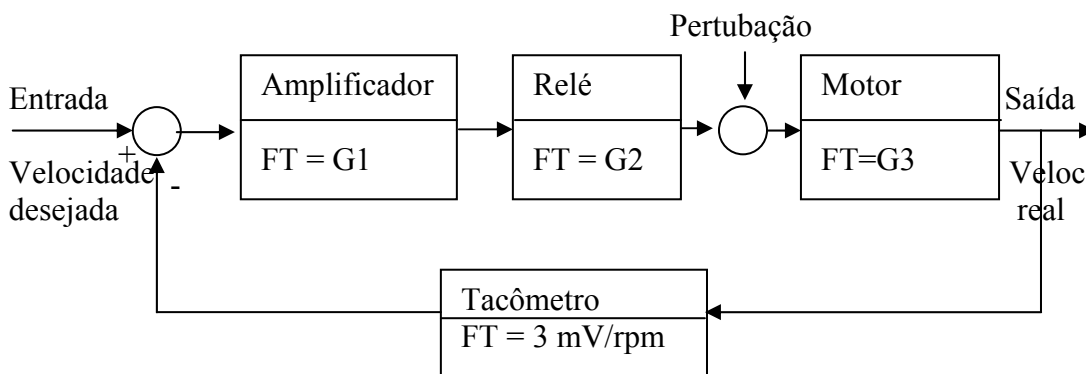


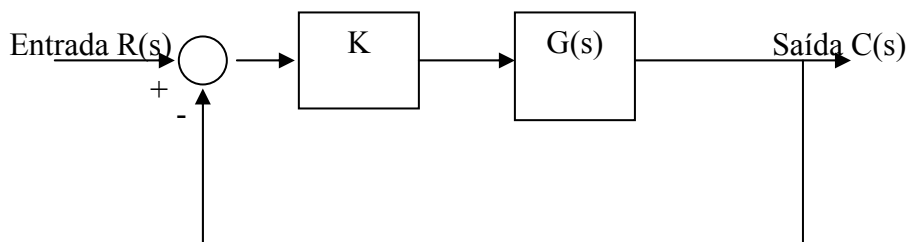
## Método do Lugar das Raízes

O Lugar das Raízes (LR) é um poderoso método para análise e projeto visando a estabilidade de sistemas. O LR é um método gráfico que mostra o lugar das raízes no plano  $s$  correspondente à variação de um parâmetro do sistema.

Considere o diagrama de blocos mostrado na figura abaixo:



Utilizando a redução de blocos, este modelo é transformado em um novo modelo com realimentação unitária:



A função de transferência para o sistema acima é:

$$FT(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K G(s)}$$

Os pólos do sistema em malha fechada são as raízes da função característica do sistema:

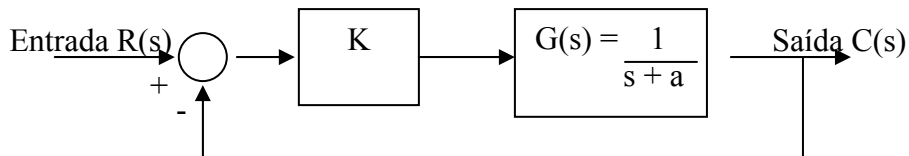
$$1 + K \cdot G(s) = 0$$

Torna-se claro que a variação no valor de  $K$  irá variar os valores dos pólos do sistema. Se forem calculados, e plotados no plano  $s$ , os valores dos pólos quando  $K$  varia de 0 até  $\infty$ , teremos o denominador lugar geométrico das raízes.

## Construção do Lugar das Raízes

### 1) Via Analítica:

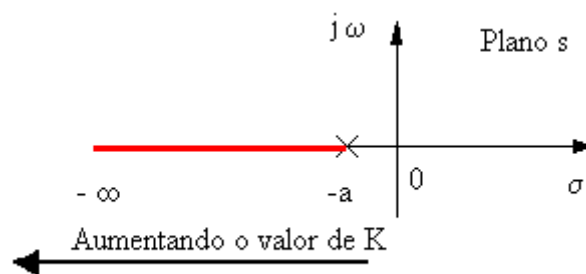
Considere o seguinte sistema:



A função de transferência para o sistema acima é:

$$FT(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot \frac{1}{(s+a)}}{1 + K \frac{1}{(s+a)}} = \frac{K}{(s+a) + K}$$

A equação característica tem um pólo em  $s = -(a + K)$ . Para desenhar o lugar das raízes devemos variar  $K$  de zero até o infinito. Plotando o lugar das raízes, temos:



Neste caso o lugar das raízes é uma semi-reta que começa em  $-a$  e tende a  $-\infty$  com o aumento de  $K$ . Portanto, o sistema é estável para qualquer valor de  $K > 0$  e quanto maior o valor de  $K$ , mais rápida será a resposta (menor transitório).

