

RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

A resposta em frequência é a resposta em regime permanente de um sistema, quando o mesmo é submetido a uma entrada senoidal. Quando uma entrada senoidal é aplicada a um sistema linear, a resposta do sistema será senoidal com a mesma frequência. A saída irá diferir da entrada apenas em amplitude e fase.

A função de transferência pode ser escrita como uma relação de dois polinômios em s :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\dots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\dots(s + p_n)} \quad (11.1)$$

onde: K – ganho do sistema

z_1, z_2, \dots, z_m – zeros do sistema

p_1, p_2, \dots, p_n – pólos do sistema

Considerando uma entrada senoidal do tipo:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t) \quad , \text{ onde } A \text{ é a amplitude do sinal} \\ \text{e } \omega \text{ é a frequência angular em rad/s}$$

A transformada de Laplace desta entrada (vide tabela de transformadas) é dada por:

$$X(s) = \frac{A \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} \quad (11.2)$$

Substituindo a equação (11.2) em (11.1) e calculando a saída, tem-se:

$$Y(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\dots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\dots(s + p_n)} \cdot \frac{\omega t}{s^2 + \omega^2} \quad (11.3)$$

Aplicando a expansão em frações parciais a equação acima torna-se:

$$Y(s) = \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \dots + \frac{b_n}{s + s_n} + \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} \quad (11.4)$$

A transformada inversa de Laplace da equação (11.4) é dada por:

$$y(t) = b_1 \cdot e^{-s_1 t} + b_2 \cdot e^{-s_2 t} + \dots + b_n \cdot e^{-s_n t} + a \cdot e^{-j\omega t} + \bar{a} \cdot e^{j\omega t} \quad (11.5)$$

Para um sistema estável $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$ tem partes negativas. Portanto quando t tende ao infinito, os termos $e^{-s_1 t}, e^{-s_2 t}, \dots, e^{-s_n t}$ tendem a zero. Assim, todos os termos da equação (11.5), exceto os dois últimos, se anulam no regime permanente.

Os termos que se anulam são termos de regime transitório. O termo de regime permanente é devido a entrada senoidal. Assim a saída em estado estacionário é dada por:

$$y(t) = A|G(j\omega)| \cdot \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (11.6)$$

onde: $G(j\omega) \rightarrow$ é o módulo da função de transferência $G(s)$
 $\phi \rightarrow$ ângulo de defasagem entre a entrada e a saída senoidal.

Substituindo s por $j\omega$, passa-se do domínio s para o domínio da frequência.

CÁLCULO DO MÓDULO E FASE

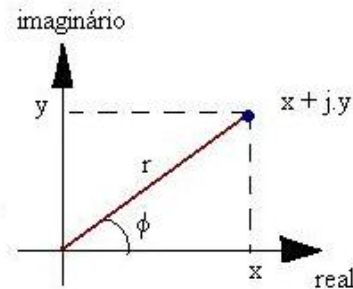
Considere um número complexo:

$$x + jy$$

O módulo e a fase são dados por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{y}{x}$$



Representações	
forma cartesiana:	$x + jy$
forma polar:	$r(\cos \phi + j \text{sen } \phi)$
ou	r / ϕ
Onde: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$	
$\text{tg } \phi = \frac{y}{x}$	

Exemplo 1: Considere um sistema cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{5}{s+1}$$

Qual a saída em regime permanente quando este sistema é sujeito a uma entrada senoidal de:

$$x(t) = 4 \cdot \text{sen}(3t + 60^\circ)$$

Solução: para resolver este problema (envolvendo entrada senoidal), deve-se:

- 1- passar a função para o domínio da frequência substituindo s por $j\omega$.
- 2- Após isso, calcula-se o módulo e a fase do sistema.
- 3- Substitui os valores achados na equação de saída.

Transformando a função de transferência do domínio s para o domínio da frequência, tem-se:

$$G(j\omega) = \frac{5}{j\omega + 1} \quad \text{aqui substituiu } s \text{ por } j\omega$$

Multiplicando pelo conjugado:

$$G(j\omega) = \frac{5}{j\omega + 1} \cdot \frac{(-j\omega + 1)}{(-j\omega + 1)} = \frac{5}{\omega^2 + 1} - \frac{j5\omega}{\omega^2 + 1}$$

Calculando o módulo e a fase

$$|G(j\omega)| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{25}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{25\omega^2}{(\omega^2 + 1)^2}} = 5 \sqrt{\frac{1 + \omega^2}{(\omega^2 + 1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x} = \frac{-5\omega}{5} = -\omega$$

Como y é negativo e x é positivo, isto indica que a saída é atrasada em relação à entrada. A entrada específica $\omega = 3$ rad/s. Substituindo esse valor no módulo e na fase, tem-se:

$$|G(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{\omega^2 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{3^2 + 1}} = 1,58$$

$$\operatorname{tg} \phi = -\omega = -3$$

$$\phi = -71,5^\circ$$

A entrada foi dada por:

$$x(t) = 4 \cdot \operatorname{sen}(3t + 60^\circ)$$

A saída será dada por:

$$y(t) = A \cdot |G(j\omega)| \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$y(t) = 4 \cdot 1,58 \cdot \operatorname{sen}(3t + 60^\circ - 71,5^\circ)$$

$$y(t) = 6,32 \cdot \operatorname{sen}(3t - 11,5^\circ)$$

Resposta em frequência para sistema de primeira ordem

Sendo a função do sistema de primeira ordem igual a:

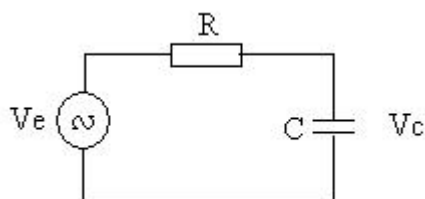
$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts} \quad \text{onde } T \text{ é a constante de tempo} \quad (11.7)$$

O módulo e a fase do sistema será dado por:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \omega^2 T^2)}} \quad (11.8)$$

$$\text{tg } \phi = \frac{y}{x} = -\omega T \quad (11.9)$$

Exemplo 2: Qual o módulo e a fase do circuito abaixo:



Pela leis das malhas:

$$v_e(t) = R.i(t) + v_c(t)$$

Aplicando Laplace

$$V_e(s) = R.I(s) + V_c(s)$$

Como a corrente que passa no resistor é a mesma do capacitor, tem-se;

$$i(t) = C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} \quad \text{ou}$$

$$I(s) = sCV_c(s)$$

substituindo a corrente na equação acima

$$V_e(s) = sRCV_c(s) + V_c(s)$$

$$V_e(s) = V_c(s)(RCs + 1)$$

nota-se que é um sistema de primeira ordem

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{(1 + RCs)}$$

Passando para a frequência ($s=j\omega$)

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega RC)}$$

onde a constante de tempo é $T=RC$

Utilizando as equações (11.8 e 11.9), o módulo e a fase são dados por:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + \omega^2 R^2 C^2)}}$$

$$\text{tg } \phi = \frac{y}{x} = -\omega RC$$

Resposta em frequência para sistema de segunda ordem

Sendo a função do sistema de segunda ordem igual a:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{onde } \omega_n \text{ é a frequência natural} \quad (11.10)$$

e ζ é o coeficiente de amortecimento

Substituindo s por $j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_n + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega\omega_n} = \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j2\zeta\omega/\omega_n}$$

Multiplicando pelo conjugado:

$$G(j\omega) = \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j2\zeta\omega/\omega_n} \cdot \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2 - j2\zeta\omega/\omega_n}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] - j2\zeta\omega/\omega_n}$$

$$G(j\omega) = \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2 - j2\zeta\omega/\omega_n}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2}$$

O módulo e a fase são dados por:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2}} \quad (11.11)$$

$$\text{tg } \phi = \frac{y}{x} = -\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (11.12)$$

exemplo 3: Dada a seguinte função de transferência abaixo, calcular o módulo e a fase do sistema. Considere que a frequência do sinal de entrada seja 2 rad/s (ω).

