INTRODUÇÃO

O visto que o acréscimo de zeros e pólos modificam o lugar das Raízes, sendo que os mesmos são inseridos no sistema através de controladores (P, PI, PD, PID) e através de compensadores.

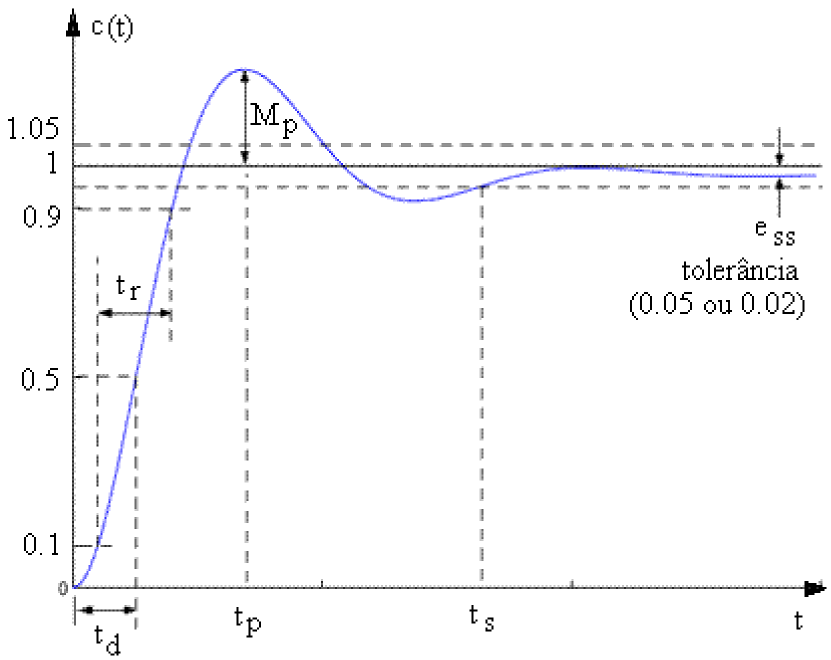
O projeto de tais compensadores ou controladores pode ser feito com o Lugar das Raízes que se baseia na especificação da dinâmica dominante do sistema através do posicionamento de um par de pólos complexos conjugados que dominarão a resposta em malha fechada. O controlador deve assegurar que o lugar das raízes passe por esses pólos dominantes.

Especificação de desempenho

Conforme visto no módulo 5, um sistema de 2ª ordem pode ser definido através de sua freqüência natural (ω_n) e do coeficiente de amortecimento (ζ):

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} \qquad \text{Pólos} \Rightarrow \qquad \boxed{s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

A figura abaixo mostra a especificação para um sistema de segunda ordem com uma entrada a degrau unitário.



Dentre as características do sistema temos:

t_p – tempo de pico (tempo para atingir o primeiro pico).

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

M_p – Máximo de sobre-sinal (ou somente sobre-sinal) – valor máximo de pico medido a partir da saída em regime permanente. Se o valor final for unitário pode ser calculado por:

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

ou caso seja fornecido o sobre-sinal (Mp), o coeficiente de amortecimento (ζ) pode ser calculado por:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2(M_p)}{\pi^2 + \ln^2(M_p)}}$$

ts – tempo de acomodação (temo necessário para que a curva alcance os valores em uma faixa (2% ou 5%) do seu valor final.

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\omega_n\zeta} = \frac{4}{\sigma} \qquad t_s(5\%) = \frac{3}{\omega_n\zeta} = \frac{3}{\sigma}$$

O projeto de controladores (compensadores) é basicamente um método educado de tentativa-e-erro, onde se tenta satisfazer todas as especificações de desempenho. Depois de projetado o controlador, o projetista deve verificar se o sistema em malha fechada satisfaz todas as especificações de desempenho. Se não for este o caso, repete o processo de projeto por modificação de parâmetros ajustáveis, ou modifica a configuração do sistema, até atingir as especificações requeridas.

Quando desejamos alterar o desempenho transitório de um sistema, o controlador deve contribuir com singularidades de modo que o LGR do sistema passe no ponto especificado, calculado a partir das especificações de desempenho. Quando desejamos alterar o desempenho em regime, o controlador deve contribuir com o ganho necessário, sem alterar muito o LGR do sistema original.

PROJETO DE COMPENSADOR EM AVANÇO DE FASE

A função de transferência (FT) de um controlador avanço de fase é:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad \text{com} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\boxed{G_c(s) = K \frac{s + z}{s + p}}$$

É utilizado quando o sistema tem um transitório insatisfatório e regime bom.

Passos para o projeto:

1) Traduzir as especificações de desempenho em termos de uma localização desejada de pólos dominantes de malha fechada (ζ e ωn).

2) Trace o L.R. do sistema não compensado e verifique se o objetivo não pode ser atingido com um controlador Proporcional (variando apenas o ganho K).

3) Se o controlador avanço de fase é necessário, localizar o zero do controlador em um local adequado:u coloque o zero abaixo do pólo desejado (parte real) ou à esquerda do primeiro dos dois pólos reais.

4) Determinar a localização do pólo do controlador de modo que a condição de ângulo seja satisfeita:

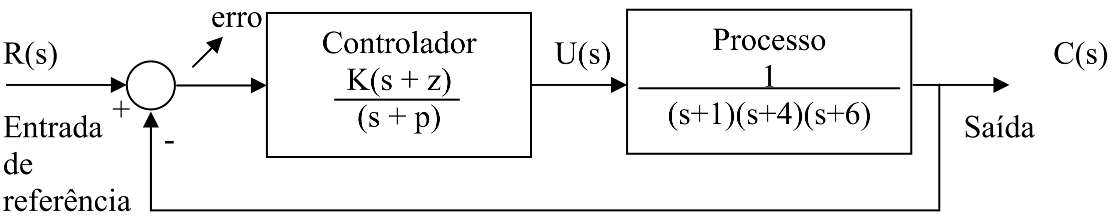
$$\sum \angle zeros - \sum \angle polos = \pm 180°$$

5) Calcular o ganho total requerido, aplicando a condição de módulo

6) Simular o sistema com o controlador e observar o comportamento da resposta. Caso não seja satisfatório, tentar um ajuste fino dos parâmetros do controlador (K_c e z)

Exemplo de Projeto: Projete um compensador em avanço de fase para o sistema seguinte com as seguintes especificações:

- sobressinal de 25% ➔ Mp = 0,25
- e um tempo de acomodação de 2 ➔ ts = 2 s



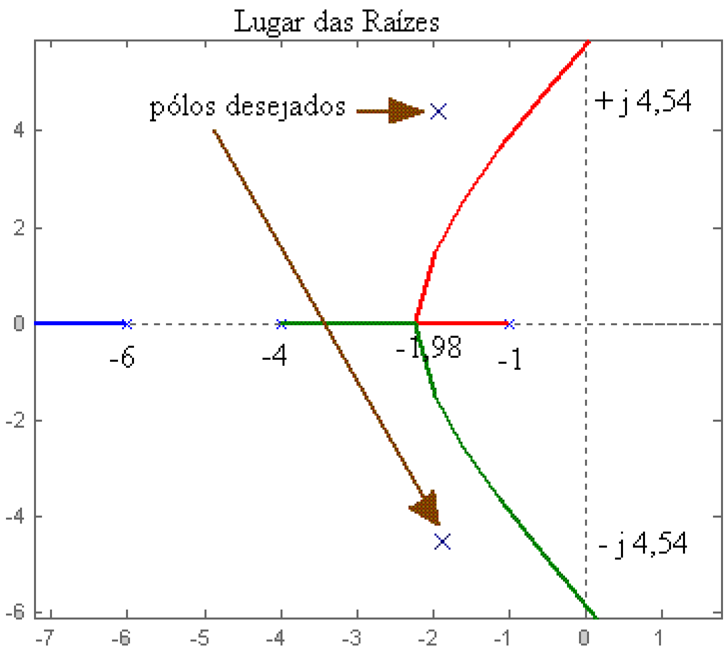
1) Calculando os pólos dominantes:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2(M_p)}{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} = \sqrt{\frac{\ln^2(0{,}25)}{\pi^2 + \ln^2(0{,}25)}} = 0{,}4$$

$$t_s = \frac{4}{\omega_n \cdot \zeta} \qquad \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{t_s \cdot \zeta} = \frac{4}{2 \cdot 0{,}404} = 4{,}95$$

Pólos: $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ = -1,98 ± j4,54

2) Traçar o Lugar das Raízes para o sistema sem compensação



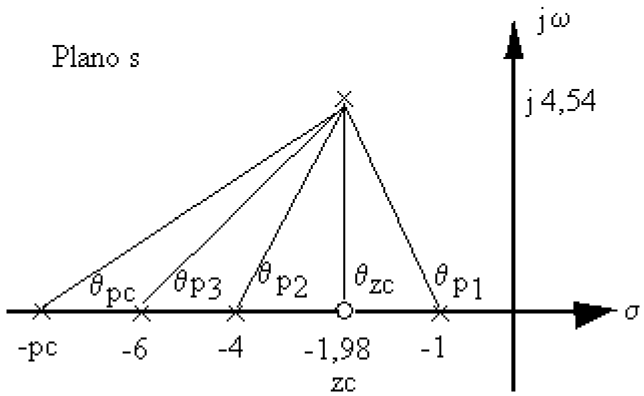
Nota-se pela figura que o pólo não faz parte do lugar das raízes, por isso não dá para alcançar esses pólos alterando o valor de K, há necessidade de um compensador.

3) Colocando um zero abaixo do pólo desejado, isto é, colocando (s + 1,98) no numerador.

4) Determinando a localização do pólo para satisfazer a condição angular:

$$\sum \angle zeros - \sum \angle polos = \pm 180°$$

$$\theta_{zc} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3} + \theta_{pc}) = +\,180º$$



Os ângulos são calculados por trigonometria:

$$\theta = \arctan\left(\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}\right)$$

Onde: o cateto oposto é igual à parte imaginária do pólo desejado
e o cateto adjacente é igual ao valor do pólo menos a parte real do pólo desejado

$$\theta_{P3} = \arctan\left(\frac{4{,}54}{6-1{,}98}\right) = \arctan\left(\frac{4{,}54}{4{,}02}\right) = 48{,}5$$

$$\theta_{P2} = \arctan\left(\frac{4{,}54}{4-1{,}98}\right) = \arctan\left(\frac{4{,}54}{2{,}02}\right) = 66$$

$$\theta_{P1} = 180 - \arctan\left(\frac{4{,}54}{1{,}98-1}\right) = 180 - \arctan\left(\frac{4{,}54}{4{,}02}\right) = 180 - 78 = 102$$

$$\theta_{zc} = \arctan\left(\frac{4{,}54}{1{,}98-1{,}98}\right) = \arctan\left(\frac{4{,}54}{0}\right) = 90$$

Determinação do ângulo θ_{pc}:

$$\theta_{zc} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3} + \theta_{pc}) = +\,180º$$

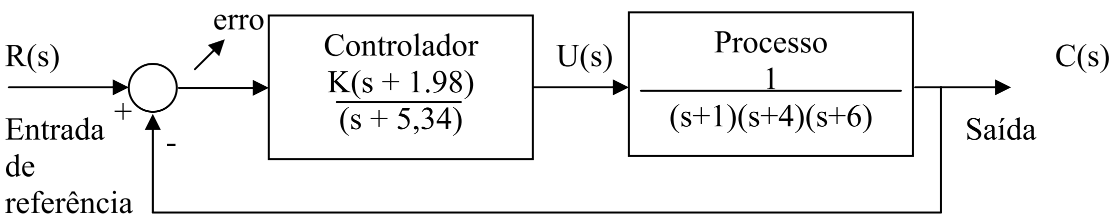
$$90º - (48{,}5º + 66º + 102º + \theta_{pc}) = 180º$$
$$\theta_{pc} = 53{,}5º$$

Determinando o pólo do compensador:

$$\tan(\theta_{PC}) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$\tan(53{,}5^o) = \frac{4{,}54}{pc - 1{,}98} \quad \Rightarrow \quad pc - 1{,}98 = \frac{4{,}54}{\tan(53{,}5^o)} \quad \Rightarrow \quad pc = 5{,}34$$

5) Calculando o ganho pela condição do módulo:



O ganho é calculado pela condição do módulo utilizando a função de transferência em malha aberta e fazendo s igual ao pólo desejado:

$$\left|\frac{K(s+1.98)}{(s+5{,}34)(s+1)(s+4)(s+6)}\right|_{s=-1{,}98+j4{,}54} = 1$$

$$\left|\frac{K(-1{,}98+j4.54+1.98)}{(-1{,}98+j4.54+5{,}34)(-1{,}98+j4.54+1)(-1{,}98+j4.54+4)(-1{,}98+j4.54+6)}\right| = 1$$

$$\left|\frac{K(j4{,}54)}{2.3\text{ - j}790{,}47}\right| = 1$$

$$\left|\frac{K(j4{,}54)}{2.3\text{ - j}790{,}47}\,\frac{(2.3+\text{j}790{,}47)}{(2.3+\text{j}790{,}47)}\right| = 1$$

