ESTABILIDADE EM FREQÜÊNCIA

A estabilidade de um sistema pode ser verificada através da margem de ganho e da margem de fase.

Margem de ganho: é o fator pelo qual o ganho do sistema pode ser incrementado sem que o sistema se torne instável. É a quantidade no qual o ganho do sistema pode ser aumentado para alcançar o valor limite de 1, quando o ângulo de fase é 180°.

$$1 = \text{Margem de ganho} \times |G(j\omega)|_{\phi=180^o}$$

em decibéis, temos:

$$\text{Margem de ganho} = 20 \log 1 - 20 \log(|G(j\omega)|_{\phi=180^o})$$

$$\text{Margem de ganho} = -20 \log(|G(j\omega)|_{\phi=180^o})$$

Margem de fase: é o ângulo no qual o diagrama de Nyquist deve ser deslocado para que o sistema atinja o limiar de instabilidade, quando o módulo do sistema for igual a 1.

$$\text{Margem de fase } (\gamma) = 180^o + \phi$$

Para ser estável a margem de ganho e a margem de fase do sistema devem ser positivas. A figura abaixo (fig.13.1) mostra as margens de ganho e de fase no diagrama de Bode.

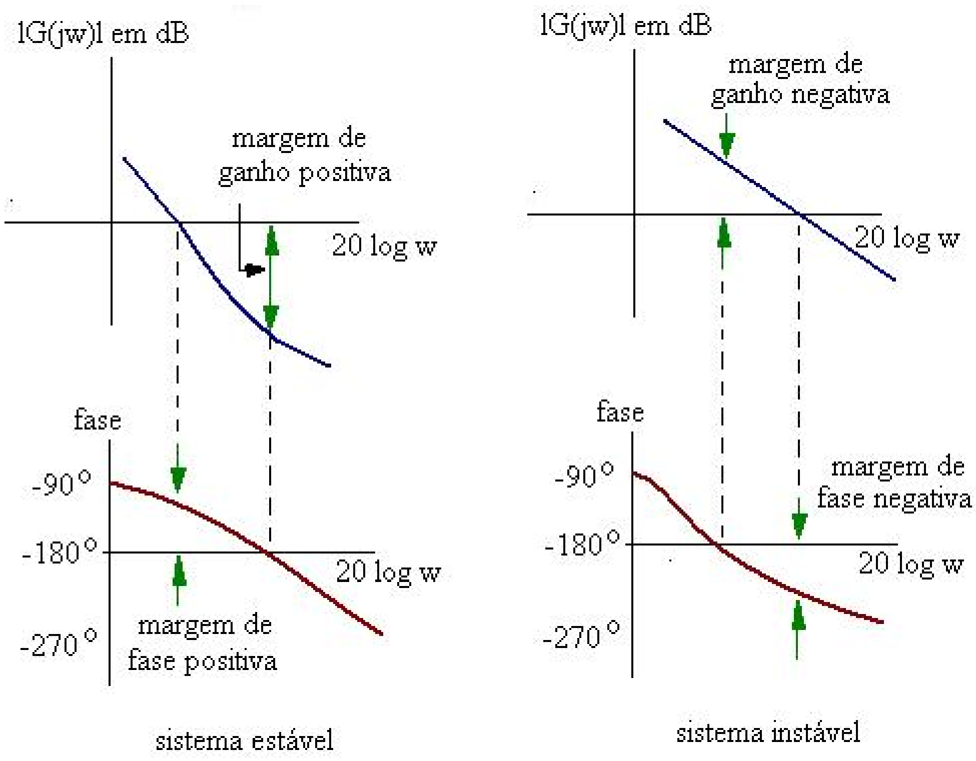


fig.13. 1 - Margem de ganho e de fase no diagrama de Bode

A figura 13.2 mostra as margens de ganho e de fase no diagrama de Nyquist e para a carta de Nichols.