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

deixando a função acima na forma de uma função de segundo grau:

$$G(s) = \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \quad \text{onde: } \omega_n = \sqrt{2}$$

$$2\zeta\omega_n = 2 \Rightarrow \zeta = 0,707$$

Utilizando as equações (11.11 e 11.12), o módulo e a fase são dados por:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(2/\sqrt{2}\right)^2\right]^2 + \left[2 * 0,707 * 2/\sqrt{2}\right]^2}} = 0,3172$$

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} = -\frac{2 * 0,707 * 2/\sqrt{2}}{1 - (2/\sqrt{2})^2} = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$\phi = 63,4^\circ \quad \text{ou} \quad \phi = 63,4^\circ - 180^\circ = -116,6^\circ$$

Exercício 1: Qual o módulo e a fase das funções de transferência abaixo:

a) $G(s) = \frac{4}{1 + 5s}$

Resp.: $|G(j\omega)| = 4/\sqrt{1 + 25\omega^2}$ $\operatorname{tg} \phi = -5\omega$

b) $G(s) = \frac{4}{5 + s}$

Resp.:
 $|G(j\omega)| = 0,8/\sqrt{1 + 0,04\omega^2}$ $\operatorname{tg} \phi = -0,2\omega$

c) $G(s) = \frac{18}{s^2 + 27s + 9}$

Resp: $|G(j\omega)| = 2/\sqrt{\left[1 - (\omega/3)^2\right]^2 + \left[9(\omega/3)^2\right]}$ $\operatorname{tg} \phi = -3\omega/\left[1 - (\omega/3)^2\right]$

Exercício 2: Qual a saída para os sistemas cujas funções de transferência são dadas abaixo quando o mesmo são submetidos a uma entrada senoidal de:

$$x(t) = 5 \cdot \text{sen}(3t + 20^\circ)$$

a) $G(s) = \frac{1}{s + 4}$

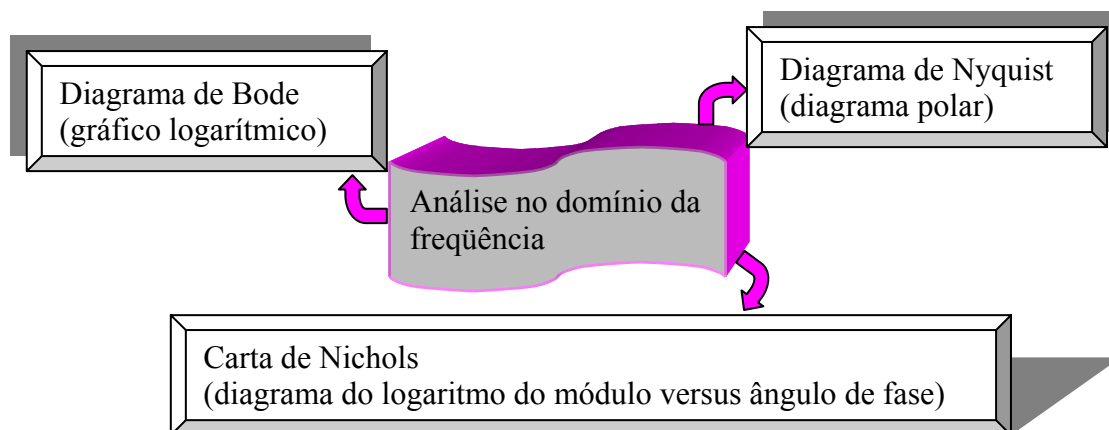
Resp.: $y(t) = 1,5625 \text{sen}(3t - 16,87^\circ)$

b) $G(s) = \frac{2}{0,5s^2 + 4s + 1}$

Resp.: $y(t) = 1,628 \text{sen}(3t + 93,73^\circ)$

DIAGRAMA DE BODE

Para análise das funções de transferência senoidais geralmente são utilizadas uma das três representações:



O diagrama de Bode é formado por dois gráficos, um do módulo em dB pela frequência e outro do ângulo de fase pela frequência. Uma vantagem do diagrama de Bode é que a multiplicação de vários módulos se transforma em somas.

Seja a seguinte função de transferência:

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)| |G_3(j\omega)| \dots$$

Passando para a representação padrão de 20 vezes o logaritmo na base 10, essa equação torna-se:

$$\log|G(j\omega)| = 20 \cdot \log|G_1(j\omega)| + 20 \cdot \log|G_2(j\omega)| + 20 \cdot \log|G_3(j\omega)| + \dots$$

O diagrama de Bode pode ser construído através da decomposição da função de transferência em unidades básicas. As unidades básicas são:

- I) Ganho constante K
- II) Pólo na origem
- III) Zero na origem
- IV) Pólo real
- V) Zero real
- VI) Par de pólos complexos
- VII) Par de zeros complexos

I) Ganho constante K

Ocorre quando $G(s) = K$,

passando para o domínio da frequência:

$$G(j\omega) = K$$

O módulo (em decibéis) e a fase dessa função são dados por:

$$|G(j\omega)| = 20 \cdot \log K$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{0}{K} \Rightarrow \phi = 0^\circ$$

A figura 11.1 mostra os gráficos para o ganho constante.

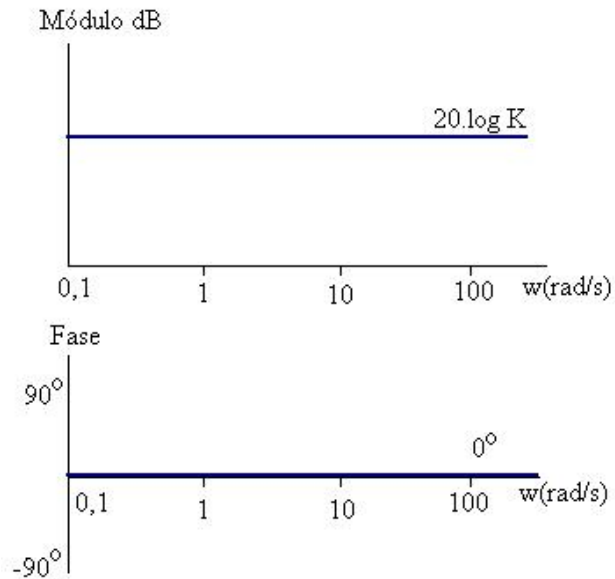


Fig.11. 1 – Diagrama de Bode para um ganho constante

II) Pólo na origem

Ocorre quando $G(s) = \frac{1}{s}$,

passando para o domínio da frequência:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}$$

O módulo (em decibéis) e a fase dessa função são dados por:

$$|G(j\omega)| = 20 \cdot \log \frac{1}{\omega} = -20 \cdot \log \omega$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{(-1/\omega)}{0} = -\infty \Rightarrow \phi = -90^\circ$$

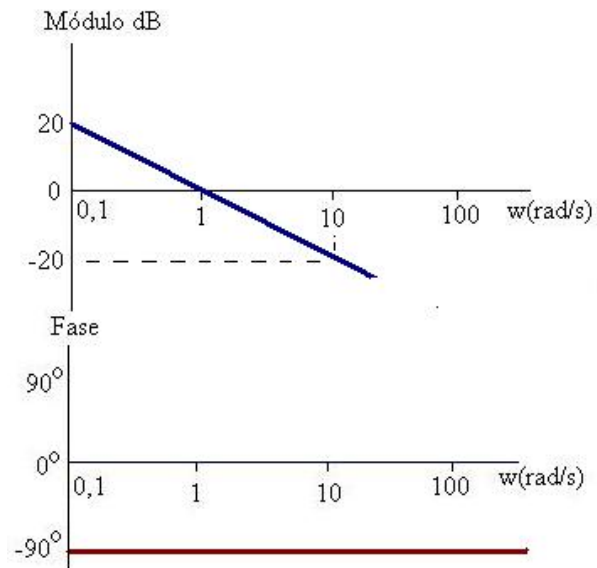


Fig.11. 2 - Diagrama de Bode para um pólo na origem

A figura 11.2 mostra o diagrama de Bode para um pólo na origem. O gráfico do módulo é traçado variando a frequência ω :

Quando $\omega=1 \rightarrow$ módulo $|G(j\omega)|=0$

Quando $\omega=10 \rightarrow$ módulo $|G(j\omega)|=-20 \text{ dB}$

Isto implica que o gráfico tem uma inclinação de -20 dB por década.

No diagrama de Bode uma oitava é a relação entre duas frequências, sendo ω_1 a primeira frequência a segunda será $2 \cdot \omega_1$, isto é, se uma for 2 rad/s a outra será 4 rad/s.

Outra relação é a década entre duas frequências, sendo ω_1 a primeira frequência a segunda será $10 \cdot \omega_1$, isto é, se uma for 2 rad/s a outra será 20 rad/s.

III) Zero na origem

Ocorre quando $G(s) = s$,

passando para o domínio da frequência:

$$G(j\omega) = j\omega$$

O módulo (em decibéis) e a fase dessa função são dados por:

$$|G(j\omega)| = 20 \cdot \log \omega$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{(\omega)}{0} = +\infty \Rightarrow \phi = 90^\circ$$

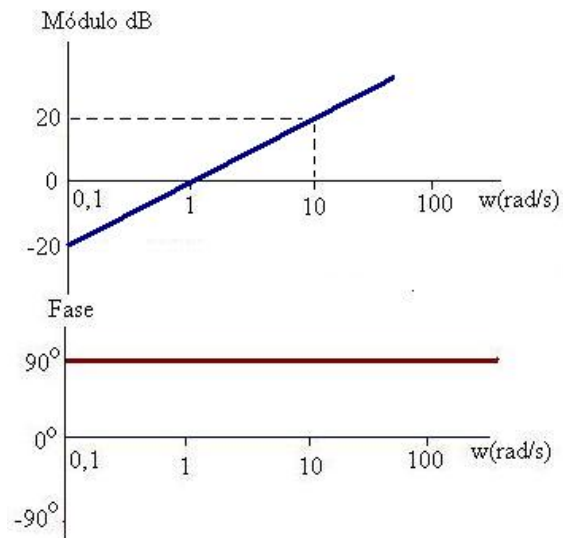


Fig.11. 3 - diagrama de Bode para um zero na origem

A figura 11.3 mostra o diagrama de Bode para um pólo na origem. O gráfico do módulo é traçado variando a frequência ω :

Quando $\omega=1 \rightarrow$ módulo $|G(j\omega)|=0$

Quando $\omega=10 \rightarrow$ módulo $|G(j\omega)|=20$ dB

Isto implica que o gráfico tem uma inclinação de +20 dB por década.