$$\left|\frac{K(\text{-}3588{,}7+10{,}442}{6.2485*10^5}\right| = 1$$

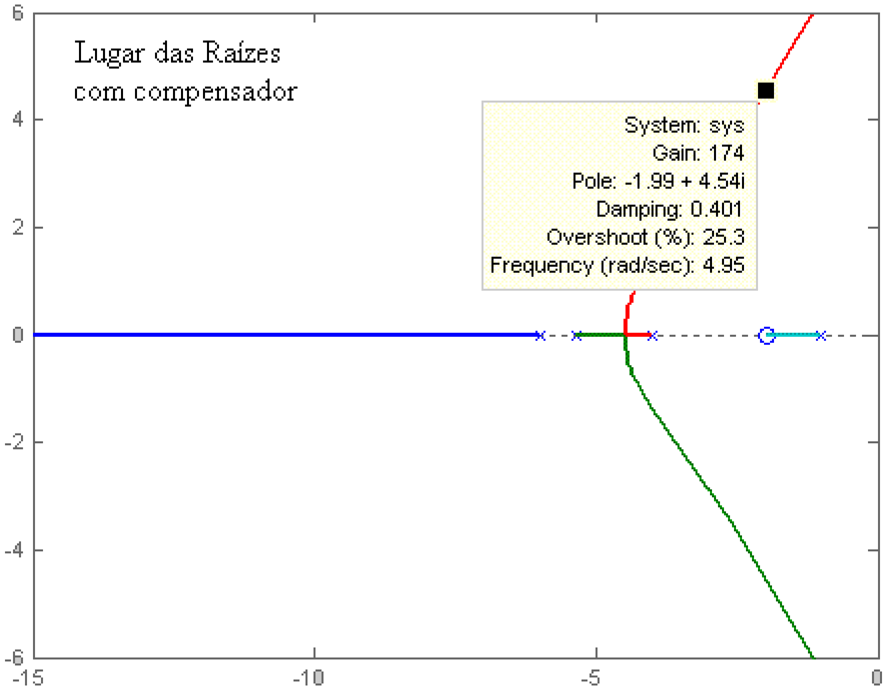
$$\left|K(\text{-}0.0057+0.0000\text{i})\right| = 1$$

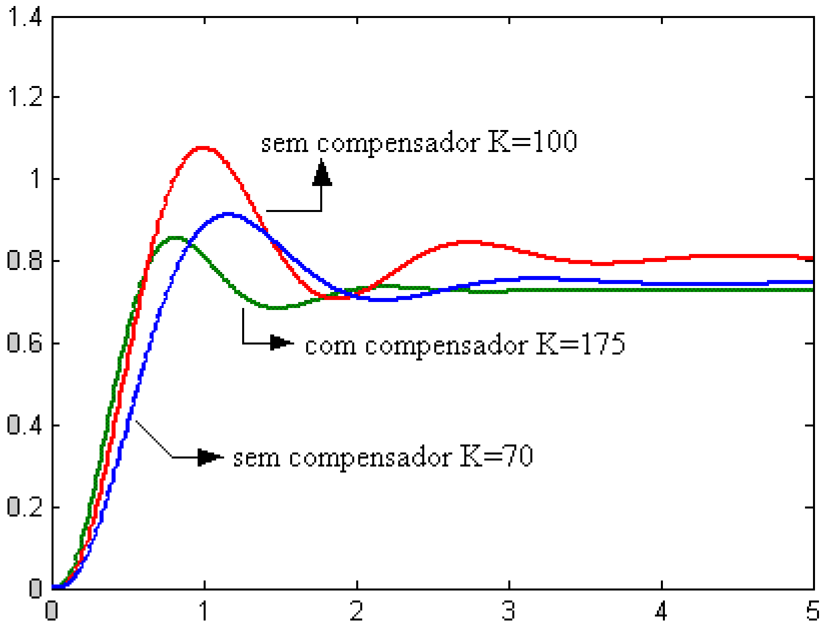
$$\sqrt{K^2((\text{-}0.0057)^2+(0.0000)^2)} = 1$$

$$K = \frac{1}{0.0057} = 175{,}43$$

Outra forma de calcular o ganho é através do matlab, entrando com o numerador e denominador da função em malha aberta e clicando o pólo desejado:

```
num = [0 0 0 1 1.98]
den=conv([1 1],conv([1 4],conv([1 6],[1 5.34])))
rlocus(num, den)                         ; traça o lugar das raízes
```





Conforme especificado o tempo de acomodação do sistema compensado é de 2s, sem compensação o tempo passa para 3s. O sobre-sinal do sistema compensado fica próximo de 0,25 enquanto que nos outros sistemas o sobre-sinal é maior.

PROJETO DE COMPENSADOR EM ATRASO DE FASE

A função de transferência de um controlador atraso de fase é:

$$G_c(s) = \frac{K_c}{\beta}\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \quad \text{com} \quad \beta > 1$$

$$\boxed{G_c(s) = K_c\frac{s+z}{s+p}}$$

Erro em regime do sistema não compensado:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+K_pG_p(s)} \qquad\qquad C_p = \lim_{s\to 0}\{K_pG_p(s)\}$$

Erro estático de posição do sistema compensado:

$$C_p' = \lim_{s\to 0}\{G_c(s).G(s)\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{K_c\left(s+\frac{1}{T}\right)}{\left(s+\frac{1}{\alpha T}\right)}.C_p\right\} = K_c\alpha C_p$$

O objetivo do controlador é melhorar o regime, sem alterar significativamente o transitório.

Passos para projeto:

1) construir o L.R. do sistema não compensado. Com base nas especificações da resposta transitória localizam-se sobre o L.R. os pólos dominantes de malha fechada

2) calcula-se o valor da constante de erro estático necessário (Cp)

3) determina-se o acréscimo no valor da constante de erro estático necessário para se atender às especificações (Cp')

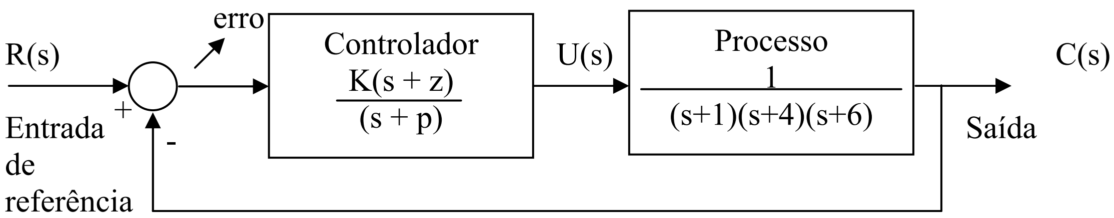
4) determinam-se o pólo e o zero do compensador que produzam o aumento no valor da constante de erro estático, sem alterar significativamente o L.R., localizar o pólo próximo à origem

5) traçar o novo L.R. para o sistema compensado

6) ajustar o ganho Kp do sistema

Exemplo de Projeto: Projete um compensador em atraso de fase para o sistema seguinte com as seguintes especificações:

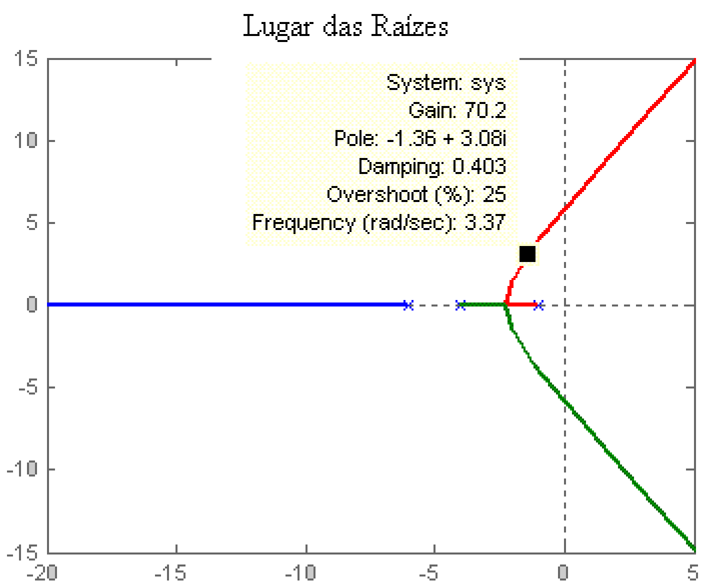
- sobressinal de 25% ➔ Mp = 0,25
- e erro de regime ➔ ess = 5%



