Objetivo:

Após levantar o modelo matemático do sistema, o mesmo deve ser analisado quanto ao seu desempenho antes que o mesmo seja executado definitivamente. Para isso é analisada a resposta do sistema a algumas entradas padrões (degrau, rampa, impulso, senoidais e outras).

A resposta de um sistema de controle é composta de duas partes: a resposta transitória e a resposta estacionária. A resposta transitória é aquela que vai do estado inicial até o sistema atingir a resposta estacionária. A resposta estacionária é a aproximação do sistema à resposta desejada ou comandada.

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$$

resposta transitória ← $c_{tr}(t)$; $c_{ss}(t)$ → resposta estacionária

Características importantes no projeto:
- Estabilidade absoluta (se o sistema é estável ou instável)
- Estabilidade relativa (oscilações em regime transitório)
- Erro estacionário (Precisão do sistema: é a diferença entre a saída em regime estacionário (ou permanente) e a entrada).

Sistemas de 1ª e 2ª Ordem

Ordem do Sistema: A ordem do sistema é a mais alta potência da derivada da equação diferencial, ou a mais alta potência de s no denominador.

Exercício 1: Quais a ordem dos sistemas abaixo:

a) $G(s) = \dfrac{1}{ms^2 + cs + k}$

b) $G(s) = \dfrac{1}{RCs + 1}$

c) $G(s) = \dfrac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$

d) $G(s) = \dfrac{1}{(R/L) + RCs^2 + s}$

e) $p = \rho L \dfrac{d^2h}{dt^2} + RA\dfrac{dh}{dt} + 2h\rho g$

f) $v = \dfrac{vc}{R} + C\dfrac{dvc}{dt} + \dfrac{1}{L}\int vcdt$

Sistemas de 1ª Ordem

Forma Geral: $$FT(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

A equação diferencial de primeira ordem é dada por:

$$a_1 \frac{d[c(t)]}{dt} + a_0.c(t) = b_0 r(t)$$

Convertendo para o domínio da freqüência:

$$a_1.s.C(s) + a_0.C(s) = b_0.R(s)$$

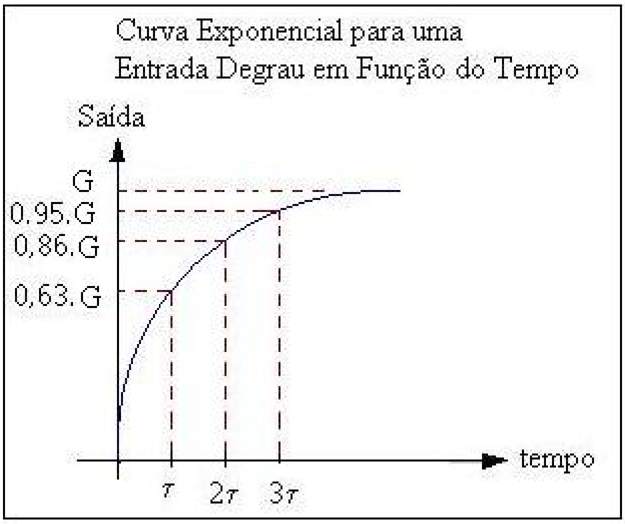
Rearranjando os termos para ficar igual à forma geral:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{a_1.s + a_0} = \frac{b_0 / a_0}{(a_1 / a_0).s + 1} = G.\frac{1}{Ts+1}$$

Neste caso T = a_1/a_0 → constante de tempo do sistema. A constante de tempo é descrita como o tempo necessário para que a resposta do sistema alcance 63% do seu valor final.

Resposta ao Degrau Unitário

A transformada de Laplace para o degrau unitário é 1/s. Inserindo essa entrada em um sistema de primeira ordem, obtém-se:



$$FT(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{Ts+1}$$

$$FT(s) = \frac{C(s)}{1/s} = \frac{G}{Ts+1}$$

$$C(s) = \frac{G}{Ts+1}.\frac{1}{s} = G.\frac{1/T}{s[s+1/T]}$$

Utilizando a tabela de transformadas de Laplace, a inversa é dada por:

$$c(t) = G.[1 - e^{-t/T}]$$

O gráfico dessa função é mostrado acima. Note que quanto menor a constante de tempo τ, mais rápido o sistema responde.