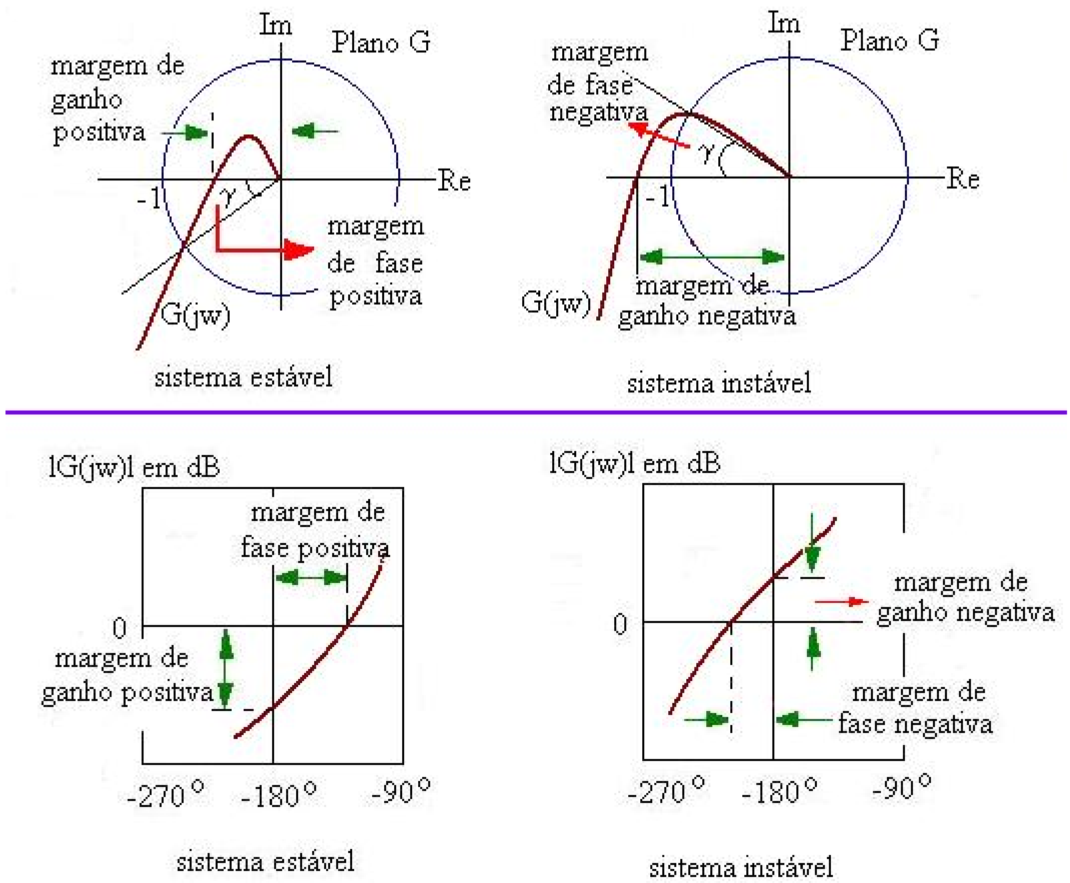


fig.13. 2 - Margem de ganho e de fase para o diagrama de Nyquist e para carta de Nichols

Exemplo 1: Um sistema tem a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{k}{s(2s+1)(3s+1)}$$

Pede-se: (a) o valor de k para que o sistema seja criticamente estável e (b) Para uma margem de ganho de 2 dB, o sistema é estável?