1) Calculando os pólos dominantes:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2(M_p)}{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} = \sqrt{\frac{\ln^2(0{,}25)}{\pi^2 + \ln^2(0{,}25)}} = 0{,}4$$

Traçando o Lugar das Raízes no Matlab e procurando o lugar onde Mp = 25%, temos:



onde: os pólos do sistema são dados por: $s = -1{,}36 \pm j3{,}08$
e o ganho é dado por: $K = 70{,}2$

2) Cálculo do valor do erro estático para verificar se corresponde ao erro especificado:

Erro em regime do sistema não compensado para entrada a degrau unitário:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+K_pG_p(s)}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+70{,}2.\dfrac{1}{(s+1)(s+4)(s+6)}} = \frac{1}{1+70{,}2.\dfrac{1}{24}} = 0{,}25$$

Não corresponde ao erro especificado. Erro estático de posição do sistema não compensado:

$$C_p = \lim_{s\to 0}\{K_pG_p(s)\} = 2{,}93$$

3) Acréscimo na constante de erro:

Função de transferência do compensador: $$G_c(s) = K_c\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\alpha T}};\quad \alpha > 1$$

erro estático de posição do sistema compensado:

$$C'_p = \lim_{s\to 0}\{G_c(s).G(s)\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{K_c\left(s+\dfrac{1}{T}\right)}{\left(s+\dfrac{1}{\alpha T}\right)}.C_p\right\} = K_c\alpha C_p$$

Deseja-se que o erro de regime seja 5% (e'_{ss} = 0,05) portanto a nova constante de erro estático (C'_p) deve ser:

$$e'_{ss} = \frac{1}{1+C'_p} \qquad\qquad C'_p = \frac{1}{e'_{ss}} - 1 = \frac{1}{0{,}05} - 1 = 19$$

4) Determinação do novo pólo e do novo zero que atende as especificações:

Como:

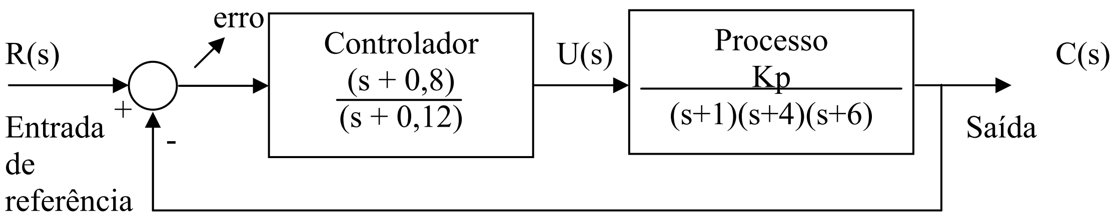
$$C'_p = K_c\alpha C_p \qquad \Rightarrow K_c\alpha = \frac{C'_p}{C_p} = \frac{19}{2{,}93} = 6{,}48$$

Considerando Kc = 1 ➔ α = 6,48

Adotando arbitrariamente z = 0,8 : T =1,25

$$G_c(s) = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} = 1\frac{s+\frac{1}{1,25}}{s+\frac{1}{6,48*1,25}} = \frac{(s+0,8)}{(s+0,12)}$$

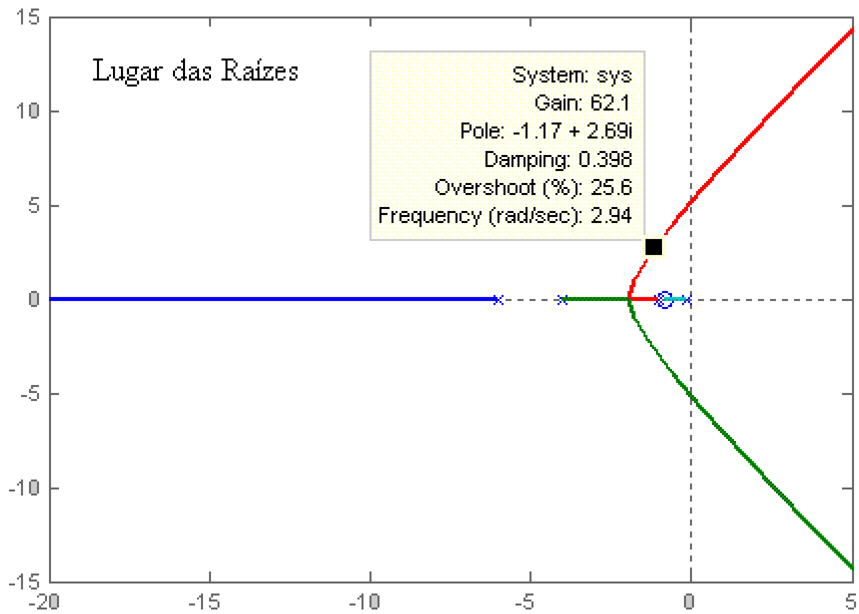
5) Novo Lugar das Raízes para o sistema compensado



FTMA:

$$G_{FTMA}(s) = \frac{(s+0,8)}{(s+0,12)} . \frac{1}{(s+1)(s+4)(s+6)} = \frac{s+0,8}{s^4+11,2s^3+35,32s^2+28,08s+2,88}$$

```
num = [0 0 0 1 0.8]
den=conv([1 1],conv([1 4],conv([1 6],[1 0.12])))
rlocus(num, den)
```

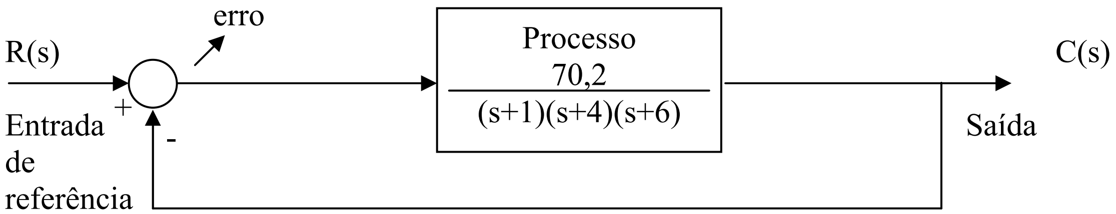


6) ajuste do ganho Kc do compensador:

Através da figura anterior ➔ Kc = 62

Formas de onda dos dois sistemas:

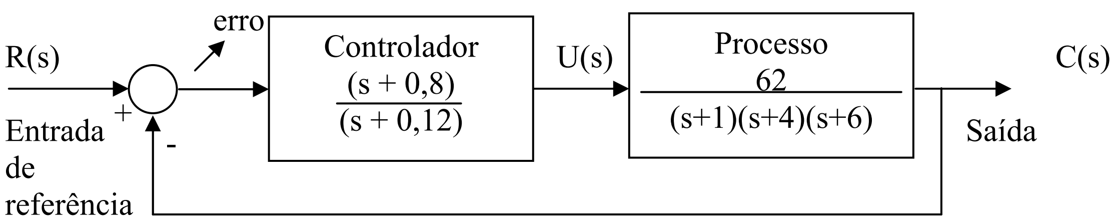
Sem compensador:



FTMF $G_{FTMA}(s) = \dfrac{70{,}2}{(s+1)(s+4)(s+6)+70{,}2} = \dfrac{70{,}2}{s^3+11s^2+34s+94{,}2}$

MATLAB:
```
t = 0:0.01:5;
num1 = [0 0  0 70.2];
den1 = [1 11 34 94.2];
y1=step(num1, den1,t);
```

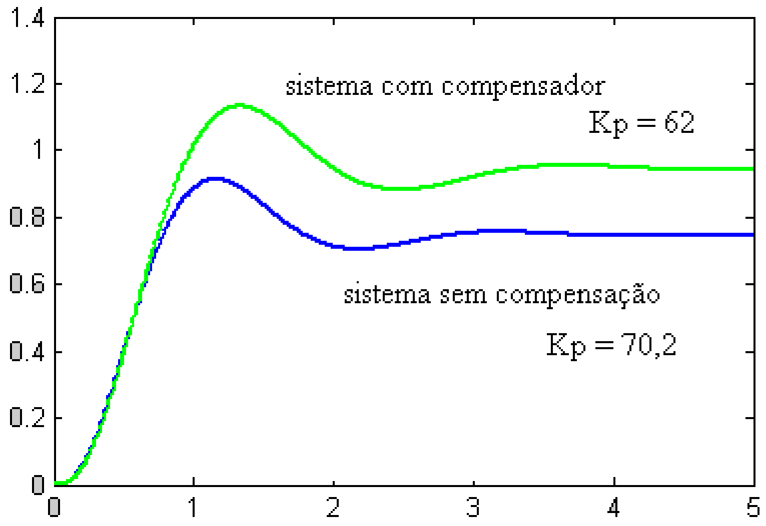
Com compensador:



Função de transferência:

$$G_{FTMA}(s) = \frac{(s+0{,}8)}{(s+0{,}12)} . \frac{62}{(s+1)(s+4)(s+6)} = \frac{62s+49{,}6}{s^4+11{,}2s^3+35{,}32s^2+90{,}08s+52{,}48}$$

MATLAB:
```
num2 = [0 0  0 62 49.6];
den2 = [1 11.2 35.32 90.08 52.48];
y2=step(num2, den2,t);
plot(t,y1,'b',t,y2,'g')          % plota o sistema compensado em verde e
                                 % o sistema não compensado em azul
```



Exercício
1)Refazer o projeto se o erro de regime deve ser 2% e o sobressinal menor que 25%.

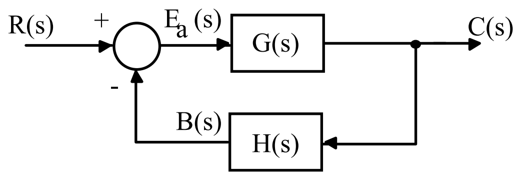
ERRO ESTACIONÁRIO EM SISTEMA COM RETROAÇÃO UNITÁRIA

Em um sistema de controle os erros ocorrem devido a diversos fatores: atrito seco, folgas, saturação, deriva de sinais, envelhecimento e deterioração. A solução para contornar este problema é a modificação do sistema adicionando ao mesmo um compensador ou controlador.

Classificação De Sistemas

Podemos classificar um sistema de controle acordo com a sua habilidade para seguir entradas em degrau, rampa, parábola, etc...

Considerando um sistema em malha fechada da forma:



onde a função de transferência em malha aberta é:

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^N\prod_{i=1}^{n-N}(s+p_i)}=\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)......(T_m s+1)}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)......(T_n s+1)}$$

O desempenho do sistema quando s tende a zero depende do número de integradores N. O número de integradores é freqüentemente chamado de TIPO do sistema (N). Portanto:

Para N = 0 ➔ Tipo 0
Para N = 1 ➔ Tipo 1
Para N = 2 ➔ Tipo 2

OBS: Não confundir o tipo do sistema com a ordem do sistema. Exemplo:

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)}$$ ➔ Sistema de 1ª ordem
Sistema tipo 0

Exercício 2) Quais os tipos e a ordem dos sistemas:

a) $G(s)=\dfrac{15}{(s+1)(s+2)}$

b) $G(s)=\dfrac{8}{s(s+1)}$

c) $G(s)=\dfrac{s+8}{s^2+3s+2}$

Erro Estacionário

Considerando o sistema de controle em malha fechada, temos que o erro atuante $E_a(s)$ é dado por:

$$E_a(s)=R(s)-C(s)H(s)=R(s)-E_a(s)G(s)H(s)$$

Logo

$$\boxed{E_a(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)}$$

Aplicando o teorema do valor final, temos que o erro atuante estacionário ou de regime é dado por:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e_a(t) = \lim_{s\to 0} sE_a(s)$$

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}}$$

OBS: O erro atuante $E_a(s)$ só coincide com o erro $E(s) = R(s) - C(s)$ quando $H(s)= 1$.
O erro $E(s)$ é dado por:

$$\boxed{E(s) = R(s) - C(s) = \frac{[1+G(s)H(s)-G(s)]}{1+G(s)H(s)} R(s)}$$

Erro em Estado Estacionário para a Entrada Degrau

O erro de regime para uma entrada degrau unitário é:

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{1}{1+G(0)H(0)}}$$

Definindo a constante de erro de posição estático (K_p) como:

$$K_P = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = G(0)H(0)$$

o erro de regime é dado por: $\boxed{e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}}$

- Para um sistema tipo 0

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)......(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1).......(T_n s+1)} = K \qquad (K_p = K \Rightarrow \textit{finito})$$

- Para um sistema tipo 1 ou maior $N \geq 1$:

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)......(T_m s+1)}{s^N (T_1 s+1)(T_2 s+1).......(T_n s+1)} = \infty \qquad (K_p = \infty \Rightarrow \text{ infinito})$$

Portanto, o erro estacionário será:

Sistema tipo 0: $\boxed{e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+K}}$

Sistema para tipo 1 ou maior: $\boxed{e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\infty} = 0}$

Entrada Rampa

O erro de regime para uma entrada rampa unitária é:

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s^2)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+sG(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG(s)H(s)}}$$

Definindo a constante de erro de velocidade estático (K_v) como:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s)$$

o erro de regime para uma entrada rampa é dado por: $\boxed{e_{ss} = \frac{1}{K_v}}$

- Para um sistema tipo 0

$$K_v = \lim_{s\to 0} s \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)......(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1).......(T_n s+1)} = 0 \qquad (K_p = 0)$$

- Para um sistema tipo 1:

$$K_v = \lim_{s\to 0} s \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)......(T_m s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1).......(T_n s+1)} = K \qquad (K_v = K \Rightarrow \textit{finito})$$

- Para um sistema tipo 2 ou maior:

$$K_v = \lim_{s\to 0} s \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)......(T_m s+1)}{s^N (T_1 s+1)(T_2 s+1).......(T_n s+1)} = \infty \qquad (K_v = \infty \Rightarrow \text{infinito})$$

Portanto, o erro estacionário será:

Sistema tipo 0: $\boxed{e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0} = \infty}$

Sistema tipo1: $\boxed{e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}}$

Sistema tipo2 ou maior: $\boxed{e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\infty} = 0}$

Entrada Parábola

O erro de regime para uma entrada parábola $r(t) = t^2/2$ é:

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s^3)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 + s^2G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2G(s)H(s)}}$$

Definindo a constante de erro de aceleração estático (K_A) como:

$$K_A = \lim_{s\to 0} s^2G(s)H(s)$$

o erro de regime para uma entrada parábola é dado por: $\boxed{e_{ss} = \frac{1}{K_A}}$

- Para um sistema tipo 0

$$K_A = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{K(T_as+1)(T_bs+1)......(T_ms+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1).......(T_ns+1)} = 0 \qquad (K_A = 0)$$

- Para um sistema tipo 1:

$$K_A = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{K(T_as+1)(T_bs+1)......(T_ms+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1).......(T_ns+1)} = 0 \qquad (K_A = 0)$$

- Para um sistema tipo 2:

$$K_A = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{K(T_as+1)(T_bs+1)......(T_ms+1)}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1).......(T_ns+1)} = K \qquad (K_A = K \Rightarrow \textit{finito})$$

- Para um sistema tipo 3 ou maior:

$$K_A = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{K(T_as+1)(T_bs+1)......(T_ms+1)}{s^N(T_1s+1)(T_2s+1).......(T_ns+1)} = \infty \qquad (K_A = \infty \Rightarrow \text{infinito}$$

Portanto, o erro estacionário será:

Sistema tipo 0: $\boxed{e_{ss} = \dfrac{1}{K_A} = \dfrac{1}{0} = \infty}$

Sistema tipo 1: $\boxed{e_{ss} = \dfrac{1}{K_A} = \dfrac{1}{0} = \infty}$

Sistema tipo 2: $\boxed{e_{ss} = \dfrac{1}{K_A} = \dfrac{1}{K}}$

Sistema tipo 3 ou maior: $\boxed{e_{ss} = \dfrac{1}{K_A} = \dfrac{1}{\infty} = 0}$

RESUMO DE ERROS ESTACIONÁRIOS

Entrada	erro de regime	Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
		constante de erro	Erro	constante de erro	Erro	constante de erro	Erro
Degrau	$\dfrac{1}{1+K_p}$	$K_P = K$	$\dfrac{1}{1+K}$	$K_P = \infty$	0	$K_P = \infty$	0
Rampa	$\dfrac{1}{K_v}$	$K_V = 0$	∞	$K_V = K$	$\dfrac{1}{K}$	$K_V = \infty$	0
Parábola	$\dfrac{1}{K_a}$	$K_A = 0$	∞	$K_A = 0$	∞	$K_A = K$	$\dfrac{1}{K}$

Exercício 2) Quais são os erros em regime permanente para as entradas degrau unitário, rampa unitária e parábola das seguintes funções de transferência:

a) $G(s) = \dfrac{4}{(s+1)}$

b) $G(s) = \dfrac{5}{s(s^2+3s+5)}$

c) $G(s) = \dfrac{10}{s^2(s^2+3s+2)}$

PROJETO DE CONTROLADORES PID

São muito freqüentemente utilizados em sistemas de controle industriais. De uma maneira geral, a FT de um PID, considerando zeros reais é da seguinte forma:

$$\boxed{G_{pid}(s) = K_c \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s}}$$

Passos:

1) Traduzir as especificações de desempenho em termos de uma localização desejada de pólos dominantes de malha fechada (ζ e ωn).

2) traçar o lugar das raízes e verificar se o objetivo não pode ser atingido com um controlador Proporcional

3) se um controlador for necessário, projete um controlador PD, colocando o zero satisfazendo a condição angular:

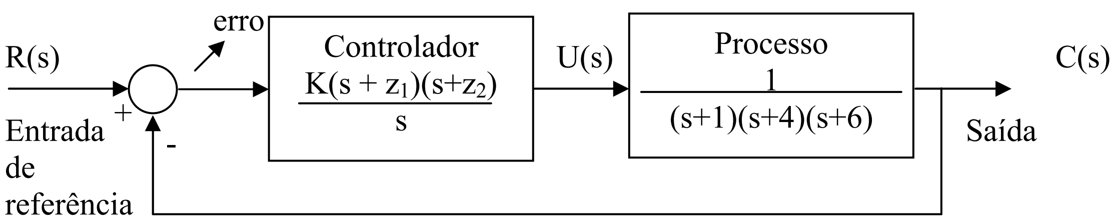
$$\sum \angle zeros - \sum \angle polos = \pm 180°$$

4) Calcular o ganho total requerido

5) Coloque o zero do controlador PI próximo a zero

Exemplo de Projeto: Projete um compensador em avanço de fase para o sistema seguinte com as seguintes especificações:

- sobressinal de 25% ➔ Mp = 0,25
- e um tempo de acomodação de 2 ➔ ts = 2 s



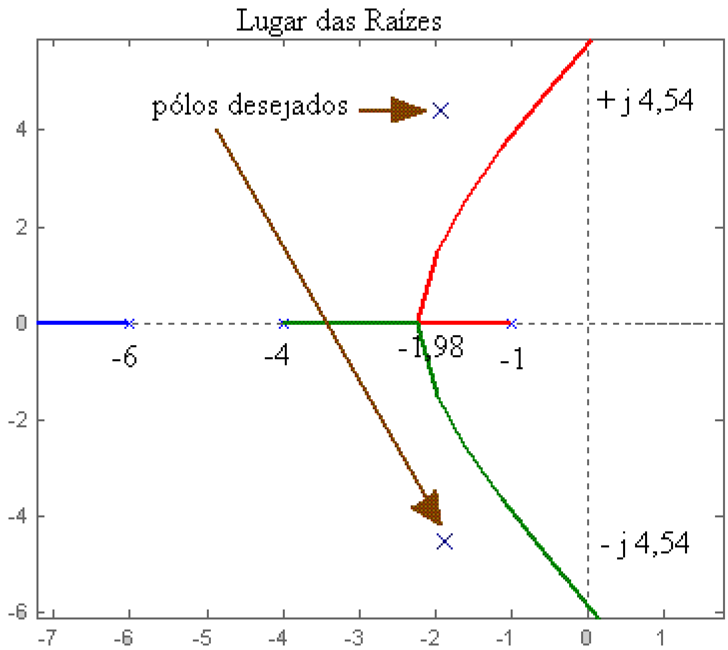
1) Calculando os pólos dominantes:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2(M_p)}{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} = \sqrt{\frac{\ln^2(0{,}25)}{\pi^2 + \ln^2(0{,}25)}} = 0{,}4$$

$$t_s = \frac{4}{\omega_n \cdot \zeta} \qquad \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{t_s \cdot \zeta} = \frac{4}{2 \cdot 0{,}404} = 4{,}95$$

Pólos: $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ = -1,98 ± j4,54

2) Traçar o Lugar das Raízes para o sistema sem compensação

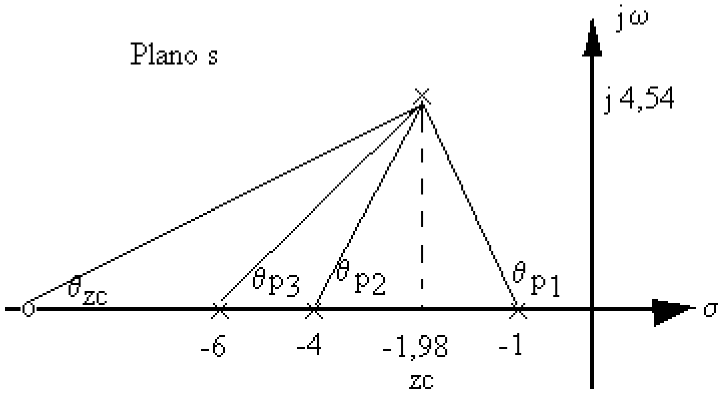


Nota-se pela figura que o pólo não faz parte do lugar das raízes, por isso não dá para alcançar esses pólos alterando o valor de K, há necessidade de um controlador PID.