## II) Via Regras:

Para um sistema de 2ª ordem, a construção analítica não é tão simples. Para calcular o lugar das raízes nesse sistema foi desenvolvido um conjunto de regras. A equação característica pode ser escrita como:

$$1 + K.G(s) = 0$$

$$G(s) = \frac{-1}{K}$$

onde  $-1/K$  representam os pólos no sistema de malha fechada. Como  $G(s)$  é um número complexo, então escrevendo o mesmo em sua forma polar temos:

$$|G(s)| = \frac{1}{K}$$

Condição de Módulo

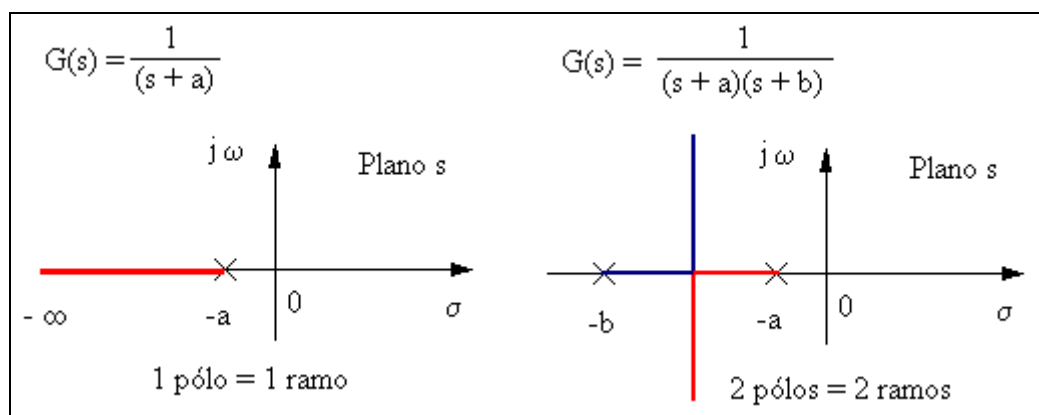
$$\arg(G(s)) = \pi \pm k.360^\circ$$

$$\text{onde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Condição de Argumento

As condições de módulo e argumento permitem deduzir um conjunto de regras para traçar o lugar das raízes. As regras mais comuns para construção do lugar das raízes são dadas na sequência.

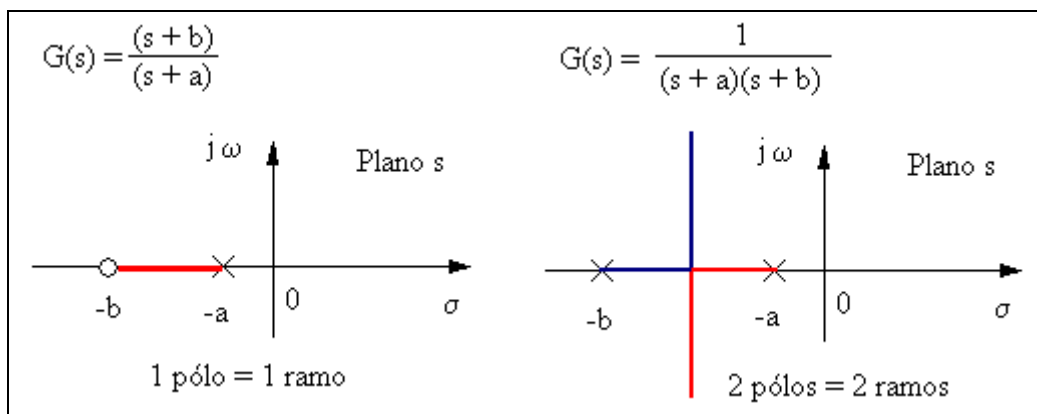
**REGRA 1-** O número de ramos do lugar das raízes é igual ao número de pólos da função de transferência de malha fechada



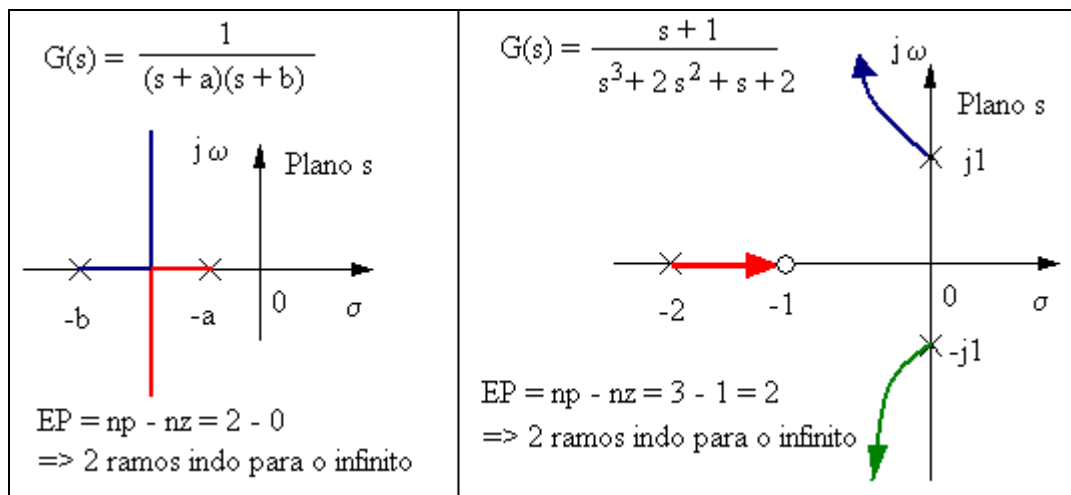
**REGRA 2** – O lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real.