Exemplo 1: Um termopar tem como entrada a temperatura e a saída é uma tensão. Considerando que o mesmo tenha uma função de transferência de:

$$G(s) = \frac{30.10^{-6}}{10s+1}$$

Qual será (a) o tempo gasto para a saída do termopar alcançar 95% de seu valor final e (b) qual o valor final quando é aplicada uma entrada degrau de 100º C?

(a) A função de transferência dada é de primeira ordem, comparando com a forma geral T = 10s. Para atingir 95% (ver gráfico) é necessário 3.τ. Assim será necessário 30s para atingir 95%.
(b) A saída do sistema para entrada a degrau é dada por:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{30.10^{-6}}{10s+1}$$

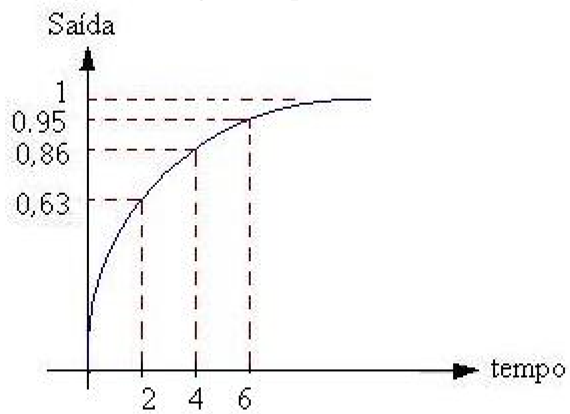
$$C(s) = \frac{30.10^{-6}}{10s+1}.\frac{100}{s} = \frac{3000.10^{-6}}{s[10s+1]}$$

Para conhecer o valor final deve-se aplicar o teorema do valor final:

$$\lim_{s\to 0} s.F(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

logo: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s.\frac{3000.10^{-6}}{s[10s+1]} = \lim_{s\to 0} \frac{3000.10^{-6}}{[10s+1]} = 3000.10^{-6} \quad V$

Exercício 2:
a) No gráfico seguinte qual a função de transferência do sistema?



b) Qual o valor inicial e o valor final quando for aplicado uma entrada degrau com uma amplitude de 7.

Resposta à Rampa Unitária

A transformada de Laplace para a rampa unitária é $1/s^2$. Inserindo essa entrada em um sistema de primeira ordem, obtém-se:

$$FT(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{Ts+1}$$

$$FT(s) = \frac{C(s)}{1/s^2} = \frac{G}{Ts+1}$$

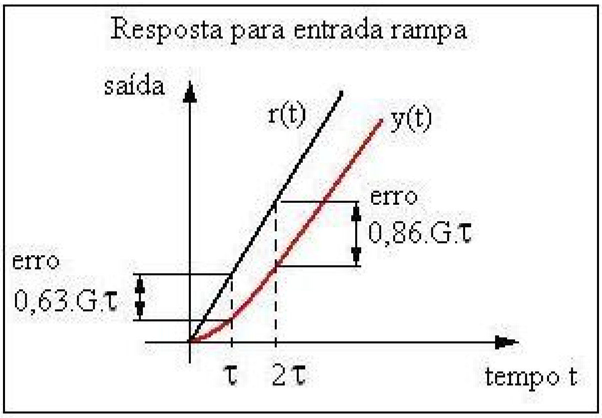
$$C(s) = \frac{G}{Ts+1}.\frac{1}{s} = G.\frac{1/T}{s^2[s+1/T]}$$

Utilizando a tabela de transformadas de Laplace, a inversa é dada por:

$$c(t) = G.[t - \tau(1 - e^{-t/T})]$$

O gráfico dessa função é mostrado ao lado →
Onde: r(t) - sinal de entrada
y(t) - sinal de saída

Aqui quanto menor a constante de tempo τ, menor o erro no estado estacionário.