3) Determinando a localização do zero do PD para satisfazer a condição angular:

$$\sum \angle zeros - \sum \angle polos = \pm 180°$$

$$\theta_{zc} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3}) = +180^{o}$$



Os ângulos são calculados por trigonometria:

$$\theta = \arctan\left(\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}\right)$$

Onde: o cateto oposto é igual à parte imaginária do pólo desejado
e o cateto adjacente é igual ao valor do pólo menos a parte real do pólo desejado

$$\theta_{P3} = \arctan\left(\frac{4{,}54}{6-1{,}98}\right) = \arctan\left(\frac{4{,}54}{4{,}02}\right) = 48{,}5$$

$$\theta_{P2} = \arctan\left(\frac{4{,}54}{4-1{,}98}\right) = \arctan\left(\frac{4{,}54}{2{,}02}\right) = 66$$

$$\theta_{P1} = 180 - \arctan\left(\frac{4{,}54}{1{,}98-1}\right) = 180 - \arctan\left(\frac{4{,}54}{4{,}02}\right) = 180 - 78 = 102$$

Determinação do ângulo θ_{pc}:

$$\theta_{zc} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3} + \theta_{pc}) = +180^{o}$$

$$\theta_{zc} - (48{,}5^{o} + 66^{o} + 102^{o}) = 180^{o}$$

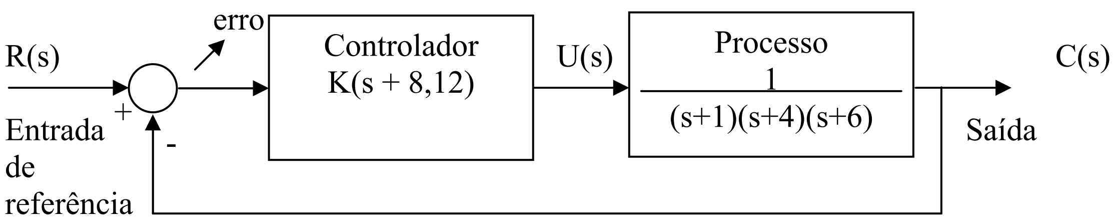
$$\theta_{zc} = 36{,}5^{o}$$

Determinando o zero do controlador PD:

$$\tan(\theta_{PC}) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$\tan(36{,}5^o) = \frac{4{,}54}{zc - 1{,}98} \quad \Rightarrow \quad zc - 1{,}98 = \frac{4{,}54}{\tan(36{,}5^o)} \quad \Rightarrow \quad zc = 8{,}12$$

4) Calculando o ganho do controlador PD pelo Matlab:

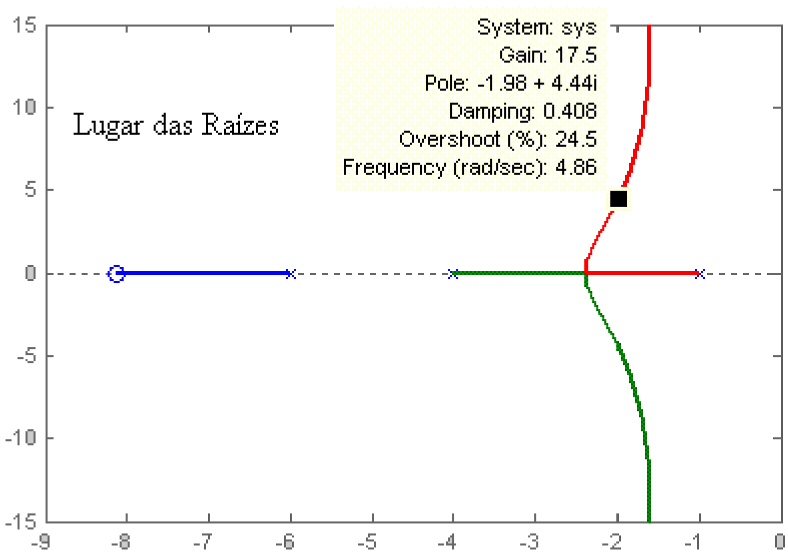


Função de transferência em malha aberta:

$$\tan(\theta_{PC}) = \frac{K(s+8{,}12)}{(s+1)(s+4)(s+6)} = \frac{K(s+8{,}12)}{s^3 + 11s^2 + 34s + 24}$$

No MatLab:

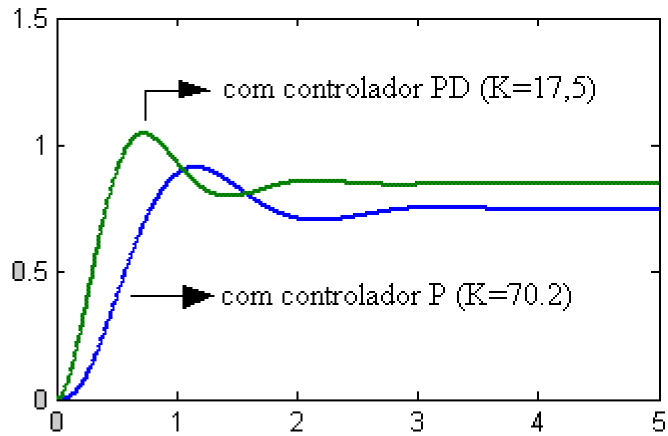
```
num = [0 0  1 8.12];
den=[1 11 34 24];
rlocus(num, den)                    ; traça o lugar das raízes
```



Desenhando a resposta do sistema PD para o ganho Kp=17,5 e para o sistema P para o ganho de Kp=70,2

No MatLab:

```
num1 = [0 0 0 70.2];          % numerador para o sistema P
den1 = [1 11 34 24+70.2];     % denominador para o sistema P
t=0:0.01:5;                   % base de tempo
y1 = step(num1, den1,t);      % resposta para entrada a degrau
num2 = [0 0 17.5 17.5*8.12];            % numerador para o sistema PD
den2 = [1 11 34+17.5 24+17.7*8.12];     % denominador para o sistema PD
y2 = step(num2, den2,t);      % resposta para entrada a degrau
plot(t,y1,t,y2);
```