Resposta: Calculado o valor de k para o sistema ser criticamente estável:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(2j\omega+1)(3j\omega+1)} = \frac{k}{-5\omega^2 + j\omega(1-6\omega^2)}$$

$$G(j\omega) = \frac{-5k\omega^2}{25\omega^4 + \omega^2(1-6\omega^2)^2} - j\frac{k\omega(1-6\omega^2)}{25\omega^4 + \omega^2(1-6\omega^2)^2}$$

O módulo e a fase são dados por:

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{25\omega^4 + \omega^2(1-6\omega^2)^2}}$$

$$\phi = -arctg\,\frac{\omega(1-6\omega^2)}{-5\omega^2} = arctg\,\frac{(1-6\omega^2)}{5\omega}$$

(a) para $\phi = 180^o$, o módulo deve ser 1 para um sistema criticamente estável:

$$\phi = arctg\,\frac{(1-6\omega^2)}{5\omega} = 180^o \qquad \Rightarrow 1-6\omega^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \omega = 1/\sqrt{6}$$

para este ângulo, o módulo deve valer 1 para ser criticamente estável:

$$|G(j1/\sqrt{6})| = \frac{k}{\sqrt{25(1/\sqrt{6})^4 + (1/\sqrt{6})^2(1-6(1/\sqrt{6})^2)^2}} = 1$$

$$k = 0{,}833$$

(b) Para o sistema possuir a margem de ganho de 2 dB, temos:

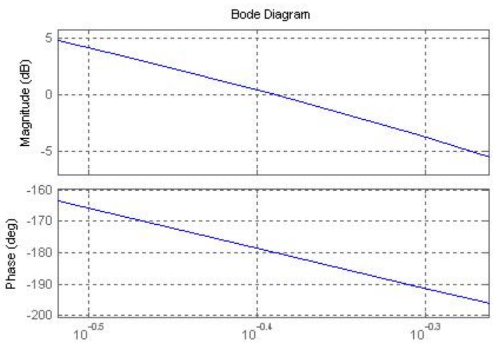
Margem de ganho $= -20\log(|G(j\omega)|_{\phi=180^o})$

$$2 = -20\log(k/0{,}833)$$

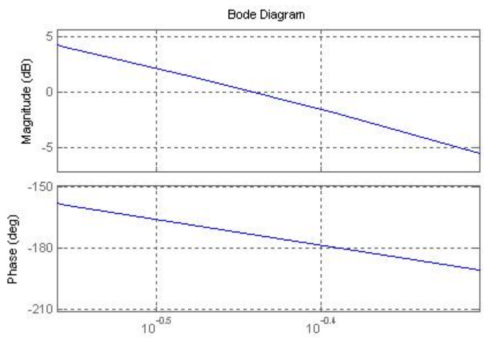
$$-0{,}1 = \log(k/0{,}833) \qquad multiplicando \quad por \quad 10^x$$

$$0{,}7943 = k/0{,}833 \qquad \Rightarrow \qquad k = 0{,}6617$$

O sistema será estável com esse valor de k, pois o mesmo é inferior ao valor do k crítico (0,833)



(a)



(b)

A figura (a) mostra o diagrama de Bode para k=0,833. Notar que quando $\phi=180^o$ o módulo = 1. A figura (b) mostra o diagrama de Bode para k=0,6617, notar que o sistema tem margem de ganho e margem de fase positivas.

Exemplo 2: Qual a margem de fase do sistema que possui a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

Solução: no domínio da freqüência temos:

$$G(j\omega) = \frac{4}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{4}{-\omega^2 + 2j\omega} = \frac{-4\omega^2}{\omega^4 + 4\omega^2} - j\frac{8\omega}{\omega^4 + 4\omega^2}$$

O módulo e a fase são dados por:

$$|G(j\omega)| = \frac{4}{\sqrt{\omega^4 + 4\omega^2}}$$

$$\phi = -arctg\frac{8\omega}{-4\omega^2} = arctg\frac{2}{\omega}$$

A margem de fase é medida quando o módulo tem o valor de 1, assim:

$$|G(j\omega)| = \frac{4}{\sqrt{\omega^4 + 4\omega^2}} = 1$$

$$\omega^4 + 4\omega^2 - 16 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16+64}}{2} = \frac{-4 \pm 8{,}9}{2}$$

