

## Ch18-21 不定積分 Indefinite Integral

A1. 求不定積分 Find the indefinite integral  $\int (x-2)(x^5+1)dx$ 。

A2. 求不定積分 Find the indefinite integral  $\int \frac{3t+1}{\sqrt[3]{t}} dt$ 。

A3. 求不定積分 Find the indefinite integral  $\int \frac{\cos^2 \theta}{1-\sin \theta} d\theta$ 。

A4. 求不定積分 Find the indefinite integral  $\int (\sec x - \tan x)^2 dx$ 。

A5. 已知  $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - \frac{2}{x^2}$ ，而當  $x = 1$  時， $y = 5$ 。求當  $x = 2$  時， $y$  的值。

Given that  $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - \frac{2}{x^2}$ , and that  $y = 5$  when  $x = 1$ , find the value of  $y$  when  $x = 2$ .

A6. 一泡沫在時間  $t$  秒的體積  $V \text{ cm}^3$  滿足  $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}t + 3\sqrt{t}$ 。已知當  $t = 4$  時， $V = 23$ 。試以  $t$  表  $V$ 。

The volume,  $V \text{ cm}^3$ , of a bubble at time  $t$  seconds, satisfies  $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}t + 3\sqrt{t}$ . Given that  $V = 23$  when  $t = 4$ , find  $V$  in terms of  $t$ .

A7. (a) 求 Find  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ 。

(b) 由此 Hence，求 find  $\int x^{-\frac{3}{2}} dx$ 。

A8. (a) 求 Find  $\frac{d}{d\theta} (\sin^2 3\theta)$ 。

(b) 由此 Hence，求 find  $\int \sin 6\theta d\theta$ 。

A9. 求 Find  $\int \sqrt[4]{x} dx$ 。

A10. 求 Find  $\int \frac{1}{\sin x \tan x} dx$ 。

A11. (a) 展開 Expand  $\left( x - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)^3$ 。

(b) 由此 Hence，求 find  $\int \left( x - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)^3 dx$ 。

A12. (a) 求 Find  $\frac{d}{dx} (x \sin x)$ 。

(b) 由此 Hence，求 find  $\int x \cos x dx$ 。

A13. (a) 已知 Given that  $y = (x-9)\sqrt{x-3}$ ，求 find  $\frac{dy}{dx}$ 。

(b) 由此 Hence，或用其他方法 or otherwise，求 find  $\int \frac{x-5}{\sqrt{x-3}} dx$ 。

B1. 一曲線通過點  $(2, 0)$ 。該曲線上任意點  $(x, y)$  的斜率為  $(3x-1)(x+2)$ 。

A curve passes through  $(2, 0)$ . Its gradient is  $(3x-1)(x+2)$  at any point  $(x, y)$  on the curve.

(a) 求該曲線的方程。

Find the equation of the curve.

(b) 求該曲線的轉向點。

Find the turning points of the curve.

(c) 描繪該曲線的圖像。

Sketch the curve.

B2. (a) 已知 Given that  $y = \frac{\sin \theta - 2 \sin 2\theta + \sin 3\theta}{\sin \theta + 2 \sin 2\theta + \sin 3\theta}$ ，證明 prove that  $y = -\tan^2 \frac{\theta}{2}$ 。

(b) 由此 Hence，計算 evaluate  $\int \frac{\sin \theta - 2 \sin 2\theta + \sin 3\theta}{\sin \theta + 2 \sin 2\theta + \sin 3\theta} d\theta$ 。

**B3.** 對於曲線上任意點  $(x, y)$ ,  $\frac{dy}{dx} = kx^2$ , 其中  $k$  為常數。已知當  $x=2$  時,  $y = \frac{1}{2}$  及  $\frac{dy}{dx} = 6$ 。

For any point  $(x, y)$  on a curve,  $\frac{dy}{dx} = kx^2$ , where  $k$  is a constant. It is known that  $y = \frac{1}{2}$  and  $\frac{dy}{dx} = 6$  when  $x = 2$ .

(a) 求  $k$  的值。

Find the value of  $k$ .

(b) 求此曲線的方程。

Find the equation of the curve.

