therefore$ 所求切線的方程為 $y=0$ 及 $y=\frac{4}{3}x$。

QA8 解

(a) $C_1: x^2+y^2-2x+6y+1=0$

圓心 $G_1 = (1, -3)$ ； 半徑 $r_1 = \sqrt{1^2+(-3)^2-1}=3$

$C_2: x^2+y^2-8x+8y+31=0$

圓心 $G_2 = (4, -4)$ ； 半徑 $r_2 = \sqrt{4^2+(-4)^2-31}=1$

$G_1G_2$$=$ $\sqrt{(1-4)^2+(-3+4)^2} = \sqrt{10}$

$\because$ $G_1G_2 < r_1+r_2$

$\therefore$ 圓 C_1 與 C_2 交於兩點。

(b) 所求的公弦為

$(x^2+y^2-2x+6y+1)-(x^2+y^2-8x+8y+31) = 0$

即 $3x-y-15 = 0$

QA9 解

(a) $PA = kPB$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = k\sqrt{x^2+(y-6)^2}$

$(k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2+4x-12k^2y+36k^2-4=0$

(b) 當 $k=1$, 軌跡為

$4x-12y+36-4 = 0$

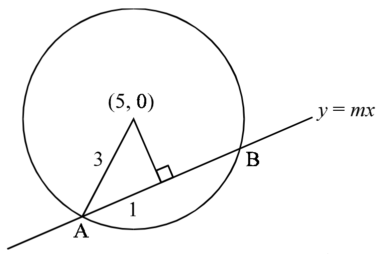
即 $x-3y+8 = 0$ 是一直線。

(c) 當 $k\neq1$, 軌跡是一圓。

QA10 解

(a) C 的圓心為 $(5, 0)$ ； 半徑為$\sqrt{5^2-16} = 3$

(b)



$(5, 0)$ 至直線 $y=mx$ 的距離 $= \left|\frac{5m}{\sqrt{1+m^2}}\right|$

$\therefore$ $\left(\frac{5m}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2+\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 3^2$

$\therefore$ $m = \pm2\sqrt{\frac{2}{17}}$

QA11 解

設點 N 的坐標為 (x, y)，點 B 的坐標為 (x_1, y_1)。

$\because$ $AN:NB = 3:2$

$\therefore$ $\begin{cases} x=\frac{2(5)+3x_1}{3+2} \\ y=\frac{2(-2)+3y_1}{3+2} \end{cases}$

即 $\begin{cases} x_1=\frac{5x-10}{3} \\ y_1=\frac{5y+4}{3} \end{cases}$

$\because$ 點 B 為圓 C 上的動點,

$\therefore$ $(x_1-1)^2+(y_1-2)^2=4$

故 $\left(\dfrac{5x-10}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{5y+4}{3}-2\right)^2=4$

$25x^2+25y^2-130x-20y+137=0$ 為所求的軌跡方程。

QA12 解

直線 L 的 x 截距 $=\dfrac{3m}{2m^2+6m+1}$

y 截距 $=\dfrac{3m}{m-2}$

依題意得 $\dfrac{3m}{2m^2+6m+1}=\dfrac{3m}{m-2}$

$m=0$ 或 $2m^2+6m+1=m-2$

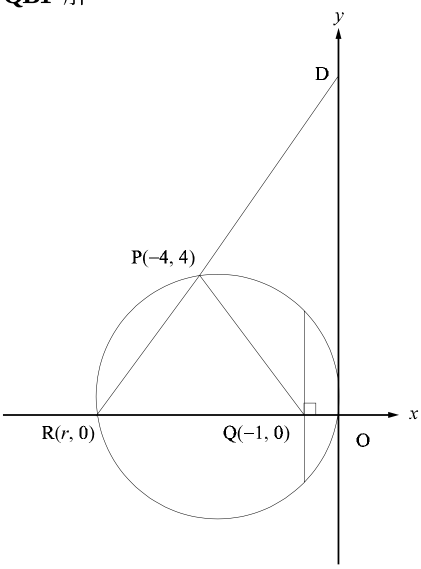
$2m^2+5m+3=0$

$\therefore\quad m=0,\ -\dfrac{3}{2}$ 或 -1

故 L 的方程為

$x-2y=0$ 或 $7x+7y-9=0$ 或 $x+y-1=0$。

QB1 解



(a) $\because\quad PQ=PR$

$(-4+1)^2+(4-0)^2=(-4-r)^2+(4-0)^2$

$\therefore\quad r=-7$ 或 -1 (捨去)