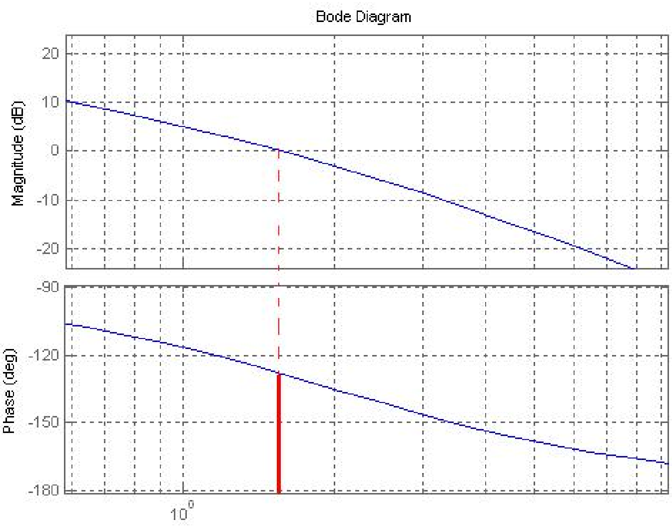
Considerando apenas os valores positivos de ω:

$$\omega^2 = 2{,}472 \quad \Rightarrow \quad \omega = 1{,}57$$

O ângulo de fase é dado por:

$$\phi = arctg\frac{2}{\omega} = arctg(1.27)$$

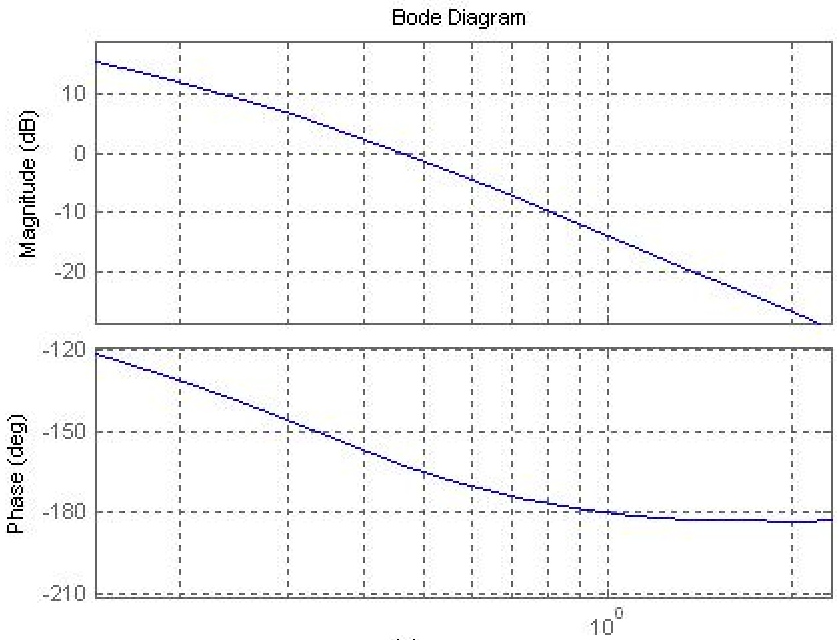
$$\phi = 51{,}86^o$$



Como tanto a parte real como a parte imaginária são negativas, esse ângulo é o ângulo relativo a -180^0 e é a própria margem de fase.

