Ch.12　二維空間的向量

A1. 在四邊形 ABCD 中, M 和 N 分別為 AB 和 CD 的中點。
證明 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$。 (4 分)

A2. 已知 O 為 ΔABC 的外接圓心, 而 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。
證明 H 是 ΔABC 的垂心。 (6 分)

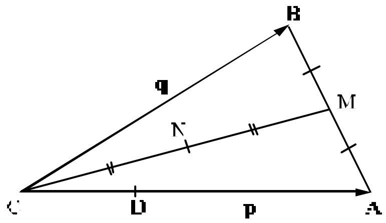
A3. 已知點 $P(-4, 3)$ 及 $Q(2, -6)$, 而點 M 內分 PQ 為 $r : 1$。

(a) 試以 r 表向量 $\overrightarrow{OM}$, 其中 O 為原點。

(b) 若 $OM \perp PQ$, 試求 M 的坐標。 (6 分)

A4. 兩向量 **a** 與 **b** 之間的夾角為 $\frac{p}{6}$, 而 $|\mathbf{a}|=\sqrt{3}$, $|\mathbf{b}|=1$。若 $\mathbf{p}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{q}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, 求 **p** 與 **q** 之間的夾角。
(6 分)

B1.



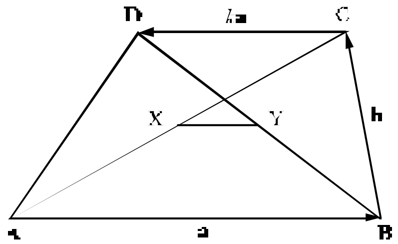
在 ΔABC 中, M 為 AB 的中點, N 為 CM 的中點, D 為 CA 上的一點, 且 $CA : DA = 1 : 2$。假設 $\overrightarrow{CA}=\mathbf{p}$ 及 $\overrightarrow{CB}=\mathbf{q}$。

(a) 試以 **p** 表 $\overrightarrow{CD}$。 (1 分)

(b) 試以 **p** 和 **q** 表 $\overrightarrow{CN}$。 (3 分)

(c) 證明點 B、N 及 D 共線。 (6 分)

B2.



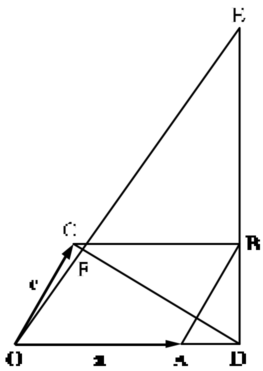
如圖所示, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$、$\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$、$\overrightarrow{CD}=k\mathbf{a}$, 其中 k 為一常數。X 和 Y 分別為 AC 和 BD 的中點。

(a) 試以 k、**a** 及 **b** 表 $\overrightarrow{BX}$ 及 $\overrightarrow{BY}$。 (4 分)

(b) 證明 XY // AB。 (3 分)

(c) 若 $|\overrightarrow{XY}|=5$, $|\mathbf{a}|=18$, 試求 $CD : AB$。 (5 分)

B3.



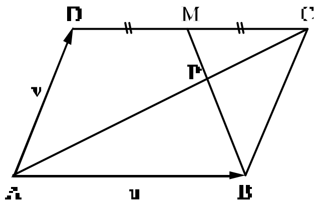
如圖所示, OABC 為一平行四邊形。D 在 OA 的延長線上使得 $AD=\frac{1}{3}OA$。E 在 DB 的延長線上使得 $DB : BE = 1 : 2$, 而 OE 和 CD 相交於 F。設 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ 和 $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$。

(a) 試以 **a** 及 **c** 表 $\overrightarrow{OE}$。 (4 分)

(b) 若 $DF : FC = k : 1$, 求 k 的值。 (2 分)

(c) 若 $OA = 3$, $OC = 2$, $\angle AOC = 60°$, 求 $\angle EFD$, 答案須準確至 0.1°。 (6 分)

B4.



ABCD 為一平行四邊形，而 M 為 CD 的中點。AC 和 BM 相交於點 P。設 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$ 及 $\overrightarrow{AD} = \mathbf{v}$。

(a) 試以 **u**、**v** 表 $\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{BM}$。 (2 分)

(b) 設 $\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{BP} = b\overrightarrow{BM}$。試求 a 及 b 的值。 (6 分)

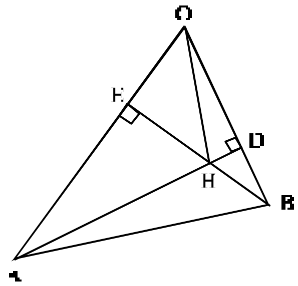
(c) 試述 P 的意義。 (1 分)

B5. 一質點在一平面上的初始方位向量為 $\overrightarrow{OA} = 7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$。它以每秒二單位的速度沿著 $-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ 的方向移動。

(a) 求 10 秒後該質點的方位向量。 (4 分)

(b) 該質點何時會最接近原點 O。 (6 分)

B6.