## 積分法的技巧 Techniques of Integration

**A1.** 求不定積分 Find the indefinite integral  $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ 。

**A2.** 一曲線上任意點  $(x, y)$  的斜率為  $\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 4)(x^3 + 4x + 1)^{\frac{1}{5}}$ 。若曲線通過點  $(0, 2)$ , 求曲線的方程。

[提示: 設  $x^3 + 4x + 1 = u$ 。]

The slope at any point  $(x, y)$  of a curve is given by  $\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 4)(x^3 + 4x + 1)^{\frac{1}{5}}$ . If the curve passes through  $(0, 2)$ , find the equation of the curve. [Hint: Put  $x^3 + 4x + 1 = u$ .]

**A3.** 利用代換 By using the substitution  $u = \sin x + \cos x$ , 或用其他方法 or otherwise, 求不定積分 find the indefinite integral  $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt[3]{\sin x + \cos x}} dx$ 。

**A4.** 求不定積分 Find the indefinite integral  $\int \sec^4 x \tan^3 x dx$ 。

**A5.** 利用代換 Use the substitution  $x = 5 \tan \theta$ , 求不定積分 find the indefinite integral  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{25 + x^2}} dx$ 。

**A6.** 求不定積分 Find the indefinite integral  $\int \sin^2 7x \cos^3 7x dx$ 。

**A7.** 求 Find  $\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx$ 。

**A8.** 一曲線上任意點  $(x, y)$  的斜率為  $\frac{dy}{dx} = (x+6)\sqrt[3]{x^2 + 12x - 5}$ 。若此曲線通過點  $(1, 9)$ , 求此曲線的方程。 The slope at any point  $(x, y)$  of a curve is given by  $\frac{dy}{dx} = (x+6)\sqrt[3]{x^2 + 12x - 5}$ . If the curve passes through the point  $(1, 9)$ , find the equation of the curve.

**A9.** 求 Find  $\int \cot^6 3x \csc^4 3x dx$ 。

**A10.** 求 Find  $\int \sin^3 x \sec^4 x dx$ 。

**A11.** 計算 Evaluate  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[3]{27 - 26x^4}} dx$ 。

**A12.** 利用代換 Using the substitution  $u = \sin^2 x$ , 求 find  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{25 \sin^2 x + 9 \cos^2 x}} dx$ 。

**A13.** (a) 考慮 By considering  $\frac{d}{dx}(x f(x))$ , 證明 show that  $\int x f'(x) dx = x f(x) - \int f(x) dx$ 。

(b) 由此 Hence, 或用其他方法 or otherwise, 求不定積分 find the indefinite integral  $\int x \sin x dx$ 。

**B1.** (a) 利用代換 using the substitution  $x = 6 \sin \theta$ , 求 Find  $\int \sqrt{36 - x^2} dx$ 。

(b) 求 Find  $\frac{d}{dx}(x\sqrt{36 - x^2})$ 。

(c) 由此 Hence, 或用其他方法 or otherwise, 求 find  $\int \frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} dx$ 。

**B2.** (a) 證明 Show that  $\frac{d}{dx}(\sec^{n-2} x \tan x) = (n-1) \sec^n x - (n-2) \sec^{n-2} x$ 。

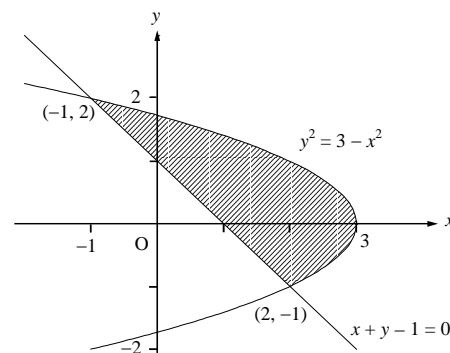
(b) 設 Let  $I_n = \int \sec^n x dx$ 。證明 Show that  $I_n = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$ , 其中 for  $n \geq 2$ 。