IV) Pólo real

Ocorre quando $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$, passando para o domínio da frequência:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1 - j\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

O módulo (em decibéis) e a fase dessa função são dados por:

$$|G(j\omega)| = 20 \cdot \log \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = -20 \cdot \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{(\omega T)}{1} = -\omega T \quad \Rightarrow \phi = \operatorname{arctg}(-\omega T)$$

O gráfico do módulo é traçado variando a frequência ω . Quando $\omega \ll 1/T$ (baixas frequências), o módulo em dB pode ser aproximado por:

$$|G(j\omega)| = -20 \cdot \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong -20 \cdot \log \sqrt{1} = 0$$

Quando $\omega \gg 1/T$ (altas frequências), o módulo em dB pode ser aproximado por:

$$|G(j\omega)| = -20 \cdot \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong -20 \cdot \log \sqrt{\omega^2 T^2} = -20 \cdot \log(\omega T)$$

Portanto, para baixas frequências o gráfico é uma linha reta em 0 dB. Para altas frequências o gráfico possui uma inclinação de 20 dB/década.

A frequência que as duas assíntotas se encontram é chamada de frequência de canto ou frequência de corte e ocorre em $\omega = 1/T$.

Quando $\omega = 1/T \rightarrow$ módulo $|G(j\omega)| = 0$

O gráfico da fase é obtido realizando o mesmo processo. A figura 11.4 mostra o diagrama de Bode para um pólo real.

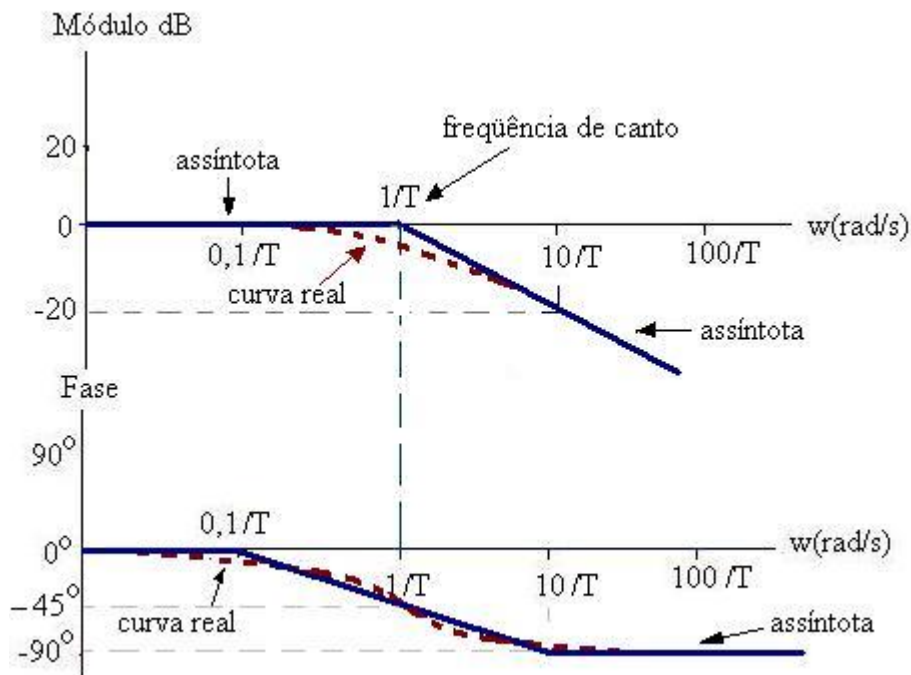


Fig.11. 4- Diagrama de Bode para um pólo real

Como as assíntotas são aproximações da curva real, os erros entre essas duas curvas são mostrados na tabela abaixo, tanto para o módulo como para a fase:

Tabela 11.1 – Erros entre as curvas assintóticas e real para pólo ou zero real

%	0,1/T	0,2/T	0,5/T	1/T	2/T	5/T	10/T
Erro do módulo dB	-0,04	-0,02	-1	-3	-1	-0,2	-0,04
Erro de fase	-5,7°	+2,3°	+4,9°	0°	-4,9°	-2,3°	+5,7°

V) Zero real

Ocorre quando $G(s) = 1 + Ts$, passando para o domínio da frequência:
 $G(j\omega) = 1 + j\omega T$

O módulo (em decibéis) e a fase dessa função são dados por:

$$|G(j\omega)| = 20 \cdot \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\text{tg } \phi = \omega T \quad \Rightarrow \quad \phi = \text{arctg}(\omega T)$$

O gráfico do módulo pode ser traçado variando a frequência ω , ou como a função de transferência do zero real é inversa ao do pólo real, o gráfico do zero real será simétrico ao pólo real.

A figura 11.5 mostra o diagrama de Bode para um zero real. Os erros entre a assíntota e a curva real pode ser calculado utilizando a tabela 11.1.

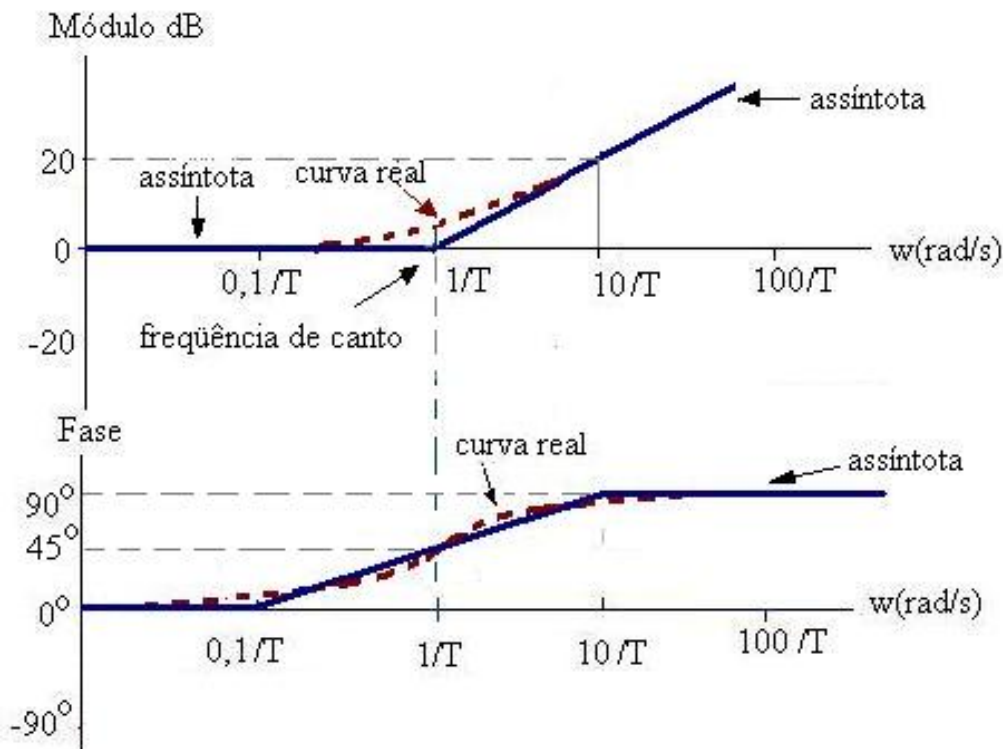


Fig.11. 5 - Diagrama de Bode para um zero real

VI) Par de pólos complexos

Ocorre quando $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, passando para o domínio da frequência:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2}$$

O módulo (em decibéis) e a fase dessa função são dados por:

$$|G(j\omega)| = 20 \cdot \log \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2}} = -20 \cdot \log \sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2}$$

$$\text{tg } \phi = -\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

O gráfico do módulo é traçado variando a frequência ω . Quando $\omega \ll \omega_n$ (baixas frequências), o módulo em dB pode ser aproximado por:

$$|G(j\omega)| \cong -20 \cdot \log \sqrt{1} = 0$$

Quando $\omega \gg \omega_n$ (altas frequências), o módulo em dB pode ser aproximado por:

$$|G(j\omega)| = -20 \cdot \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \cong -40 \cdot \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

Quando $\omega = \omega_n$, $|G(j\omega)| = -40 \cdot \log 1 = 0$

Portanto, para baixas frequências o gráfico é uma linha reta em 0 dB. Para altas frequências o gráfico possui uma inclinação de 40 dB/década.