**REGRA 3** – O lugar das raízes no eixo real está sempre em uma seção do eixo real à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros.

**REGRA 4** – Os ramos começam nos pólos e terminam nos zeros (finitos ou infinitos) de  $G(s)$ .



**REGRA 5** – Seja  $n_z$  o número de zeros,  $n_p$  o número de pólos em  $G(s)$ . O excesso de pólos  $EP = n_p - n_z$  indica o número de ramos que vão para o infinito.



**REGRA 6** – Os ramos que tendem ao infinito, o fazem seguindo assíntotas cujos ângulos ( $\theta_a$ ) com o semi-eixo real positivo são dados por:

$$\theta_a = \frac{(2k+1)}{n^\circ \text{ pólos} - n^\circ \text{ zeros}} \pi \quad k = 0, 1, 2, \dots (n^\circ \text{ pólos} - n^\circ \text{ zeros} - 1)$$

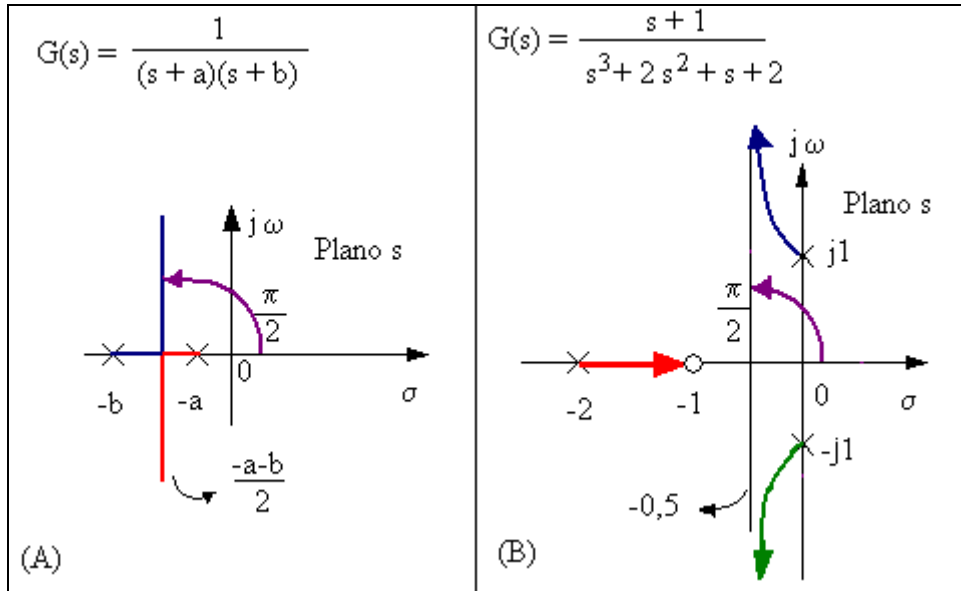


	FIGURA A	FIGURA B
Número de pólos (np)	2	3
Número de zeros (nz)	0	1
$k = 0, \dots (np - nz - 1)$	0 e 1	0 e 1
$\theta_a = \frac{(2k+1)}{np - nz} \cdot \pi$	$\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$

**REGRA 7** – O centróide das assíntotas ( $\sigma_a$ ), isto é, onde as assíntotas cruzam o eixo real é dado por:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{pólos} - \sum \text{zeros}}{n^\circ \text{ pólos} - n^\circ \text{ zeros}}$$

Os centróides das assíntotas das figuras acima são:

Figura A:

$$\sigma_a = \frac{-a-b}{2-0} = \frac{-a-b}{2}$$

Figura B:

$$\sigma_a = \frac{[-2-j+j]-[-1]}{3-1} = \frac{-1}{2}$$

**REGRA 8** – Vários ramos deixam o eixo real quando os pólos do sistema movem-se do eixo real para o plano complexo. Muitos ramos, também, entram no eixo real quando seus pólos complexos se transformam em pólos reais. Os pontos de saída e entrada sobre o eixo real podem ser determinados através das seguintes equações:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d\left(-\frac{1}{G(s)}\right)}{ds} = 0$$

ou 
$$\sum_1^m \frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_1^n \frac{1}{\sigma - p_i} \quad \text{onde } s = \sigma, \text{ por estar sobre o eixo real.}$$

**Exemplo 1)**  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

Método derivação:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d(-s(s+1))}{ds} = \frac{d(-s^2 - s)}{ds} = -2s - 1 = 0 \Rightarrow s = \sigma = -0,5$$

Método alternativo:

$$\sum_1^m \frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_1^n \frac{1}{\sigma - p_i}$$

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma + 1} = 0 \Rightarrow \sigma = -0,5$$

**Exemplo 2)**  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)(s+6)}$

Método derivação:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d(-(s+1)(s+4)(s+6))}{ds} = \frac{d(-s^3 - 11s^2 - 34s - 24))}{ds} = -3s^2 - 22s - 34 = 0$$