Considerando G=1, o sinal do erro do sistema é dado pela saída desejada (no caso a rampa r(t)) e a saída obtida (y(t)):

$$e(t) = t - [t - T(1 - e^{t/T})]$$

$$e(t) = T(1 - e^{\tau/T}) \quad \Rightarrow \quad e(\infty) = T$$

Exemplo 2: Um termopar tem como entrada a temperatura e a saída é uma tensão. Considerando que o mesmo tenha uma função de transferência de:

$$G(s) = \frac{30.10^{-6}}{10s+1}$$

a) Quando o termopar estiver sujeito a uma entrada de temperatura rampa de 5º C/s, qual será a saída após ter decorrido 12s?

Pela equação a constante de tempo T = 10s e G = 30.10^{-6}
O sinal de entrada (rampa) não é unitário, portanto a equação da saída fica:

$c(t) = G.A.[t - T(1 - e^{-t/T})]$ onde A é a inclinação da rampa (5º C/s)

Após 12s a saída será:

$$c(t) = 30.10^{-6}.5.[12 - 10(1 - e^{-12/10})] = 7{,}5x10^{-4}V$$

b) Qual o atraso dessa saída em relação à entrada?

A entrada é uma rampa com inclinação igual a 5, logo após 12s o valor da entrada será:

$$r(t) = G.A.t$$
$$r(12t) = 30.10^{-6}.5.12 = 18x10^{-4}V$$

A saída após 12s foi calculada no item anterior, logo o erro (ou atraso) entre a entrada e a saída será:

$$Entrada - Saída = 18.10^{-4} - 7{,}5.10^{-4} = 10{,}5x10^{-4}V$$

Resposta ao Impulso

A transformada de Laplace para o impulso unitário é 1. Inserindo essa entrada em um sistema de primeira ordem, obtém-se:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{Ts+1}$$
$$T(s) = \frac{C(s)}{1} = \frac{G}{Ts+1}$$
$$C(s) = \frac{G}{Ts+1}.1 = G.\frac{1/T}{[s+1/T]}$$

Utilizando a tabela de transformadas de Laplace, a inversa é dada por:

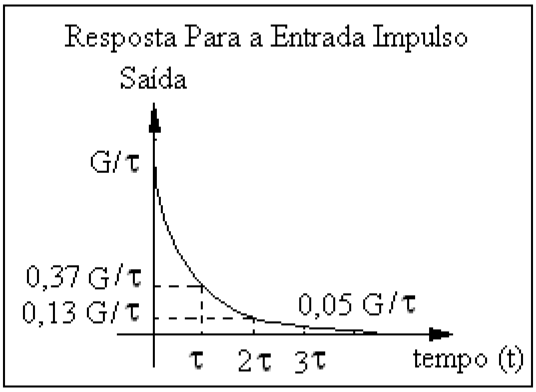
$$c(t) = G.(1/t)e^{-t/T}$$

Se o impulso tem uma amplitude A, então a equação torna-se:

$$c(t) = G.A.(1/t)e^{-t/T}$$

A figura abaixo mostra a resposta para a entrada impulso unitário:

Quanto menor a constante de tempo T, mais rápido o sistema responde.



Exemplo 3: Considerando a função de transferência do termopar igual a:

$$G(s) = \frac{30.10^{-6}}{10s+1}$$

a) Qual será sua saída após 5s se o termopar for sujeito a uma entrada de 100º C?

Pela equação a constante de tempo T = 10s e G = 30.10^{-6}

O sinal de entrada (impulso) não é unitário, portanto a equação da saída fica:

$$c(t) = G.A.(1/t)e^{-t/T}$$

$$c(t) = 30.10^{-6}.100.(1/10)e^{-5/10} = 1{,}8x10^{-4}V$$

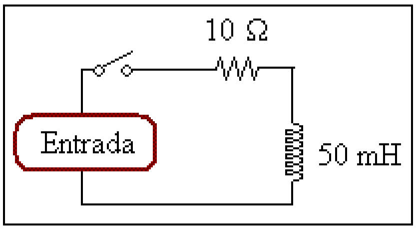
b) Qual será o valor inicial e o valor final da saída?