Aqui a frequência de canto ou frequência de corte das duas assíntotas ocorre em $\omega = \omega_n$.

O gráfico da fase é obtido realizando o mesmo processo. O valor real do gráfico depende do fator de amortecimento (ζ). A figura 11.6 mostra o diagrama de Bode para um pólo complexo e as curvas reais para diferentes coeficientes de amortecimento. Os erros entre as curvas são mostradas na tabela 11.2 e 11.3.

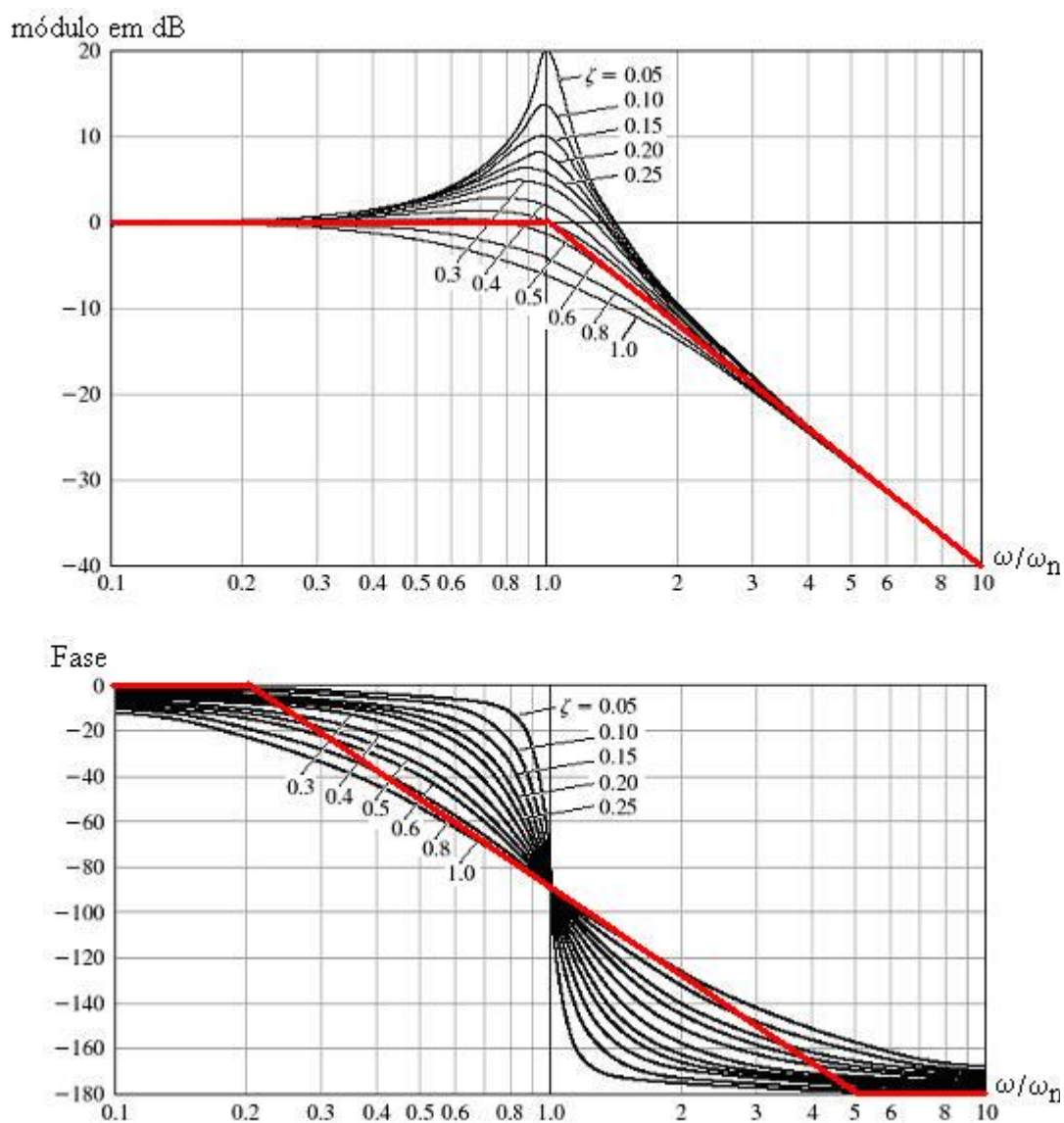


Fig.11. 6 - Diagrama de Bode para um pólo complexo

Tabela 11.2 – Erros entre as curvas assintóticas e real para um par de pólos ou zeros complexos

	ω/ω_n						
ζ	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10
1	-0,09	-0,34	-1,92	-6	-1,92	-0,34	-0,09
0,7	0	-0,01	-0,26	-3	-0,26	-0,01	0
0,5	+0,04	+0,17	+0,9	0	+0,9	+0,17	+0,04
0,3	+0,07	+0,29	+1,85	+4,4	+1,85	+0,29	+0,07

Tabela 11.3 – Erros de fase para um par de pólos ou zeros complexos

	ω/ω_n						
ζ	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10
1	-11,4°	-22,6°	+1,6°	0	-1,6°	+22,6°	+11,4°
0,7	-8,1°	-16,4°	+19,6°	0	-19,6°	+16,4°	+8,1°
0,5	-5,8°	-15,3°	+29,2°	0	-29,2°	+15,3°	+5,8°
0,3	-3,5°	-22,3°	+41,1°	0	-41,1°	+22,3°	+3,5°

VII) Par de zeros complexos

Ocorre quando $G(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$, passando para o domínio da frequência:

$$G(j\omega) = \frac{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

O módulo (em decibéis) e a fase dessa função são dados por:

$$|G(j\omega)| = 20 \cdot \log \sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2}$$

$$\text{tg } \phi = \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

O gráfico do módulo é traçado variando a frequência ω ou como a função de transferência do zero complexo é inversa ao do pólo complexo, o gráfico do par de zeros complexos será simétrico ao gráfico do par de pólos complexos.

O valor real do gráfico depende do fator de amortecimento (ζ). Os erros entre a assíntota e a curva real pode ser calculado utilizando as tabelas 11.2 e 11.3.

A figura 11.7 mostra um resumo apresentando novamente os diagramas de Bode para as unidades básicas.