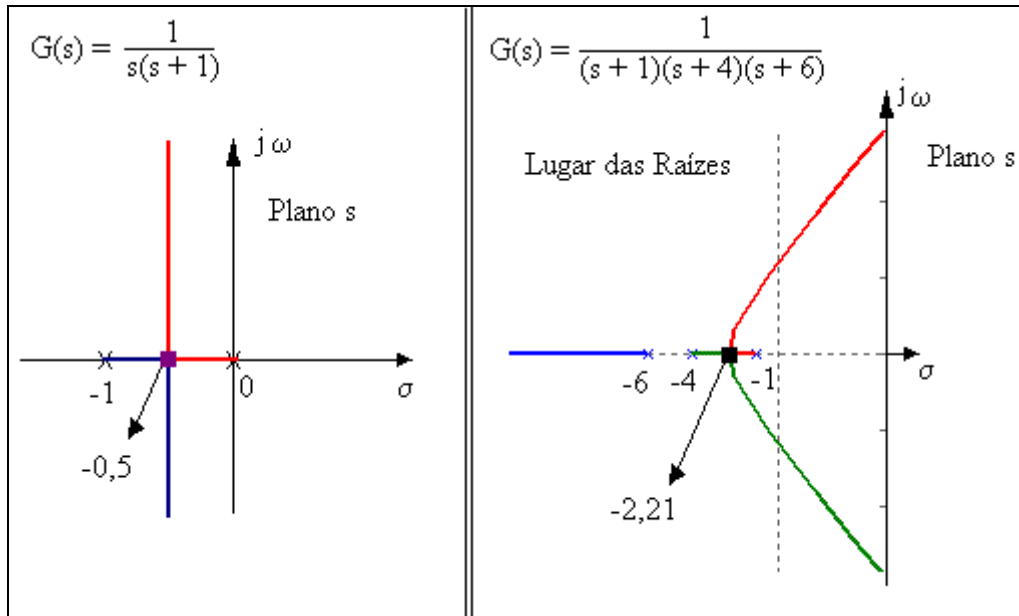
$$\Rightarrow s_1 = \sigma = -2,21 \quad e \quad s_2 = \sigma = -5,2$$

Método alternativo:

$$\sum_1^m \frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_1^n \frac{1}{\sigma - p_i}$$

$$\frac{1}{\sigma + 1} + \frac{1}{\sigma + 4} + \frac{1}{\sigma + 6} = 0 \Rightarrow \sigma_1 = -2,21 \quad e \quad \sigma_2 = -5,2$$

No exemplo 2 existem dois pontos de saída e entrada, mas o valor de  $\sigma = -5.2$  não pertence ao lugar das raízes, portanto a resposta correta do ponto de saída e entrada é  $\sigma = -2.21$ . A figura abaixo mostra o gráfico dos dois exemplos:



**REGRA 9** – Os pontos de intersecção com o eixo imaginário podem ser calculados utilizando a equação característica em malha fechada substituindo  $s$  por  $j\omega$ :

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Substituindo  $s$  por  $j\omega$ :

$$a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + a_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-2} (j\omega)^2 + a_{n-1} (j\omega) + a_n = 0$$

O sistema deve ser resolvido separando a parte real da imaginária e igualando-as a zero.

Exemplo:

$$G_{MF} = \frac{K}{(s+6)(s+1)(s+4) + K}$$

Equação característica:  $s^3 + 11s^2 + 34s + 24 + K = 0$

Substituindo  $s$  por  $j\omega$ :

$$(j\omega)^3 + 11(j\omega)^2 + 34j\omega + 24 + K = 0$$

$$-j\omega^3 - 11\omega^2 + 34j\omega + 24 + K = 0$$

Parte real:  $-11\omega^2 + 24 + K = 0 \rightarrow K = 350$

Parte imaginária:  $-\omega^3 + 34\omega = 0 \rightarrow \omega = 5,83$

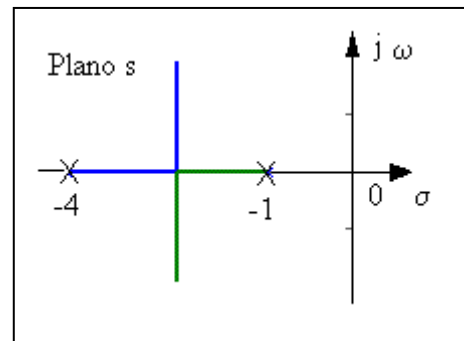
Assim, o cruzamento no eixo imaginário ocorre em  $\pm j5,83$ .