(c) 由此 Hence, 計算 evaluate  $\int \sec^8 x dx$ 。

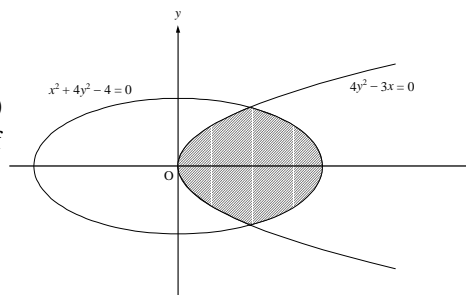
- B3.** (a) 證明 Show that  $\frac{d}{dx} \left[ x^{n-1} (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}} \right] = [(2n+1)ax^{n-1} - (n+2)x^n] (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ .
- (b) 設 Let  $I_n = \int x^n (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ , 其中 where  $n$  為正整數 is a positive integer. 證明 Show that  $I_n = \frac{2n+1}{n+2} \cdot a I_{n-1} - \frac{1}{n+2} x^{n-1} (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}$ .
- (c) 已知 It is given that  $\int \sqrt{b^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{b^2 - x^2} + \frac{b^2}{2} \sin^{-1} \left( \frac{x}{b} \right) + C$ , 求 find  $\int \sqrt{10x - x^2} dx$ .
- (d) 由此 Hence, 求 find  $\int x^2 (10x - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ .
- B4.** (a) 證明恆等式 Prove the identity  $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos^2 x}$ .
- (b) 利用代換 By using the substitution  $x = \sin t$ , 或用其他方法 or otherwise, 求不定積分 find the indefinite integral  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ .
- (c) 求不定積分 Find the indefinite integral  $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ .

### 定積分 Definite Integral

- A1.** 利用代換 Using the substitution  $u = 8 + x^3$ , 計算 evaluate  $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}} dx$ .
- A2.** 計算積分 Evaluate the integral  $\int_{-1}^2 (x^2 - 2|x-1| + 1) dx$ .
- A3.** 函數  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - \frac{1}{4}$  在  $x = -1$  有轉向點, 且  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ . 求常數  $a$  及  $b$  的值。  
The function  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - \frac{1}{4}$  has turning point at  $x = -1$  and  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ , find the values of the constants  $a$  and  $b$ .
- A4.** 求拋物線  $y^2 = 3 - x$  及直線  $x + y - 1 = 0$  所圍成的區域的面積。  
Find the area bounded by the parabola  $y^2 = 3 - x$  and the line  $x + y - 1 = 0$ .



- A5.** 圖中的陰影部分由橢圓  $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$  及拋物線  $4y^2 - 3x = 0$  所圍成。求陰影部分繞  $x$  軸旋轉所得旋轉體的體積。  
In the figure, the shaded area is bounded by the ellipse  $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$  and the parabola  $4y^2 - 3x = 0$ . Find the volume of the solid of revolution of the shaded area about the  $x$ -axis.



- A6. (a) 試把區間  $[0, 4]$  分為 4 個等距的子區間，並以下列方法取  $z_i$ ，求  $\int_0^4 (9-2x)dx$  的近似值。

Find an approximate value of  $\int_0^4 (9-2x)dx$  by dividing  $[0, 4]$  into 4 equal subintervals and taking  $z_i$  to be

- (i) 每個子區間的左邊終點，  
the left end-point of each subinterval,
- (ii) 每個子區間的中點，  
the midpoint of each subinterval,
- (iii) 每個子區間的右邊終點。  
the right end-point of each subinterval.

- (b) 評論 (a) 的結果。  
Comment on the results obtained in (a).

- A7. 試把區間  $[1, 4]$  分為以下數量的子區間，並取每個子區間的中點為  $z_i$ ，求  $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$  的近似值。

Find an approximate value of  $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$  by dividing  $[1, 4]$  into

- (a) 三個等距的子區間  
3 equal subintervals,
- (b) 六個等距的子區間  
6 equal subintervals,

and taking  $z_i$  to be the midpoint of each subinterval.

- A8. 已知 Given  $\int_{-3}^2 f(x)dx = 9$ ， $\int_{-3}^2 f(x)dx = 15$  及  $\int_{-3}^2 g(x)dx = 11$ ，求 find

(a)  $\int_2^7 f(x)dx$ ，

(b)  $\int_2^7 [3f(x) - 4g(x)]dx$ 。

- A9. 已知 Given that  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$  及  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$ ，求 find

(a)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ ，

(b)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ ，

(c)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 3)^2 dx$ 。

- A10. 設  $I_{n,m} = \int_0^a x^n (a-x)^m dx$ ，其中  $a$  為一常數， $m$  和  $n$  為正整數。

Let  $I_{n,m} = \int_0^a x^n (a-x)^m dx$ ，where  $a$  is a constant,  $m$  and  $n$  are positive integers.