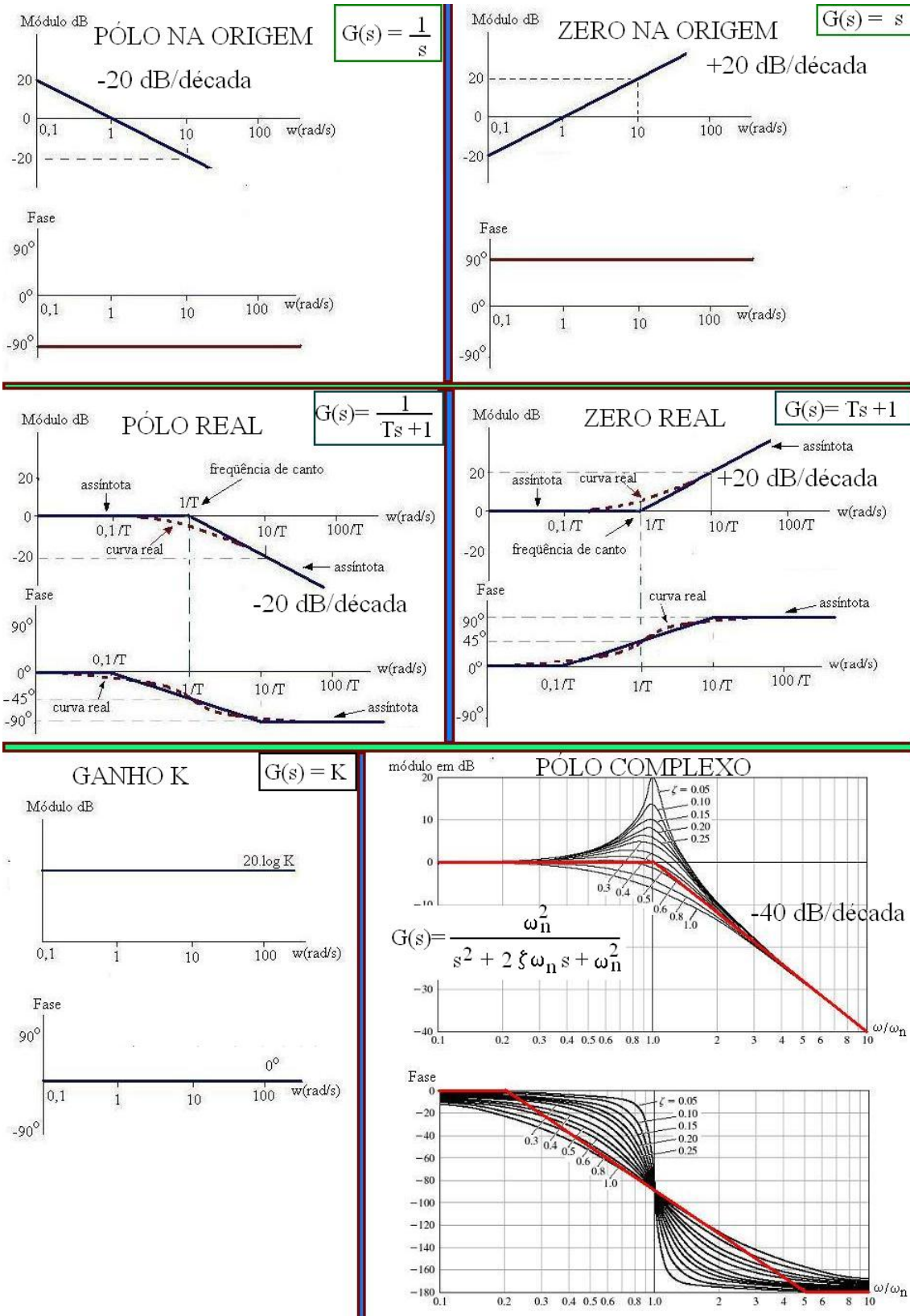


Fig.11. 7 - Diagrama de Bode das unidades básicas

Exemplo 4: Traçar o diagrama de Bode da seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{12(s+2)}{s(s+3)(s^2+s+4)}$$

O diagrama de Bode pode ser traçado decompondo a função acima nas suas unidades básicas.

1º) passando a função para o domínio da frequência (substituindo s por jω):

$$G(s) = \frac{12(j\omega+2)}{j\omega(j\omega+3)(j\omega^2+j\omega+4)}$$

2º) normalizando:

$$G(s) = \frac{\frac{12 \cdot 2}{3 \cdot 4} \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right) \left(\frac{j\omega^2}{4} + \frac{j\omega}{4} + 1\right)} = \frac{2 \cdot \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right) \left(\frac{j\omega^2}{4} + \frac{j\omega}{4} + 1\right)}$$

3º) Decompondo a função acima em unidades básicas:

$$f1 = 2; \quad f2 = \frac{j\omega}{2} + 1; \quad f3 = \frac{1}{j\omega}; \quad f4 = \frac{1}{\frac{j\omega}{3} + 1}; \quad f5 = \frac{1}{\frac{j\omega^2}{4} + \frac{j\omega}{4} + 1}$$

Dessas funções básicas temos:

$$\begin{aligned} f1 &= 20 \cdot \log 2 = 6,02 & \text{fase} &= 0 \\ f2 &\rightarrow \text{zero real, frequência de canto} = 1/T = 2 \\ f3 &\rightarrow \text{pólo na origem, cruza o eixo em } \omega=1 \text{ rad/s} & \text{fase} &= -90^\circ \\ f4 &\rightarrow \text{pólo real, frequência de canto} = 1/T = 3 \\ f5 &\rightarrow \text{pólo complexo, } \omega_n=2 \end{aligned}$$

A figura seguinte (11.8) mostra todas essas funções básicas traçadas. O resultado final do diagrama de Bode será a soma algébrica de todas essas funções.

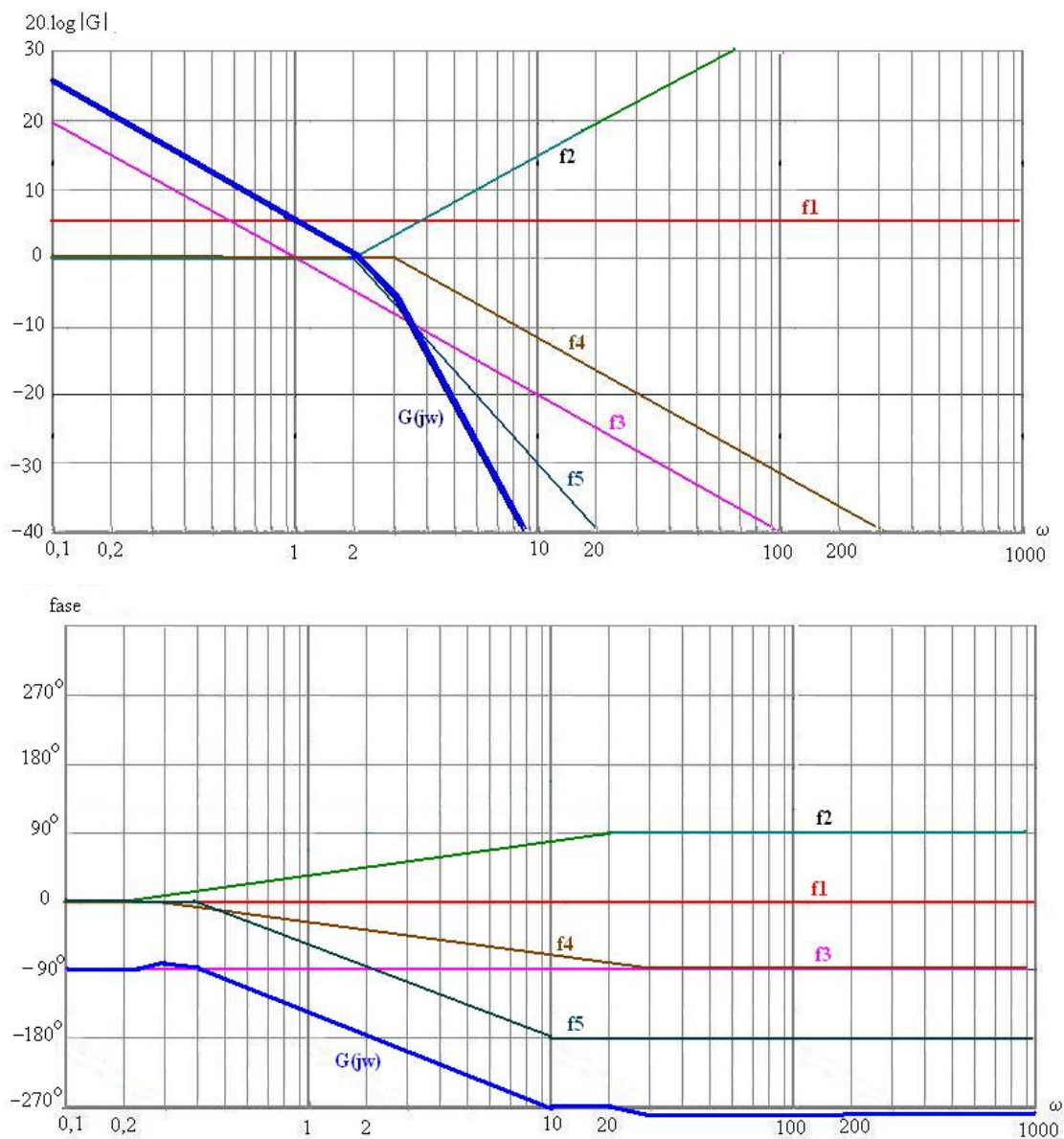
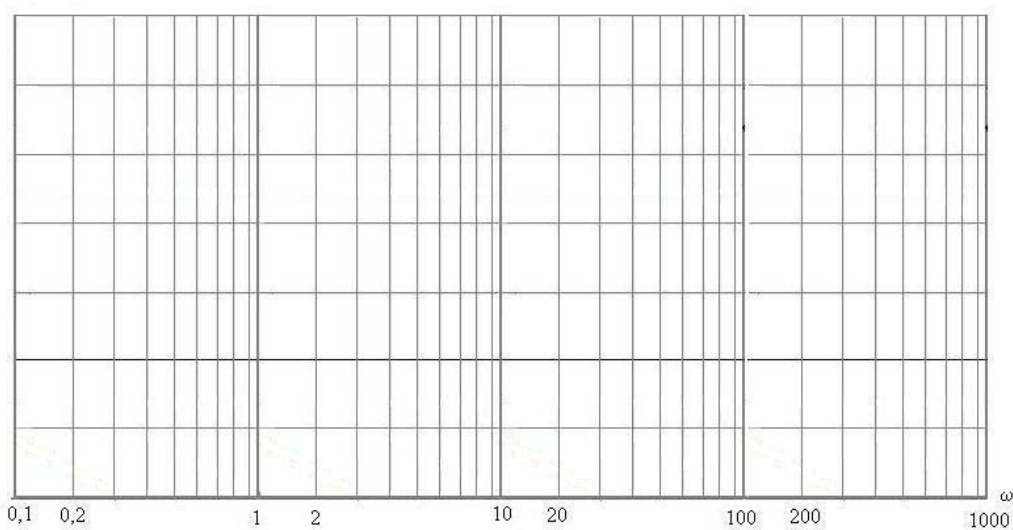
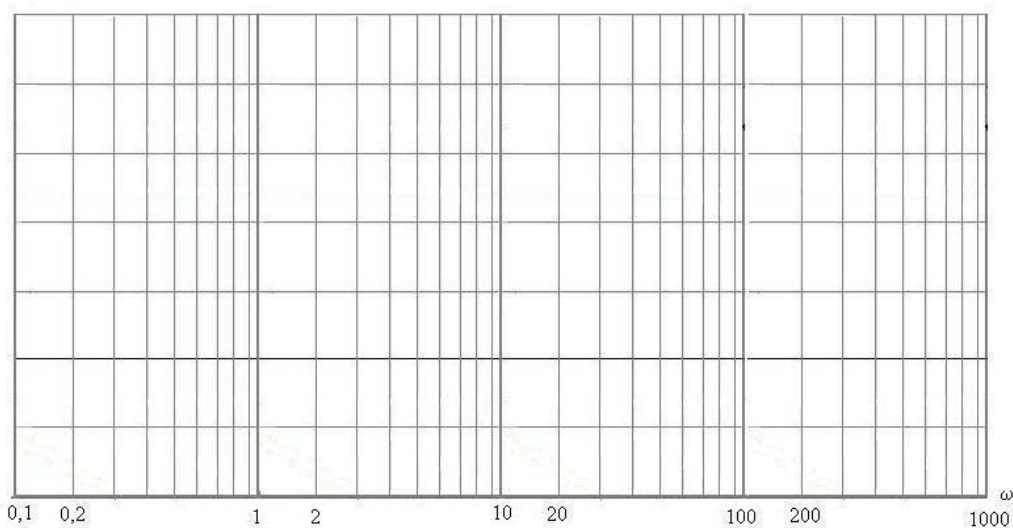