### Efeito da Adição de um Pólo no Sistema

Considere a seguinte função de transferência:

$$FT_{MA} = \frac{1}{(s+1)(s+4)}$$

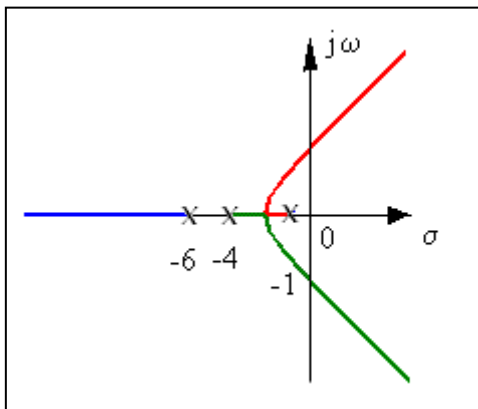
$$FT_{MF} = \frac{K}{(s+1)(s+4) + K}$$



Fazendo dois estudos, um adicionando um pólo à esquerda do pólo -4 e outro estudo adicionando um pólo na origem:

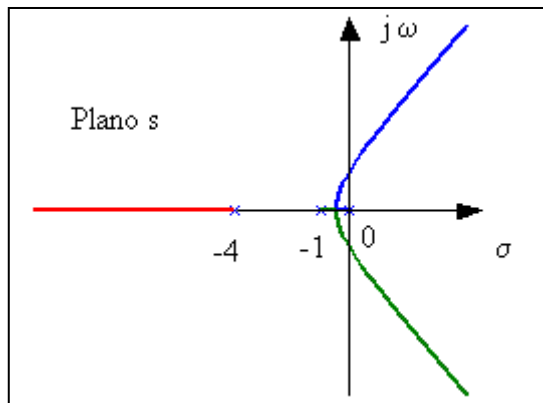
$$FT_{MA} = \frac{1}{(s+1)(s+4)(s+6)}$$

$$FT_{MF} = \frac{K}{(s+1)(s+4)(s+6) + K}$$



$$FT_{MA} = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$$

$$FT_{MF} = \frac{K}{s(s+1)(s+4) + K}$$



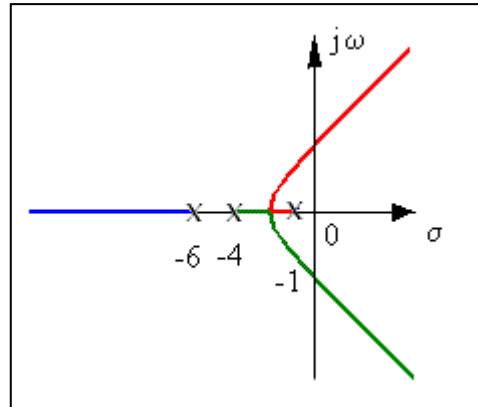
Comparando os dois estudos do lugar das raízes acima com o diagrama original, nota-se que a adição de um pólo no sistema em malha aberta leva o lugar das raízes para a direita. Com isso, o sistema em malha fechada pode ter pólos no semiplano direito do plano s e torna o sistema instável.

### Efeito da Adição de um Zero no Sistema

Considere a seguinte função de transferência:

$$FT_{MA} = \frac{1}{(s+1)(s+4)(s+6)}$$

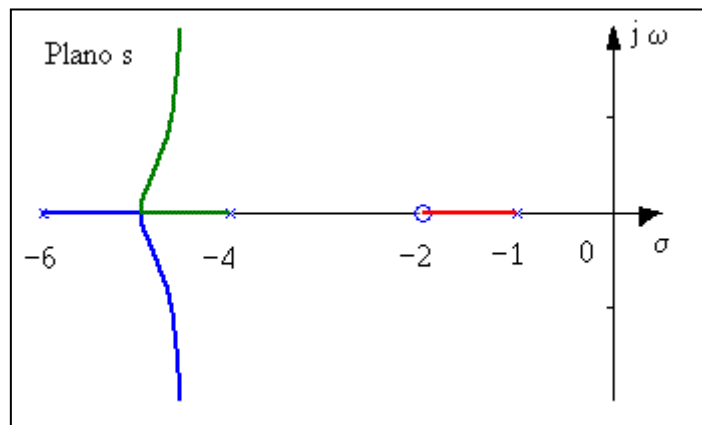
$$FT_{MF} = \frac{K}{(s+1)(s+4)(s+6) + K}$$



Adicionando um zero no sistema, temos:

$$FT_{MA} = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+4)(s+6)}$$

$$FT_{MF} = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+4)(s+6) + K(s+2)}$$



Comparando os dois diagramas acima, nota-se que a adição de um zero no sistema em malha aberta leva o lugar das raízes para a esquerda. Com isso, o sistema em malha fechada será mais estável.

**Passos para construção do lugar das raízes:**

- 1) Marcar os pólos e os zeros de  $G(s)$ .
- 2) Determinar o número de ramos do lugar das raízes (= ao número de pólos)
- 3) Em cada seção do lugar no eixo real, marcar o sentido do deslocamento dos pólos.
- 4) Determinar os ângulos das assíntotas:

$$\theta_a = \frac{(2k+1)}{n^\circ \text{ pólos} - n^\circ \text{ zeros}} \pi \quad k = 0, 1, 2, \dots (n^\circ \text{ pólos} - n^\circ \text{ zeros} - 1)$$

- 5) Obter a intersecção das assíntotas com o eixo real:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{pólos} - \sum \text{zeros}}{n^\circ \text{ pólos} - n^\circ \text{ zeros}}$$

- 6) Determinar o ponto de saída e entrada no eixo real:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma - p_i}$$

- 7) Determinar o ponto de intersecção com o eixo imaginário, substituindo  $s$  por  $(j\omega)$  na equação característica da malha fechada e igualando a parte real e a parte imaginária a zero.
- 8) Esboçar o lugar das raízes.