- (a) 考慮  $x^{n+1}(a-x)^m$  的導數，證明  $I_{n,m} = \frac{m}{n+1} I_{n+1,m-1}$ 。

Show that  $I_{n,m} = \frac{m}{n+1} I_{n+1,m-1}$  by considering the derivative of  $x^{n+1}(a-x)^m$ .

- (b) 由此 Hence，或用其他方法 or otherwise，計算積分 evaluate the integral  $\int_0^a x^{\frac{7}{2}} (a-x)^3 dx$ 。

- A11. (a) 證明恆等式 Prove the identity  $\frac{1}{1+\sin\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 。

- (b) 由此 Hence，或用其他方法 or otherwise，求 find  $\int \frac{1}{1+\sin\theta} d\theta$ 。

- (c) 利用代換  $\theta = \frac{\pi}{2} - x$ ，計算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x} dx$ 。

Evaluate  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x} dx$  by using the substitution  $\theta = \frac{\pi}{2} - x$ .

- A12. (a) 描繪  $y = |x|(x-3)$  在  $-2 \leq x \leq 4$  的圖像。  
Sketch the graph of  $y = |x|(x-3)$  for  $-2 \leq x \leq 4$ .

(b) 計算 Evaluate  $\int_{-2}^4 |x|(x-3)dx$ 。

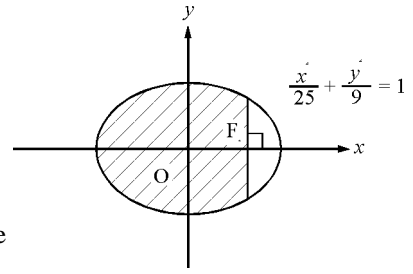
A13. 圖中所示為橢圓 The figure shows the ellipse  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ,  $F_2$  為其中一個焦點 is one of its foci.

(a) 求  $F_2$  的坐標。

Find the coordinates of  $F_2$ .

(b) 若陰影部分繞著  $x$  軸旋轉  $360^\circ$ , 求所得旋轉體的體積。

If the shaded region is rotated through  $360^\circ$  about the  $x$ -axis, find the volume of the solid of revolution.



A14. (a) 在同一圖中, 描繪曲線  $C_1: y = x^2$  及  $C_2: y = \sqrt{-x}$  的圖像。

Sketch the curves  $C_1: y = x^2$  and  $C_2: y = \sqrt{-x}$  in the same diagram.

(b) 求曲線  $C_1$  及  $C_2$  所圍成的面積。

Find the area bounded by the curves  $C_1$  and  $C_2$ .

A15. (a) 求常數  $m > 0$  的值使曲線  $y = x^2$  及  $y = mx$  所圍成的面積為 4.5。

Find the constant  $m > 0$  such that the region bounded by the curves  $y = x^2$  and  $y = mx$  has area 4.5.

(b) 若把 (a) 的區域繞著  $y$  軸旋轉, 求所得旋轉體的體積。

If the region in (a) is revolved about the  $y$ -axis, find the volume of the solid of revolution.

B1. 圖中所示為一拱形設計, 其底部 AB 為 2 單位, 高 OC 為 3 單位。拱形 ACB 為拋物線的一部分。

The figure shows an arch design with base AB 2 units and altitude OC 3 units. The arch ACB is a part of a parabola.

(a) 求拋物線的方程。

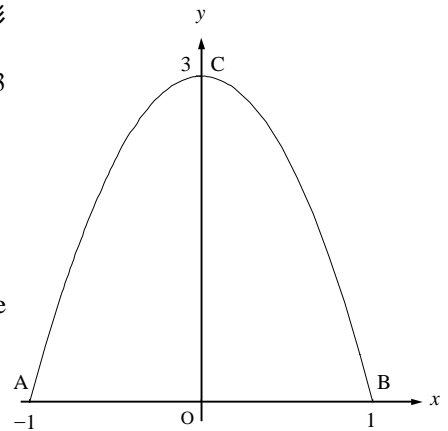
Find the equation of the parabola.