Fig.11. 8 - Diagrama de Bode - exemplo 4



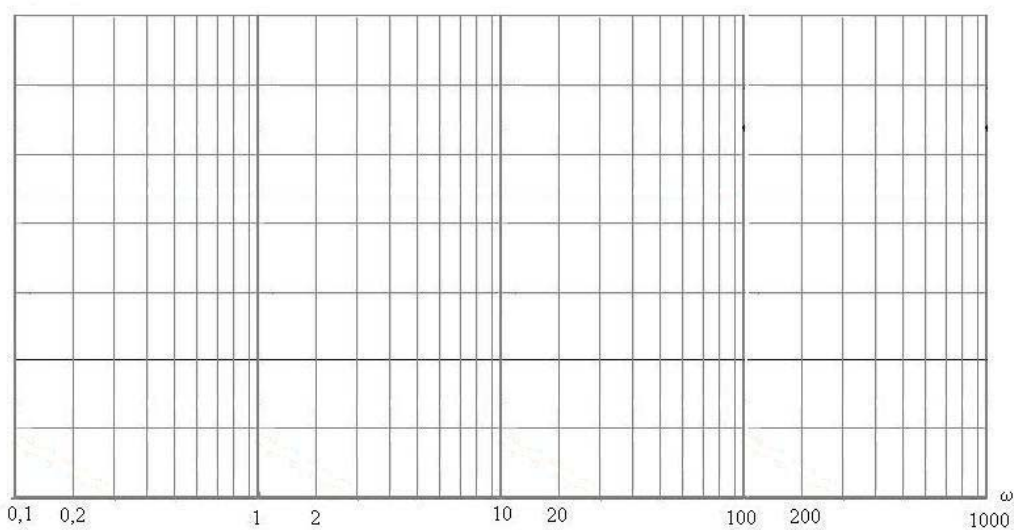
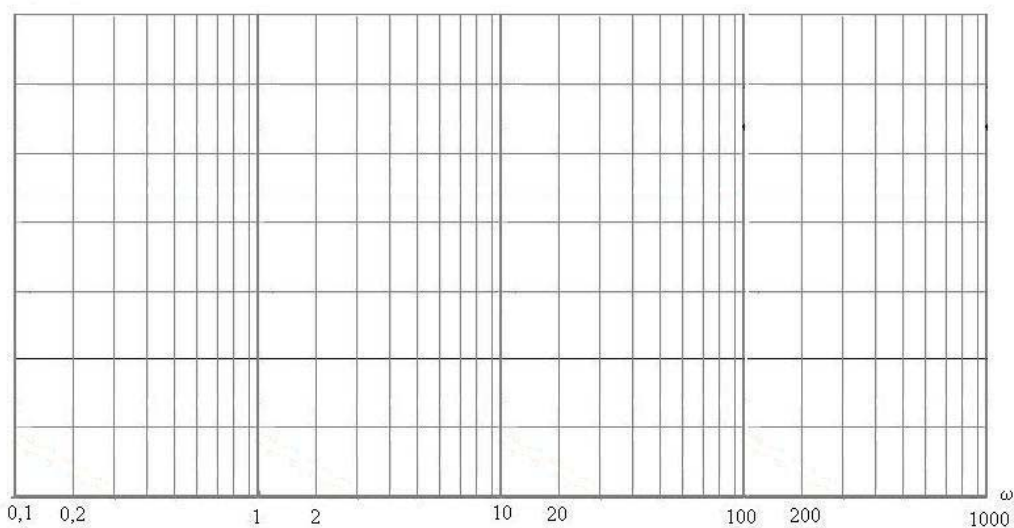
Exercício 3: Traçar o diagrama de Bode para a seguinte função

$$G(s) = \frac{10}{s(0,1s + 1)}$$



Exercício 4: Traçar o diagrama de Bode para a seguinte função

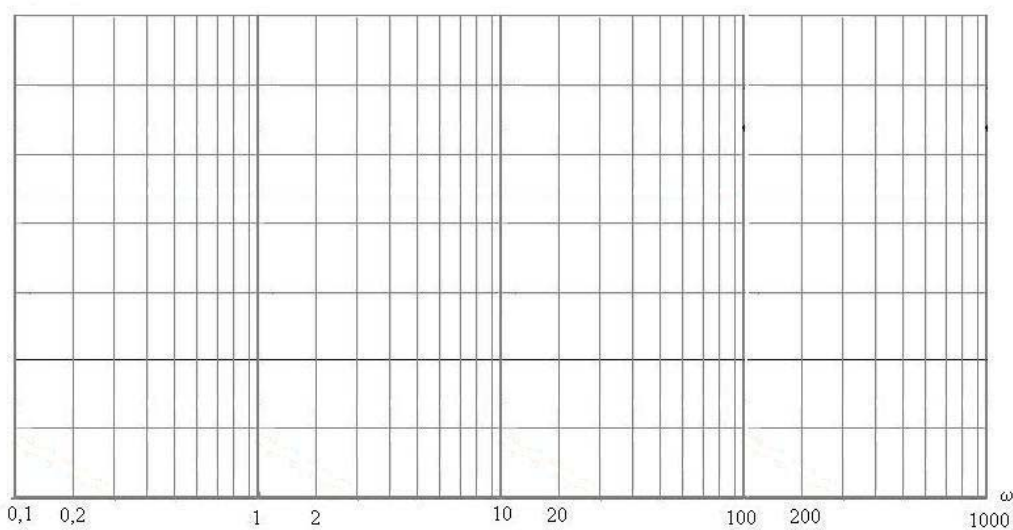
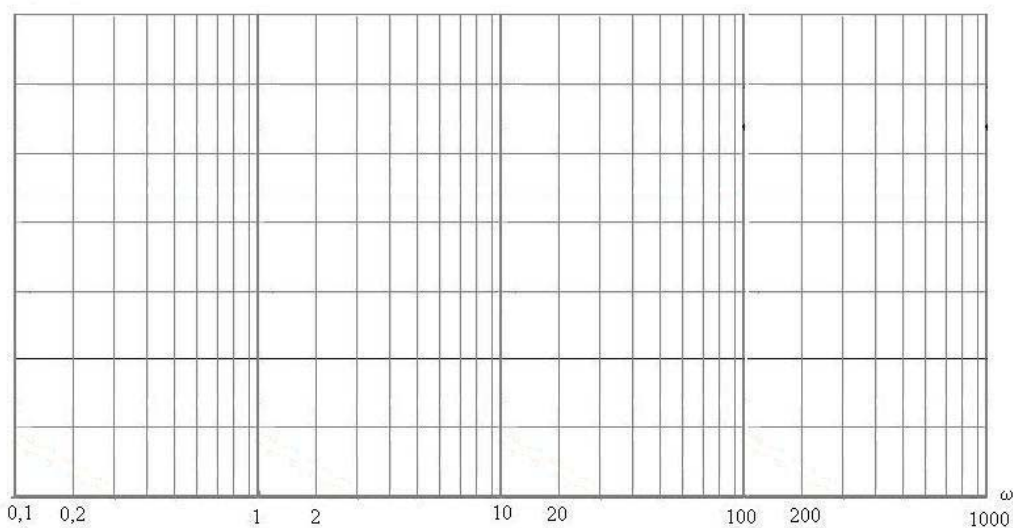
$$G(s) = \frac{1}{(2s + 1)(0,5s + 1)}$$