Exercício 1) Um sistema em malha fechada tem três pólos e nenhum zero. O que se pode dizer a respeito de sua estabilidade? Como sua estabilidade relativa pode ser melhorada?

Exemplo 3) Esboçar o lugar das raízes para o sistema cuja função de transferência em malha aberta é:

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

passo 1: Marcando os pólos e zeros:

passo 2: Número de ramos = número de pólos = 3

passo 3: EP =  $n_p - n_z = 3 - 0 = 3$  ramos vão para o infinito.

passo 4: Ângulos das assíntotas:

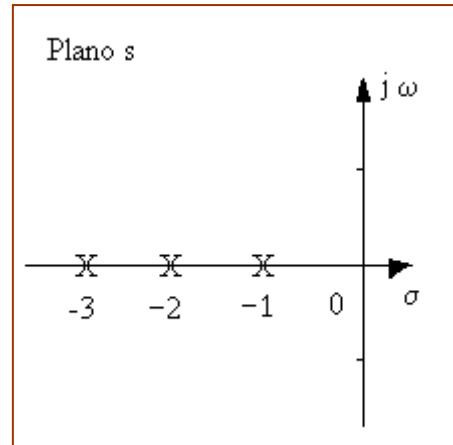
$$\theta_a = \frac{(2k+1)}{n^\circ \text{ pólos} - n^\circ \text{ zeros}} \pi \quad k = 0, 1, 2$$

$$\theta_a = \frac{(2k+1)}{3} \pi$$

$$\theta_a = \pi/3$$

$$\theta_a = \pi$$

$$\theta_a = 5\pi/3$$



passo 5: Determinação da intersecção das assíntotas com o eixo real:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{pólos} - \sum \text{zeros}}{n^\circ \text{ pólos} - n^\circ \text{ zeros}} = \frac{(-3 - 2 - 1) - 0}{3 - 0} = -2$$

passo 6: Ponto de saída e entrada do eixo real:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma - p_i}$$

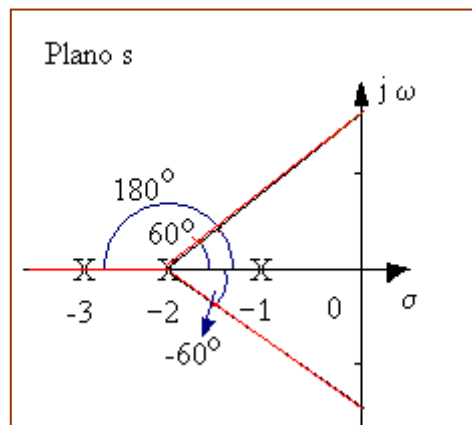
$$\frac{1}{\sigma + 3} + \frac{1}{\sigma + 2} + \frac{1}{\sigma + 1} = 0$$

$$(\sigma + 2)(\sigma + 1) + (\sigma + 3)(\sigma + 1) + (\sigma + 3)(\sigma + 2) = 0$$

$$(\sigma^2 + 3\sigma + 2) + (\sigma^2 + 4\sigma + 3) + (\sigma^2 + 5\sigma + 6) = 0$$

$$3\sigma^2 + 12\sigma + 11 = 0$$

$$\sigma = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6} = -2 \pm 0,58 \quad \sigma_1 = -1,42 \quad e \quad \sigma_2 = -2,58$$



Apenas a raiz  $\sigma = -1,42$  será o ponto de ramificação, uma vez que não haverá ramo entre -2 e -3, isto porque o pólo -1 tenderá ao infinito seguindo a assíntota de 60°, o pólo -2 tenderá ao infinito seguindo a assíntota de -60° e o pólo -3 irá ao infinito seguindo a assíntota de 180°.

passo 7: Determinação do ponto de intersecção com o eixo imaginário:  
Equação característica da malha fechada:

$$(s+1)(s+2)(s+3) + K = 0$$

Substituindo  $s$  por  $j\omega$ :