(b) 求拱形設計的面積。

Find the area of the arch design.

(c) 若一直線  $y = m$  把該拱形設計分為面積相等的兩部分, 求  $m$  的值。

If a line  $y = m$  divides the arch design into two parts of equal area, find the value of  $m$ .



B2. 曲線  $y = f(x)$  在  $(x, y)$  的斜率為  $\frac{dy}{dx} = \sin x + \cos x$ 。此曲線經過點  $(0, -1)$ 。

The gradient at  $(x, y)$  of a curve  $y = f(x)$  is  $\frac{dy}{dx} = \sin x + \cos x$ . The curve passes through the point  $(0, -1)$ .

(a) 求此曲線的方程。

Find the equation of the curve.

(b) 求  $f(x) = 0$  的通解。

Find the general solution of  $f(x) = 0$ .

(c) 求此曲線和  $x$  軸由  $x = 0$  至  $x = \pi$  所圍成的面積。

Find the area bounded by the curve and the  $x$ -axis from  $x = 0$  to  $x = \pi$ .

B3. 一球體由圓  $x^2 + y^2 = 169$  繞  $x$  軸旋轉而得。一半徑為  $r$  的圓形截面, 沿  $x$  軸穿過球體並形成一洞。

A solid sphere is formed by rotating the circle  $x^2 + y^2 = 169$  about the  $x$ -axis. Then a hole of circular section, radius  $r$ , is drilled through it along the  $x$ -axis.

(a) 利用積分, 求球體的體積。

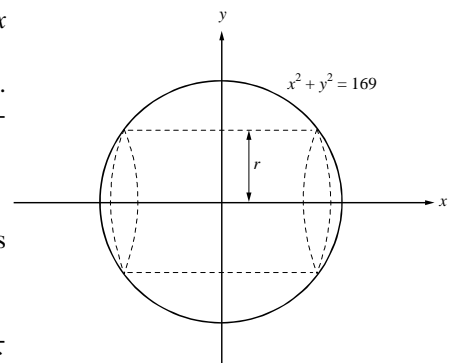
Find the volume of the sphere by integration.

(b) 證明餘下的體積為 Show that the remaining volume is

$$\frac{4}{3} \pi (169 - r^2)^{\frac{3}{2}}.$$

(c) 若洞的半徑以每秒 0.2 單位遞增, 求當洞的半徑為 0.5 單位時, 餘下體積的變化率。

If the radius of the hole is increasing at 0.2 unit per second, find the rate of change of the remaining volume when the radius of the hole is 5 units.



B4. (a) 求方程  $\tan x = \sqrt{2} \cos x$  的通解。

Find the general solution of the equation  $\tan x = \sqrt{2} \cos x$ .

(b) 求  $y = \tan x$  及  $y = \sqrt{2} \cos x$  的圖像在第一象限相交的銳角。

Find the acute angle of intersection of the graphs of  $y = \tan x$  and  $y = \sqrt{2} \cos x$  in the first quadrant.

- (c) 求由曲線  $y = \tan x$ 、 $y = \sqrt{2} \cos x$  及  $x = 0$  所圍成的區域繞  $x$  軸旋轉所得旋轉體的體積。

Find the volume of the solid of revolution of the area bounded by the curves  $y = \tan x$ ,  $y = \sqrt{2} \cos x$  and  $x = 0$  about the  $x$ -axis.

### 積分法(綜合)

1. (a) 描繪曲線 Sketch the curve  $y = 1 + \sin x$  在  $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  的圖像。

- (b) 證明 Prove that  $(1 + \sin x)^2 = \frac{3}{2} + 2\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x$ 。

- (c) 求此曲線、 $x$  軸及  $y$  軸所圍成的區域的面積。

Find the area of the region bounded by the curve, the  $x$ -axis and the  $y$ -axis.

- (d) 若 (c) 中的區域繞  $x$  軸旋轉一圈, 求所得旋轉體之體積。

If the region in (c) is rotated through one revolution about the  $x$ -axis, find the volume of the solid of revolution.