Exercício 5: Traçar o diagrama de Bode para a seguinte função

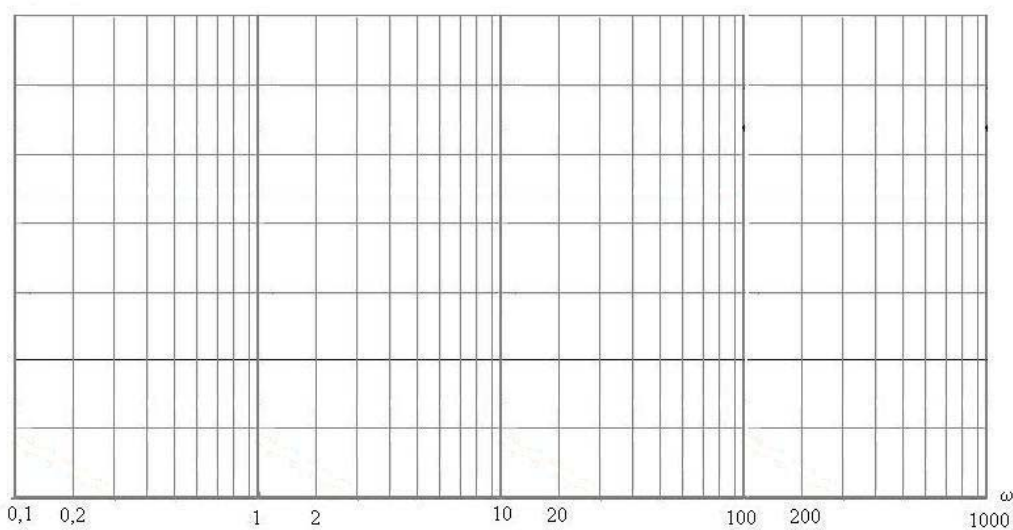
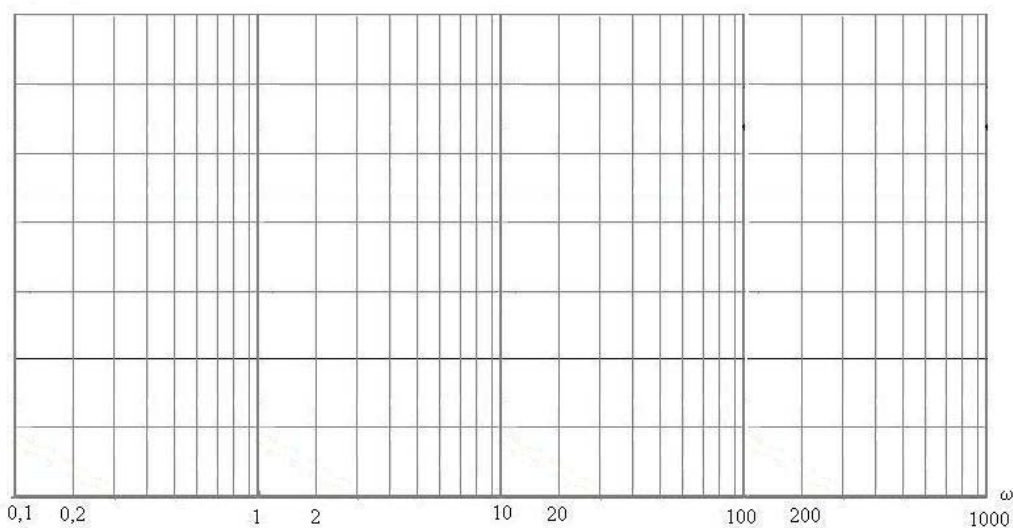
$$G(s) = \frac{5}{(2s + 1)(s^2 + 3s + 25)}$$



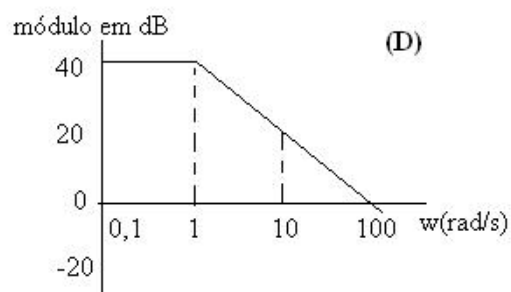
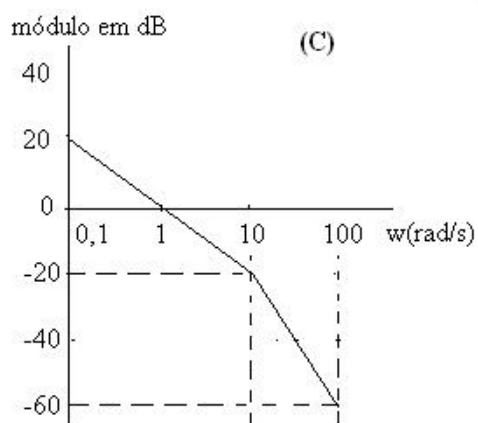
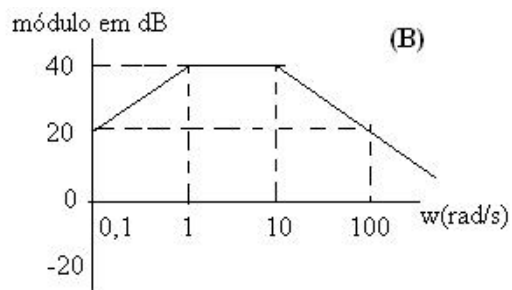
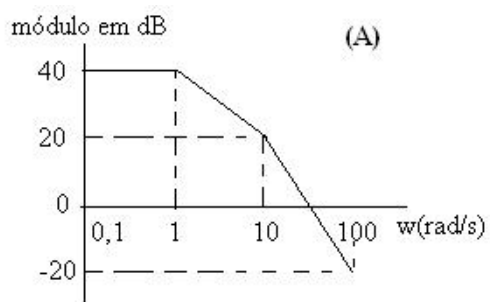


Exercício 6: Traçar o diagrama de Bode para a seguinte função

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$



Exercício 6: Quais são as funções de transferência dos diagramas de Bode da figura abaixo:



Sistema de fase mínima e fase não mínima

Sistema de fase mínima: são sistemas que não possuem pólos e zeros no semiplano direito do plano s. Para estes sistemas, quando $\omega \rightarrow \infty$ o ângulo de fase torna-se igual a:

$-90^\circ(q - p)$, onde p e q são os graus do polinômio do numerador e do denominador.

Sistema de fase não mínima: são sistemas que possuem pólos e zeros no semiplano direito do plano s. Nesses sistemas, quando $\omega \rightarrow \infty$ o ângulo de fase difere de $-90^\circ(q - p)$.

A figura abaixo (fig.11.9) mostra dois sistemas, um de fase mínima e outro de fase não mínima:

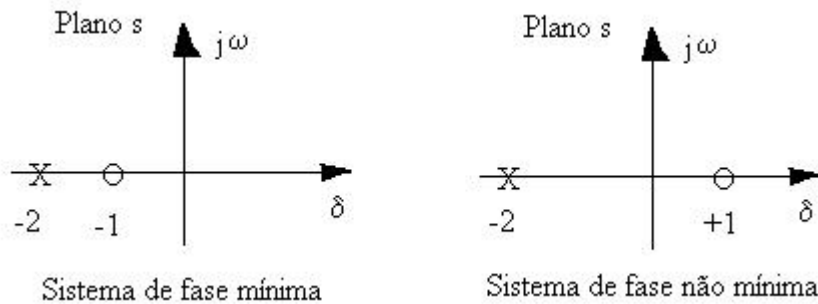


Fig.11. 9 - Sistema de fase mínima e fase não mínima

$$G1(s) = \frac{1 + s}{1 + 2s}$$

$$G2(s) = \frac{1 - s}{1 + 2s}$$

O diagrama de fase para os dois sistemas é mostrado abaixo:

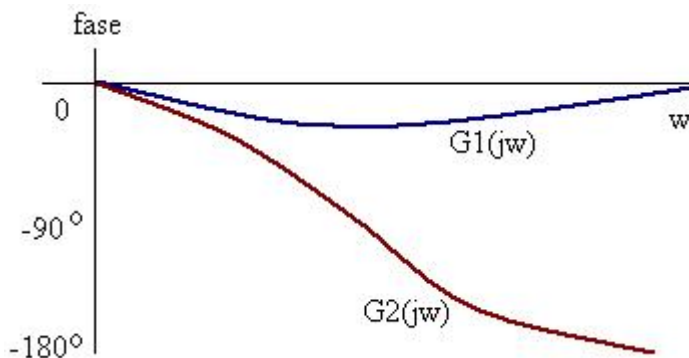


Fig.11. 10 - Diagrama de fase dos sistemas de fase mínima e não mínima

No caso, nota-se que $p=1$ e $q=1$. Portanto para o sistema ser de fase mínima o ângulo de fase deve ser igual a $90^\circ(1-1) = 0$, o que é demonstrado no traçado de $G1(j\omega)$. Um sistema de fase não mínima pode ocorrer quando se inclui elemento de fase não mínima no sistema ou quando existe uma malha interna instável.