$$(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3) + K = 0$$

$$j^3\omega^3 + j^2\omega^2 6 + j\omega 11 + 6 + K = 0$$

$$-j\omega^3 - 6\omega^2 + j\omega 11 + 6 + K = 0$$

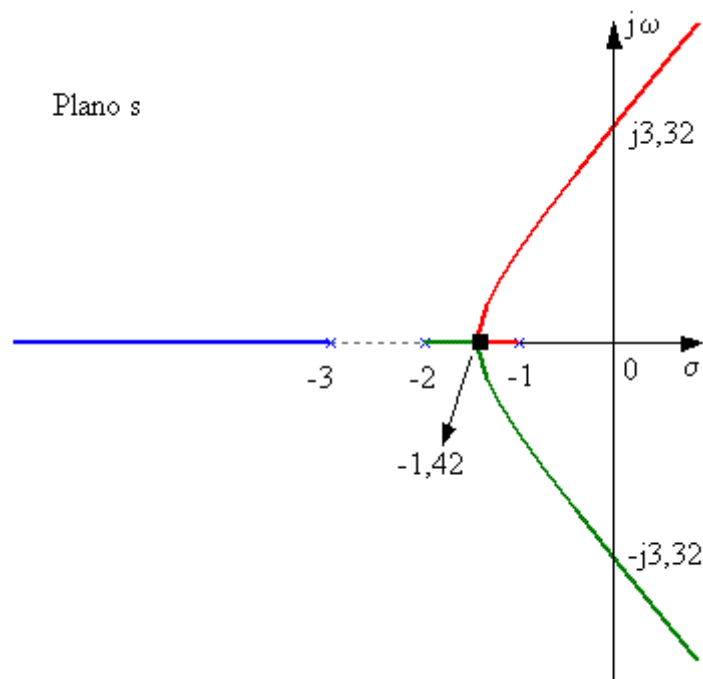
Igualando as partes reais e imaginária = 0, temos

$$-j\omega^3 - 6\omega^2 + j\omega 11 + 6 + K = 0$$

$$\text{imaginária : } -\omega^3 + 11\omega = 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{11}$$

$$\text{real : } -6\omega^2 + 6 + K = 0 \Rightarrow K = 60$$

passo 8: Esboçando o gráfico usando as informações acima:



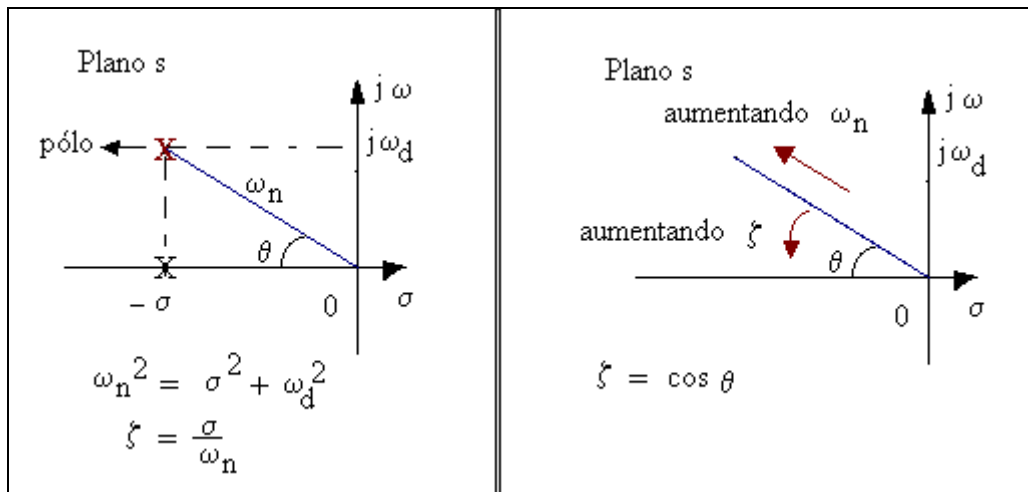
Exercício 2) Esboçar o lugar das raízes das seguintes funções de transferência em malha aberta:

a)  $G(s) = \frac{1}{(s+3)(s^2+s+1)}$

b)  $G(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(s^2+s+1)}$

c)  $G(s) = \frac{(s + 2)}{(s + 3)(s^2 + s + 1)(s + 1)}$

Considere um pólo no plano s:



Nota-se que qualquer mudança na localização do pólo irá influenciar no valor da frequência natural (ω<sub>n</sub>) e na constante de amortecimento (ζ). Essas variações influenciam o desempenho do sistema, pois conforme capítulo 5, temos:

Tempo de acomodação →

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{\sigma}$$

Tempo de pico →

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Tempo de subida →

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

Exemplo 4: Um sistema tem uma função de transferência em malha aberta dada por:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+6)}$$

Qual o ganho quando existe:

- Um amortecimento crítico (ζ = 1)
- coeficiente de amortecimento = 0,6
- esboçar o lugar das raízes

a) A função de transferência em malha fechada será:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+6) + K} = \frac{K}{s^2 + 6s + K}$$

Logo, as raízes do sistema serão:

$$s = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4K}}{2} \Rightarrow s_{1,2} = -3 \pm j\sqrt{K - 9}$$

- Para o amortecimento crítico a parte imaginária da raiz é zero, isto acontecerá se:

$$K - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 9.$$

c) As raízes do sistema são dadas por:

$$s = \sigma \pm \omega_d = -3 \pm j\sqrt{K - 9}$$

temos que conhecer quem é o valor de  $\omega_d$  para conseguir calcular o ganho K.