2. 在圖中, 曲線  $y = 4x - x^2$  及  $x$  軸所圍成的區域被直線  $y = 2x$  分為區域 P 及 Q。

In the figure, the region bounded by the curve  $y = 4x - x^2$  and the  $x$ -axis is divided by the line  $y = 2x$  into regions P and Q.

- (a) 求區域 P 的面積。

Find the area of region P.

- (b) 求區域 P 的面積和區域 Q 的面積的比率。

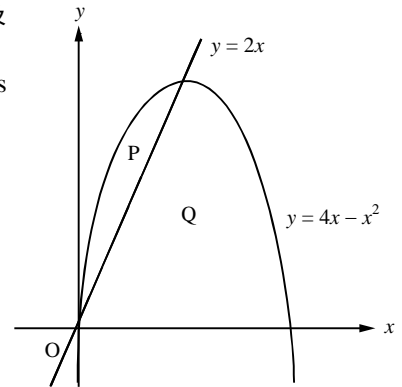
Find the ratio of areas of regions P and Q.

- (c) 求區域 P 繞  $y$  軸旋轉所得旋轉體的體積。

Find the volume of the solid of revolution of region P about the  $y$ -axis.

- (d) 求區域 Q 繞  $x$  軸旋轉所得旋轉體的體積。

Find the volume of the solid of revolution of region Q about the  $x$ -axis.



3. 由曲線  $y = x^2 - 4$ 、 $y = x^2 + 1$  及直線  $y = 0$ 、 $y = k$  所圍成的區域繞  $y$  軸旋轉  $360^\circ$ , 形成一瓶。該瓶的容量為  $8\pi$  單位<sup>3</sup>。

A clay pot is formed by rotating the region bounded by the curves  $y = x^2 - 4$ ,  $y = x^2 + 1$  and the lines  $y = 0$ ,  $y = k$  through four right angles about the  $y$ -axis. The capacity of the pot is  $8\pi$  units<sup>3</sup>.

- (a) 求  $k$  的值。

Find the value of  $k$ .

- (b) 求製造此瓶所需原料的體積。

Find the volume of material required in making the pot.

- (c) 以固定的速率 2 單位<sup>3</sup>/分鐘把水注入瓶內。

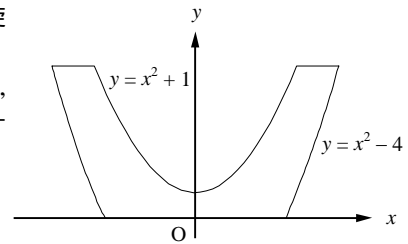
Water is poured into the pot at a constant rate of 2 unit<sup>3</sup>/minute.

- (i) 求當水深為  $h$  單位時, 瓶中水的體積。

Find the volume of water in the pot when the depth of water is  $h$  units.

- (ii) 當水深為 3 單位時, 水位上升的速率為何?

What is the rate of increase in water level when the depth is 3 units?



4. (a) 利用代換 Using the substitution  $u = \sqrt{3} \tan t$ , 計算 evaluate  $\int_{-1}^1 \frac{1}{3+u^2} du$ 。

- (b) 證明若  $f(x)$  在  $[0, a]$  可積, 則

Prove that if  $f(x)$  is integrable on  $[0, a]$ , then

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx = \frac{1}{2} \int_0^a [f(x) + f(a-x)] dx。$$

- (c) 假設 Suppose  $g(x)$ ,  $h(x)$  及  $g(x)h(x)$  可積 are integrable on  $[0, a]$ . 若 If  $g(x) = g(a-x)$  及 and

$$h(x) + h(a-x) = k, \text{ 證明 prove that } \int_0^a g(x)h(x) dx = \frac{1}{2} k \int_0^a g(x) dx。$$

- (d) 由此 Hence, 或用其他方法 or otherwise, 計算 evaluate  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{3 + \cos^2 x} dx$ 。

5. 一物件由靜止開始沿著一直線移動。在首 4 秒內, 其在時間  $t$  秒的加速度為  $3t^2 \text{ m/s}^2$ 。稍後, 此物件的加速度為  $-\frac{9}{2}t \text{ m/s}^2$ , 直至再次靜止。

An object starts from rest and moves along a straight line. Its acceleration at time  $t$  seconds is  $3t^2 \text{ m/s}^2$  for the first 4 seconds and then  $-\frac{9}{2}t \text{ m/s}^2$  before it comes to rest again.