5) Coloque o zero do controlador PI próximo a zero

Escolhendo zero em 0,8

$$G_{PI}(s) = \frac{s + z_i}{s} = \frac{s + 0{,}8}{s}$$

Desta forma o controlador PID será:

$$G_{PID}(s) = \frac{K(s + z_d)(s + z_i)}{s} = \frac{K(s + 8{,}12)(s + 0{,}8)}{s}$$

$$G_{PID}(s) = \frac{K(s^2 + 8{,}92s + 6{,}496)}{s} \qquad (9.1)$$

Comparando a equação (9.1) com a função de transferência do PID:

$$G_{PID}(s) = \frac{K\left(s^2 + 8{,}92s + 6{,}496\right)}{s}$$

$$G_{pid}(s) = K_p T_d \left(\frac{s^2 + \frac{1}{T_d}s + \frac{1}{T_d T_i}}{s} \right)$$

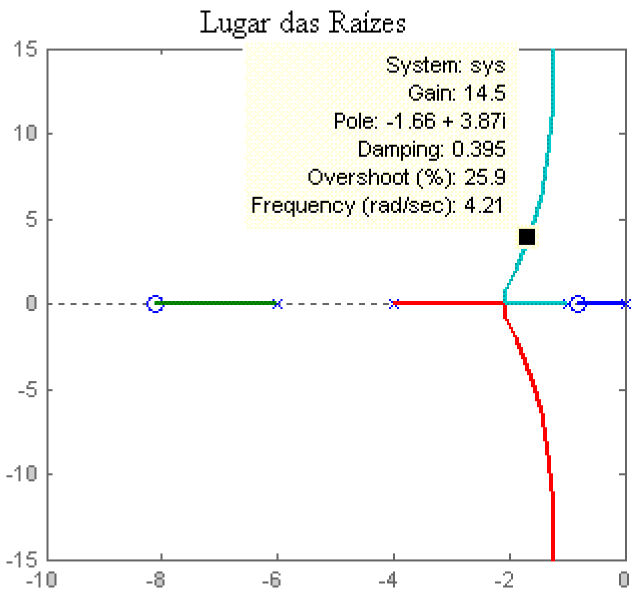
$$\frac{1}{T_d} = 8{,}92 \quad e \quad \frac{1}{T_d T_i} = 6{,}496 \quad e \quad K_p T_d = 17{,}5$$

Calculando:

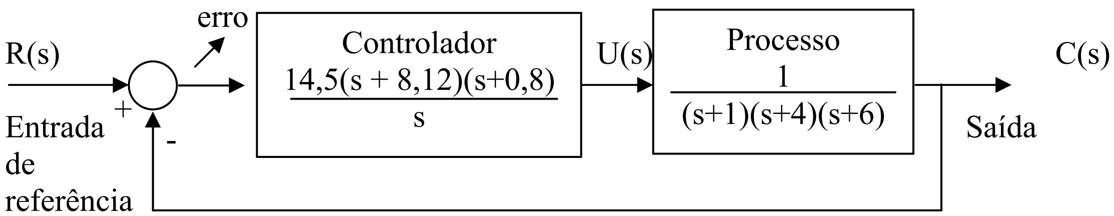
Td = 0,11 s e Ti = 1,37 s e Kp = 159,09

Utilizando o lugar das raízes no matlab:

```
num3 = [0 0 1 8.92 6.496];                      % numerador
den3 = conv([1 0],conv([1 1], conv([1 4],[1 6])));   % denominador
rlocus(num3,den3);
```

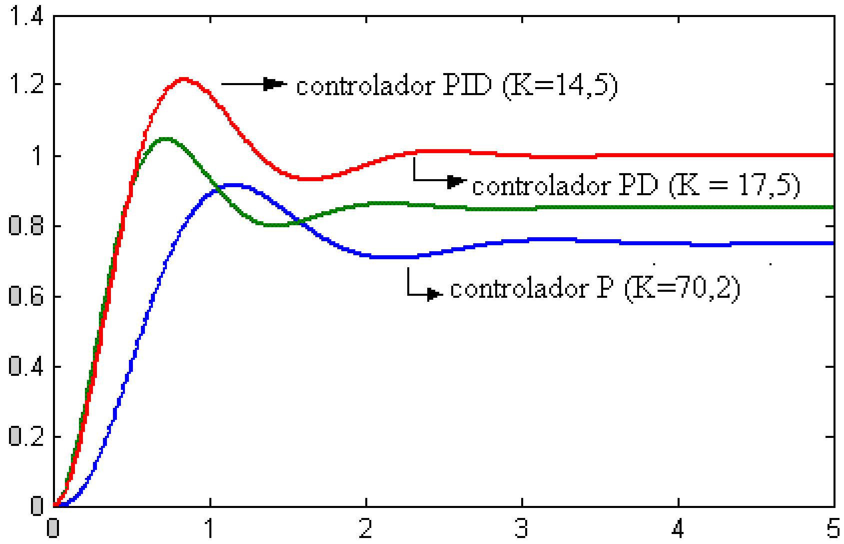


O ganho do PID = 14,5



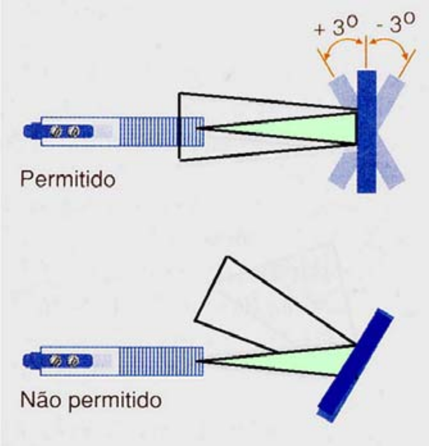
Comparando as saídas dos controladores para entrada a degrau unitário no matlab.
Os cálculos dos controladores P e PD, já foram definidos no matlab (num1, den1, num2, den2). Calculando a resposta a degrau para o controlador PID, temos:

```
num4 = 14.5*num3;          % numerador da malha fechada
den4 = den3 + num4;        % denominador da malha fechada
y4=step(num4,den4,t);
plot(t,y1,t,y2,t,y4);      % plotando os três controladores
```



Exercício 3) Refazer o projeto se o tempo de acomodação for 1 segundo e o sobressinal menor que 25%, com erro de regime zero.

SENSOR ULTRA-SÔNICO



O sensor ultra-sônico emite pulsos cíclicos ultra-sônicos que, quando refletidos por um objeto, incidem no receptor, acionando a saída do sensor.

Tanto o emissor como o receptor estão montados na mesma unidade, portanto, é necessário que haja uma reflexão (eco) do ultra-som de modo que este ative o receptor.

Deve-se ter cuidado quando decidir utilizar um sensor deste tipo, devido ao alinhamento angular. Dependendo da inclinação do alvo o eco pode desviar-se para uma direção diferente do sensor, não chegando ao receptor (localizado no mesmo componente). Geralmente este tio de sensor permite uma inclinação máxima de mais ou menos 3º.

Assim como o óptico, o sensor ultra-sônico pode suprimir o fundo (desprezar o eco do que não é objeto alvo de detecção). Neste caso, temos o tipo de barreira de reflexo. Vale reparar que o sensor ultra-sônico pode operar tal qual um óptico, no que se refere a capacidade de detecção.