Pela equação anterior tem-se:  $\sigma = -3$

Para calcular  $\omega_d$  é necessário conhecer  $\omega_n$ :

$$\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \left| \frac{-3}{0,6} \right| = 5 \quad rad / s$$

Calculando  $\omega_d$ :

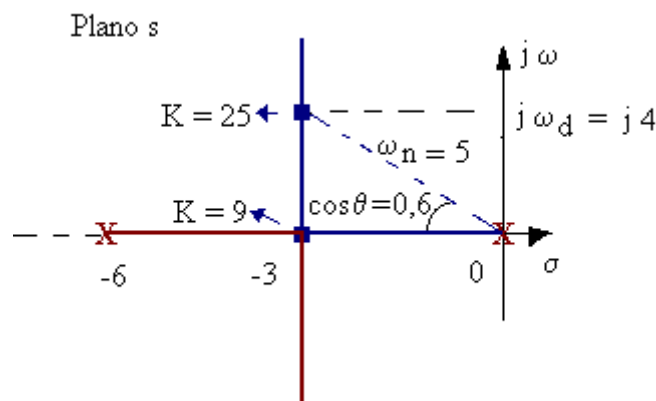
$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega_d^2$$

$$25 = 9 + \omega_d^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_d = 4 \quad rad / s$$

Portanto o ganho K poderá ser calculado por:

$$\omega_d = 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{K - 9} = 4 \quad \Rightarrow \quad K = 25$$

c) o diagrama do lugar das raízes é mostrado abaixo:



Exercício 3: Para a função de transferência em malha aberta abaixo, calcule :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

- a) Ganho do sistema para amortecimento crítico
- b) Ganho do sistema para um coeficiente de amortecimento de 0,6
- c) esboce o lugar das raízes

Resp: a)  $K = 0,25$ ,      b)  $K = 0,7$

## SEÇÃO MATLAB

O Matlab traça o lugar das raízes automaticamente através dos comandos:

`rlocus(num, den)` → o vetor K é determinado automaticamente  
`rlocus(num,den,K)` → vetor K é fornecido pelo usuário

Pode-se, também, utilizar argumentos:

`[r,k] = rlocus(num, den)`  
`[r,k] = rlocus(num, den, K)`

onde: r é uma matriz que contém a localização das raízes complexas  
 k apresentará o vetor de ganho K

Exemplo: Esboçar o lugar das raízes para:

$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s^2+4s+16)}$$

Fazendo  $a = s(s+1) \rightarrow a = [1 \ 1 \ 0]$   
 e  $b = (s^2+4s+16) \rightarrow b = [1 \ 4 \ 16]$

```
a = [1 1 0];
b = [1 4 16];
c = conv(a,b)      % Fazendo a multiplicação de a por b,
                  % para obter os coeficientes da equação característica
c =
    1     5    20    16     0      % equação característica 4ª ordem

num = [0 0 0 1 3]; % numerador de G(s) sem o ganho K
rlocus(num,c)      % gráfico do lugar das raízes
```

Na análise de um sistema de malha fechada, freqüentemente é necessário determinar um ganho K. Com o Matlab isso é realizado através do comando:

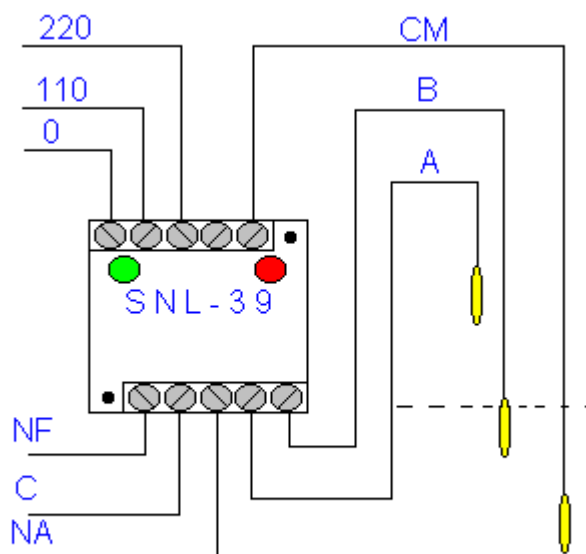
```
rlocfind(num, den);
[K,r]=rlocfind(num,den)
```

Com esses comandos um clique no gráfico no ponto de interesse faz com que o Matlab forneça o ganho correspondente.

```
% usando o mesmo sistema anterior:
rlocfind(num, den); % abre o gráfico do lugar das raízes e espera o usuário
                  % clicar em um ponto.
```

Como exercício: faça todos os gráficos desta apostila utilizando o matlab.

### Sonda de Nível para Líquidos - SNL - 39



### Aplicações

Para acionamento de Bombas d'água submersíveis ou não, em tanques, galerias de cabos, controle de aquecimento de caldeiras e etc. O diferencial é ajustável, conforme as necessidades do usuário, desta forma evita-se o aquecimento ou queima de Moto-bombas.

### Dados Técnicos

- SNL-39 - Unidade eletrônica em caixa ABS, NORMA DIN, fiação em trilho ou parafuso.
- Unidade Sensora (01C) - com 03 eletrodos com cabos de aço flexível, isolamento plástica e pêra suspensa na extremidade para estender os cabos até os níveis desejados, pelo usuário.
- Unidade Sensora (02H) - com 03 eletrodos tipo HASTE rígidas em aço inox, com isolamento plástica e comprimento até os níveis desejados, pelo usuário.
- Alimentação: 110/220VAC
- Contatos de Saída: SPDT 10A/250VAC
- Sensores: CM com 1,5 mts(padão)
- B (nível baixo) - 1,35 mts(padão)
- A (nível Alto) - 1,20 mts(padão)