- (a) 求此物件在時間  $t$  的速度。

Find the velocity of the object at time  $t$ .

- (b) 此物件何時會再次靜止。  
When will the particle come to rest again?
- (c) 試繪出此運動的加速度時間圖及速度時間圖。  
Draw the acceleration-time graph and velocity-time graph of the motion.
- (d) 求此物件移動的總距離。  
Find the total distance travelled by the object.

6. 在一曲線上的任意點,  $\frac{d^2y}{dx^2} = px + q$ , 其中  $p$  及  $q$  為常數。在點  $(1, 2)$ , 曲線的切線方程為  $3x + y - 5 = 0$ 。點  $(2, 0)$  為曲線其中的一個轉向點。

At any point on a curve,  $\frac{d^2y}{dx^2} = px + q$ , where  $p$  and  $q$  are constants. At the point  $(1, 2)$ , the equation of the tangent to the curve is  $3x + y - 5 = 0$ . The point  $(2, 0)$  is one of the turning points of the curve.

- (a) 求  $p$  及  $q$  的值。  
Find the values of  $p$  and  $q$ .
- (b) 求此曲線的方程。  
Find the equation of the curve.
- (c) 求此曲線的轉向點。  
Find the turning points of the curve.
- (d) 描繪此曲線在  $-1 \leq x \leq 3$  的圖像。  
Sketch the curve for  $-1 \leq x \leq 3$ .

7. 一汽車 P 在交通燈柱 A, 由靜止開始向前直駛 9 秒並在另一交通燈柱 B 前停下。在離開 A 後, 此車在時間  $t$  秒的加速度  $a \text{ m/s}^2$  為  $a = 18t - 3t^2$ 。

A car P starts from rest at a traffic light post A, goes straightway for 9 seconds and stops at another traffic light post B. At time  $t$  seconds after leaving A, the acceleration,  $a \text{ m/s}^2$ , of the car is given by  $a = 18t - 3t^2$ .

- (a) 計算 P 的最大加速度及此時  $t$  的值。  
Calculate the greatest acceleration of P and the value of  $t$  when this occurs.
- (b) 以  $t$  表汽車的速度  $v \text{ m/s}$ 。  
Express the velocity,  $v \text{ m/s}$ , of the car in terms of  $t$ .
- (c) 描繪汽車在  $0 \leq t \leq 9$  時的速度時間圖。  
Sketch the velocity-time graph of the car for  $0 \leq t \leq 9$ .
- (d) 求 A 和 B 之間的距離。  
Find the distance between A and B.

8. (a) 設  $a$  為一常數 be a constant。利用代換 using the substitution  $x = a \tan \theta$ , 求 Find  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ 。
- (b) 利用代換 using the substitution  $t = \tan \frac{\theta}{2}$ , 求 Find  $\int \frac{1}{13 + 12 \cos \theta} d\theta$ 。
- (c) 證明 Show that  $\frac{d}{d\theta} \left( \frac{q \sin \theta}{p + q \cos \theta} \right) = \frac{p}{p + q \cos \theta} - \frac{p^2 - q^2}{(p + q \cos \theta)^2}$ , 其中 where  $p$  及  $q$  為常數 are constants。
- (d) 由此 Hence, 或用其他方法 or otherwise, 求 find  $\int \frac{d\theta}{(13 + 12 \cos \theta)^2}$ 。

9. 在圖中, KL 為橢圓 E:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  的通徑。頂點在原點 O 的拋物線 P 與橢圓相交於點 K 及 L。

In the figure, KL is a latus rectum of the ellipse E:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . The parabola P with its vertex at the origin O intersects the ellipse at K and L.

- (a) 求 K 及 L 的坐標。  
Find the coordinates of K and L.
- (b) 求拋物線 P 的方程。  
Find the equation of the parabola P.
- (c) 當橢圓及拋物線所圍成的區域繞以下軸旋轉時, 求所得旋轉體之體積。  
Find the volume of the solid of revolution when the area enclosed by the ellipse and the parabola is rotated about
- (i)  $x$  軸 axis,
- (ii)  $y$  軸 axis.