$\therefore$ R 的坐標為 $(-7,0)$。

(b) 設圓 C 的方程為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$。則

$$\begin{cases}0^2+0^2+D(0)+E(0)+F=0\\(-7)^2+0^2+D(-7)+E(0)+F=0\\(-4)^2+4^2+D(-4)+E(4)+F=0\end{cases}$$

$\therefore\quad D=7,\ E=-1,\ F=0$

$\therefore$ C 的方程為 $x^2+y^2+7x-y=0$ ……(1)

(c) 該弦的方程為 $x=-1$。 …………………(2)

把 (2) 代入 (1),

$(-1)^2+y^2+7(-1)-y=0$

$y=3$ 或 -2

$\therefore$ 弦的長度 $=3-(-2)=5$

(d) PR 的方程為

$y-0=\dfrac{4-0}{-4+7}(x+7)$

即 $4x-3y+28=0$

$\therefore$ D 為 $(0,\ \dfrac{28}{3})$。

切線的長度 $=\sqrt{0^2+\left(\dfrac{28}{3}\right)^2+7(0)-\dfrac{28}{3}}=\dfrac{10\sqrt{7}}{3}$

QB2 解

(a) 由 A 至 BC 的距離 $d=\left|\dfrac{3(3)-4(-1)-3}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=2$

(b) $AB=\dfrac{d}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

(c) 圓心為 A, 半徑為 AB 的圓的方程為

$(x-3)^2+(y+1)^2=\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$ …………(1)

解 (1) 和 $3x-4y-3=0$, 得

$B=\left(\dfrac{27+8\sqrt{3}}{15},\dfrac{3+2\sqrt{3}}{5}\right)$ 及 $C=\left(\dfrac{27-8\sqrt{3}}{15},\dfrac{3-2\sqrt{3}}{5}\right)$

QB3 解

(a) $C: x^2+y^2-4x+2y+1=0$

圓心 $G=(2,-1)$; 半徑 $r=\sqrt{2^2+(-1)^2-1}=2$

(b) $MG=\sqrt{(3-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{2}<r$

$\therefore$ M 為圓內的一點。

(c) $m_{MG}=\dfrac{0+1}{3-2}=1$

$\therefore$ 該弦的斜率 $=-1$

所求弦的方程為 $y-0=-1(x-3)$

即 $x+y-3=0$

(d) 圓族為 $x^2+y^2-4x+2y+1+k(x+y-3)=0$。

(e) 把 $(0,0)$ 代入 **(d)** 中的方程。

$1-3k=0$

$\therefore\quad k=\dfrac{1}{3}$

所求方程為 $x^2+y^2+\left(\dfrac{1}{3}-4\right)x+\left(\dfrac{1}{3}+2\right)y=0$

即 $3x^2+3y^2-11x+7y=0$

QB4 解

(a) C_1 的圓心 $=G_1=(-6,3)$

C_1 的半徑 $=r_1=5$

C_2 的圓心 $=G_2=(6,-6)$

C_2 的半徑 $=r_2=10$

兩圓心的距離 $=G_1G_2=\sqrt{(-6-6)^2+(3+6)^2}$

$=15$

而 $r_1+r_2=15$

因此, $G_1G_2=r_1+r_2$

$\therefore$ C_1 及 C_2 互相外切。

(b) **(i)** 所求公共切線方程為

$(x^2+y^2+12x-6y+20)-(x^2+y^2-12x+12y-28)=0$

$4x-3y+8=0$

(ii) 直線 G_1G_2 的方程為

$y-3=\dfrac{3+6}{-6-6}(x+6)$

即 $3x+4y+6=0$

解 $\begin{cases}4x-3y+8=0\\3x+4y+6=0\end{cases}$

可得 $x=-2,\ y=0$。

$\therefore$ T 的坐標 $=(-2,0)$

或 $\because\ G_1T:TG_2=5:10=1:2$

$\therefore$ T 的坐標 $=\left(\dfrac{2\times(-6)+1\times 6}{2+1},\ \dfrac{2\times 3+1\times(-6)}{2+1}\right)$

$=(-2,0)$