如圖所示，H 為 ΔOAB 中，兩高 AD 及 BE 的交點，而 OA = 3，OB = 2 及 $\angle$AOB = 60°。
設 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ 及 $\overrightarrow{OH} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$。

(a) 試以 m、n、**a** 及 **b** 表 $\overrightarrow{AH}$ 及 $\overrightarrow{BH}$。 (2 分)

(b) 求 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的值。 (2 分)

(c) 由此，計算 m 和 n 的值。 (5 分)

B7. 已知 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ 及 $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$。

(a) 試以 k 表 $|2\mathbf{a} - k\mathbf{b}|^2$。 (5 分)

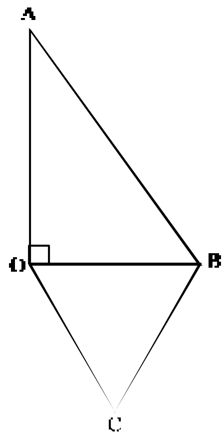
(b) 已知 k 在某值取得 $|2\mathbf{a} - k\mathbf{b}|$ 的極小值，求這個 k 的值及這極小值。 (5 分)

B8. P(3, 4)、Q(1, k) 及 R(−7, 24) 為一平面上的三點，其中 k 為一常數而 O 為原點。

(a) 試以 k 表 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 和 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}$。 (2 分)

(b) 若 $\angle$POQ = $\angle$QOR，試求 k 的值。 (7 分)

B9.



在四邊形 OABC 中，$\angle$AOB = 90°，OA = 3，OB = OC = BC = 2。

(a) 試求 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 及 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$。 (5 分)

(b) 若 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$，求常數 m 和 n 的值。 (5 分)

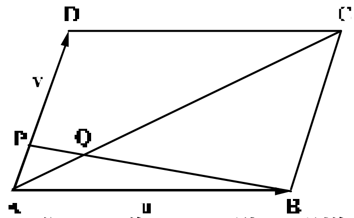
B10. **u** 和 **v** 為單位向量，其夾角為 q，而 **u** 和 $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ 所成的角則是 120°。若 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = m$，

(a) 試以 m 表 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ 和 $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|$， (4 分)

(b) 試求 m 的值，及 (4 分)

(c) 由此，求 q 的值。 (4 分)

B11.



如圖所示， ABCD 為一平行四邊形，而點 P 分 AD 為 1 : 3，點 Q 則為 BP 及 AC 的交點。設 AQ = kAC，$\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$ 及 $\overrightarrow{AD} = \mathbf{v}$。

(a) 試以 **u**、**v** 表 $\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{BP}$。 (3 分)

(b) 試以 k、**u** 及 **v** 表 $\overrightarrow{PQ}$。 (3 分)

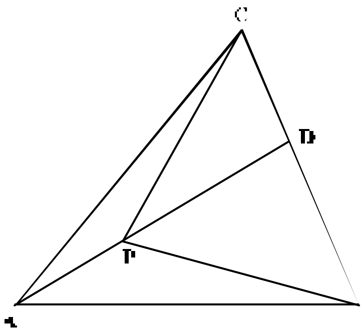
(c) 由此，利用 (a) 的結果，求 k 的值。 (3 分)

B12. 已知 $|\mathbf{a}| = 2$，$|\mathbf{b}| = 3$，$|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 7$，而 $\mathbf{a} + l\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 互相垂直，其中 l 為一常數。

(a) 試求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 的值。 (4 分)

(b) 試求 l 的值。 (5 分)

B13.



如圖所示，BD = $\frac{3}{5}$BC 而 AP : PD = 5 : 7。

(a) 試以 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 表 $\overrightarrow{AD}$。 (3 分)

(b) 證明 $7\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$。 (6 分)

B14. 已知 $\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$，$\overrightarrow{OB} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$，而點 C 分 AB 為 3 : 2。

(a) 試求點 C 的坐標。 (3 分)

(b) 試求 $\cos \angle ABO$。 (6 分)

完