Determinação da constante de erro

Através do diagrama de Bode é possível determinar as constantes de erro do sistema. Considerando que a função de transferência em malha aberta é:

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^N \prod_{i=1}^{n-N} (s + p_i)} = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)}$$

O desempenho do sistema quando s tende a zero depende do número de integradores N. O número de integradores é freqüentemente chamado de TIPO do sistema (N). Portanto:

- Para N = 0 → Tipo 0 erro de posição
- Para N = 1 → Tipo 1 erro de velocidade
- Para N = 2 → Tipo 2 erro de aceleração

RESUMO DE ERROS ESTACIONÁRIOS

Entrada	erro de regime	Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
		constante de erro	Erro	constante de erro	Erro	constante de erro	Erro
Degrau	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p = K$	$\frac{1}{1 + K}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v = K$	$\frac{1}{K}$	$K_v = \infty$	0
Parábola	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a = K$	$\frac{1}{K}$

Onde: K_p → erro de posição
 K_v → erro de velocidade
 K_a → erro de aceleração

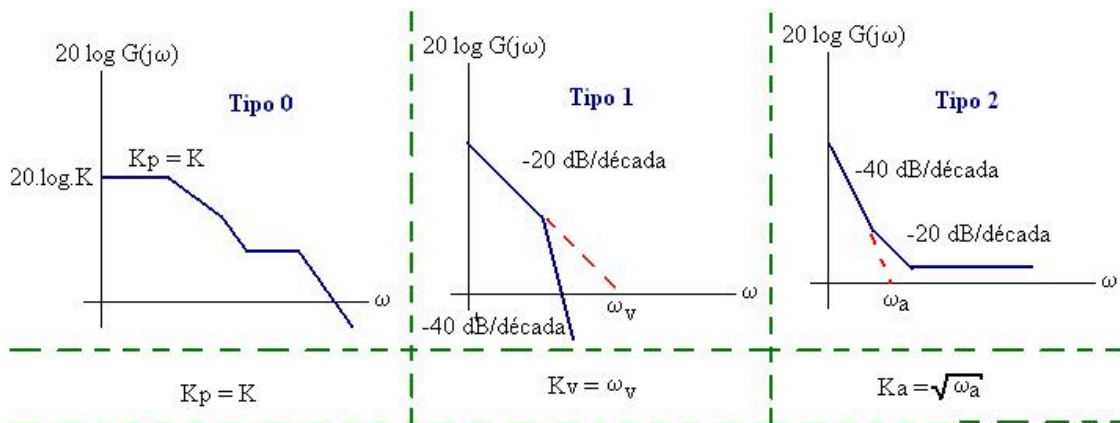
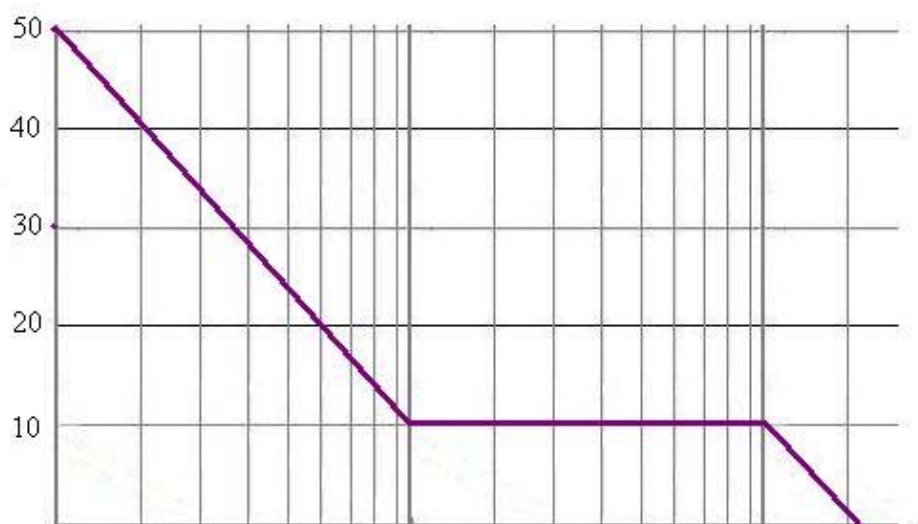
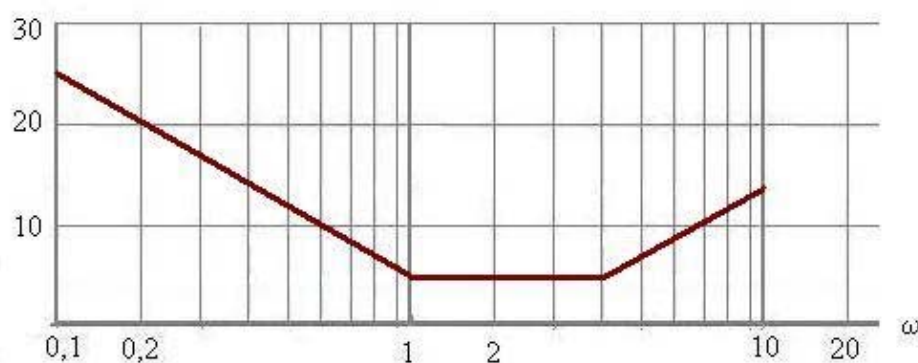
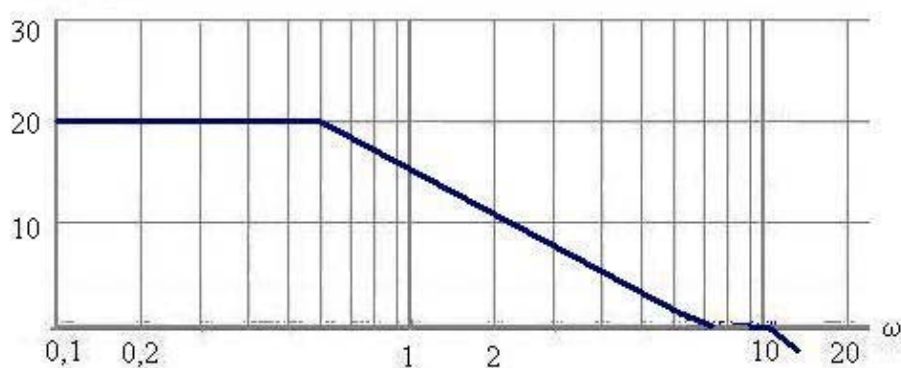


Fig.11. 11 - Erro estacionário através do diagrama de Bode

Pela figura 11.11 nota-se que se o gráfico de bode começa com um ganho constante, esse ganho k será o erro de posição. Se o gráfico começar com uma reta de -20 dB/década, haverá um erro de velocidade que pode ser obtido prolongando essa inclinação até cruzar o eixo das frequências e a frequência obtida será o erro do sistema. Para o erro de aceleração o gráfico de Bode começa com uma inclinação de -40 dB/década e o erro será a raiz quadrada da frequência obtida do cruzamento da inclinação de -40 dB/década com o eixo das frequências.

Exercício 7: Nos diagramas de módulo de Bode abaixo, dizer qual o tipo de erro do sistema e qual o seu valor:



SEÇÃO MATLAB

O comando para traçar o diagrama de Bode no MatLab é:

bode(num, den)
bode(num,den,w) → w é o espaçamento entre décadas

Pode-se, também, utilizar argumentos:

[mag,phase,w] = bode (num, den)
[mag,phase,w] = bode(num, den,w)

onde: mag é uma matriz que contém o módulo
phase é a matriz que contém o ângulo de fase

O módulo pode ser convertido em decibéis pelo comando:

magdB = 20*log10(mag);

Utilizando espaçamento (w):

w = logspace(d1,d2,n) → gera um vetor de n pontos entre as décadas 10^{d1} e 10^{d2}

Exemplo: Esboçar o o diagrama de Bode para:

$$G(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}$$

Fazendo num = 16 → num = [0 0 16]
e den = (s² + 4s + 16) → den = [1 4 16]

```
num = [0 0 16];      % numerador de G(s)
den =[1 4 16];
bode(num,den)      % gráfico de Bode
title('Diagram de Bode')
```

```
% usando o mesmo sistema anterior com espaçamento de 0,1 até 1000:
w = logspace(-1,3,100)      % gera 100 pontos espaçados de 0,1 até 1000
bode(num,den,w)      % gráfico de Bode.
title('Diagram de Bode')
```

Como exercício: faça todos os gráficos desta apostila utilizando o matlab.