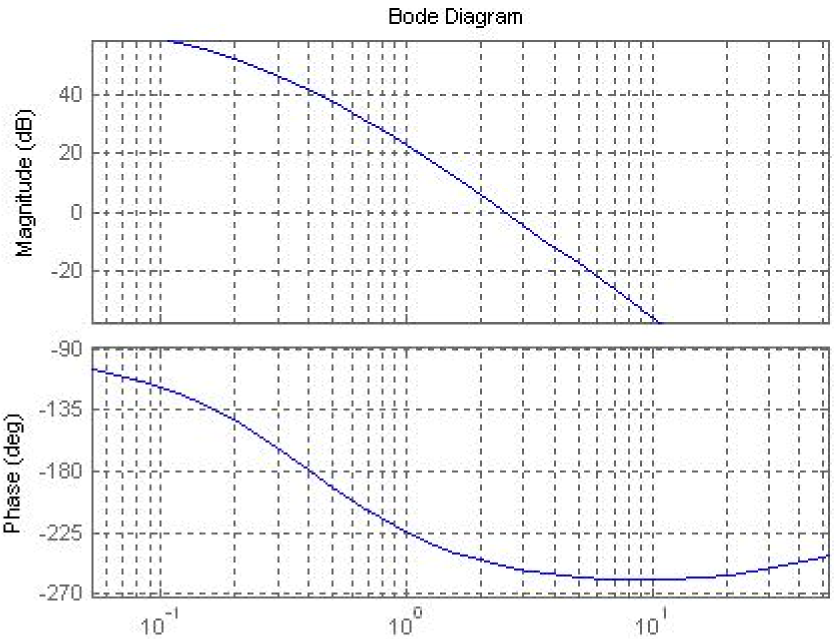
Exercício 1: Dado o diagrama de Bode abaixo, pergunta-se: qual margem de ganho, qual a margem de fase e se o sistema é estável ou instável.

a)



(a)

b)



Exercício 2: Qual o valor de k para que o sistema abaixo ser:

$$G(s) = \frac{k}{s(2s+1)(s+1)}$$

a) criticamente estável Resp: k=1,5
b) fornecer uma margem de ganho de 3 dB Resp: k=1,06

Exercício 3: Qual é a margem de fase para o sistemas abaixo:

a)

$$G(s) = \frac{9}{s(s+3)}$$

Resp.: 51,8°

b) $G(s) = \dfrac{2}{s(s+1)}$

Resp.: 51°

Relação entre resposta transitória e resposta em freqüência para um sistema de segunda ordem

A figura 13.3 mostra o diagrama em bloco de um sistema de segunda ordem.

A função de transferência desse sistema em malha fechada é dada por:

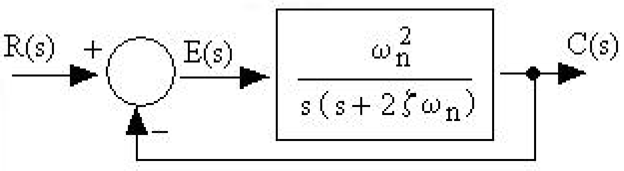


fig.13. 3 - Diagrama em bloco de um sistema de 2a. ordem

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2}$$

onde: ζ → coeficiente de amortecimento
ω→ freqüência natural não amortecida

O módulo e a fase deste sistema é dado por:

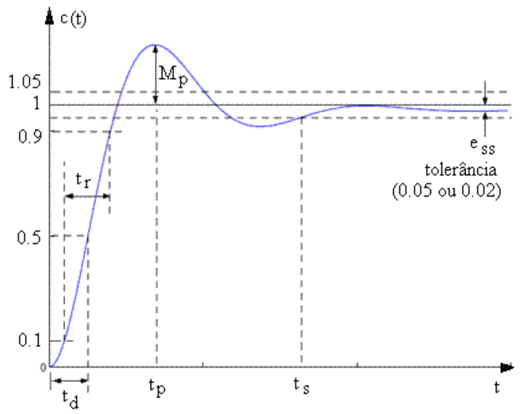
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta\omega/\omega_n\right]^2}} \qquad (13.1)$$

$$tg\phi = -\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

O pico da freqüência é denominado de freqüência de ressonância (ωr) e acontece em:

$$\omega r = \omega n\sqrt{1-2\zeta^2}\ , \quad \text{para } 0 < \zeta < 0{,}707 \qquad (13.2)$$

A figura 13.4 mostra o diagrama de módulo de Bode e a resposta de um sistema no tempo para uma entrada degrau:



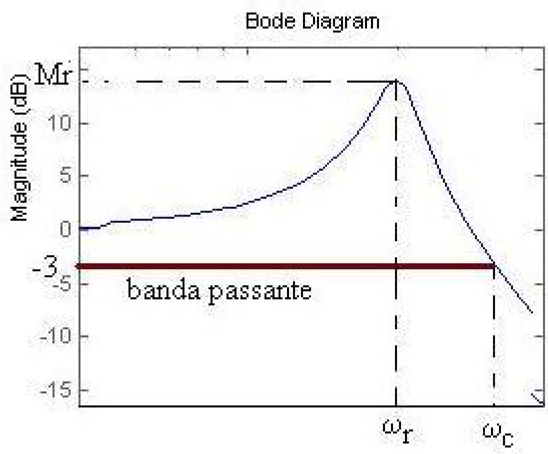


fig.13. 4 - Respota temporal e diagrama de Bode.

A resposta para um sistema de segunda ordem subamortecido é dado por:

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}.sen(\omega_d t)\right)$$

Onde: $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ (13.3)

Nota-se através das equações (13.2) e (13.3) que para valores pequenos de ζ, a freqüência de ressonância e a freqüência natural amortecida são quase iguais. Portanto ω_r indica a velocidade transitória do sistema.

Substituindo a freqüência de ressonância (13.2) na equação do módulo (13.1), o módulo de ressonância será dado por:

$$Mr = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

O valor do sobre sinal (Mp) da resposta do degrau unitário é dado por (vide apostila 5-pag.82):

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Considerando o sistema em malha aberta:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

A freqüência crítica para o sistema ocorre quando o módulo de G(s) for unitário, assim:

$$\omega = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}$$ Nessa freqüência o ângulo de fase será:

$$\phi = -90^o - arctg\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}}{2\zeta}$$, com esse ângulo a margem de fase será:

$$\gamma = 180^o - 90^o - arctg\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}}{2\zeta}$$

$$\gamma = 90^o - arctg\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}}{2\zeta}$$

$$\gamma = arctg\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}}{2\zeta}$$

Geralmente Mr indica a estabilidade relativa. Para um desempenho satisfatório o valor de Mr deve estar no intervalo de 1 < Mr < 1,4 (0 db< Mr <3 dB). Valor maior que 1.5, a resposta transitória apresenta diversos sobre-sinais.

A banda passante (ou faixa de passagem) é a faixa de freqüência no qual o módulo está acima de – 3dB (vide figura 13.4, onde ωc é denominada freqüência de corte).

SEÇÃO MATLAB

Para obter o pico de ressonância, a freqüência de ressonância e a banda passante no MatLab

```
[mag,phase,w] = bode (num, den,w)   ;%armazena os valores de Bode
[Mp, k] = max(mag);                 % obtém o valor máximo
Pico_ressonancia = 20*log10(Mp)     % calcula o pico de ressonância
Freq_ressonancia = w(k)             % obtém o valor da freq.de ressonância
```

Para banda passante é necessário inserir o programa:

```
n= 1;
wile 20*log10(mag(n)>=-3; n = n + 1;
end
Banda_passante = w(n)
```

Exemplo: Esboçar o o diagrama de Nyquist para:

$$G(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}$$

Fazendo num = 16 → num = [0 0 16]

e den = (s^2 + 4s +16) → den = [1 4 16]

```
num = [0 0  16 ];         % numerador de G(s)
den =[1 4 16];
[mag,phase,w] = bode (num, den,w)   ;%armazena os valores de Bode
[Mp, k] = max(mag);                 % obtém o valor máximo
Pico_ressonancia = 20*log10(Mp)     % calcula o pico de ressonância
Freq_ressonancia = w(k)             % obtém o valor da freq.de ressonância

n= 1;
wile 20*log10(mag(n)>=-3; n = n + 1;
end
Banda_passante = w(n)
```