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s.F(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{30.10^{-6}}{10s+1}.100 = \lim_{s\to\infty}\frac{3000.10^{-6}}{10+1/s} = 300x10^{-6} \quad V$$

$$\lim_{t\to \infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s.F(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{30.10^{-6}}{10s+1}.100 = \lim_{s\to 0}\frac{3000.10^{-6}}{10+1/s} = 0 \quad V$$

Exercício 3: Considere no circuito abaixo que a chave seja fechada no instante t=0. Obter a resposta do sistema quando a entrada for:

a) Impulso com amplitude 5 V.
b) Rampa com inclinação = 5 V/s.



Sistemas de 2ª Ordem

Forma Geral: $$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2}$$

A equação diferencial de segunda ordem é dada por:

$$a_2 \frac{d^2[c(t)]}{dt^2} + a_1 \frac{d[c(t)]}{dt} + a_0.c(t) = b_0.r(t)$$

A equação diferencial de segunda ordem deve ser escrita na forma padrão, isto é, em termos da freqüência natural ω_n e do coeficiente de amortecimento ζ.

$$\frac{d^2[c(t)]}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d[c(t)]}{dt} + \omega_n^2.c(t) = b_0\omega_n^2 r(t)$$

onde:

ω_n – freqüência natural, no qual o sistema oscila na ausência do amortecimento.
ζ – coeficiente de amortecimento.

Convertendo para o domínio da freqüência, considerando que em t=0 temos c(t)=0 e d[c(t)]/dt=0:

$$s^2.C(s) + 2.\zeta\omega_n.s.C(s) + \omega_n^2.C(s) = b_0.\omega_n^2.R(s)$$

Rearranjando os termos:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_o\omega_n^2}{s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2} = b_o \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2}$$

Os sistemas de segunda ordem podem ser apresentados, também, das seguintes formas:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2.\sigma.s + \omega_n^2}$$

onde:

$\sigma = \zeta.w_n \rightarrow$ atenuação

Resposta ao Degrau para um Sistema de Segunda Ordem

A transformada de Laplace para o degrau unitário é 1/s. Inserindo essa entrada em um sistema de segunda ordem, obtém-se:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2}.R(s)$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{\left(s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2\right)s}$$

Calculando as raízes (m_1 e m_2) da equação de segundo grau:

$$s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2$$

$$s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \quad \begin{cases} s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)} \\ s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)} \end{cases}$$

A função de transferência anterior pode ser escrita em função das raízes da equação do segundo grau:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)s}$$

O tipo de resposta que ocorre depende do valor do fator de amortecimento ζ. Quando:

$$\zeta > 1 \Rightarrow \sqrt{(\xi^2 - 1)} \quad \textit{número} \quad \textit{real} \Rightarrow \quad \textit{sistema} \quad \textit{superamortecido}$$

$$\zeta = 1 \Rightarrow m_1 = m_2 = -\zeta\omega_n \quad \Rightarrow \quad \textit{sistema} \quad \textit{criticamente} \quad \textit{amortecido}$$

$$\zeta < 1 \Rightarrow \sqrt{(\xi^2 - 1)} \quad \textit{raízes} \quad \textit{complexas} \Rightarrow \quad \textit{sistema} \quad \textit{subamortecido}$$

Resposta Degrau Unitário para o Sistema subamortecido (0<ζ<1)

O sistema subamortecido possui pólos complexos. Escrevendo a equação em termos de suas raízes:

$$C(s)=\frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{\left(s^2+2.\zeta\omega_n.s+\omega_n^2\right)}=\frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{\left(s+\zeta\omega_n+j\omega_d\right)\left(s+\zeta\omega_n-j\omega_d\right)}$$

onde:

$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ → freqüência natural amortecida.

Aplicando a transformada inversa de Laplace tem-se:

$$c(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}.sen\left(\omega_d t+tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\qquad t\geq 0\qquad OU$$

$$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t)+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}.sen(\omega_d t)\right)$$

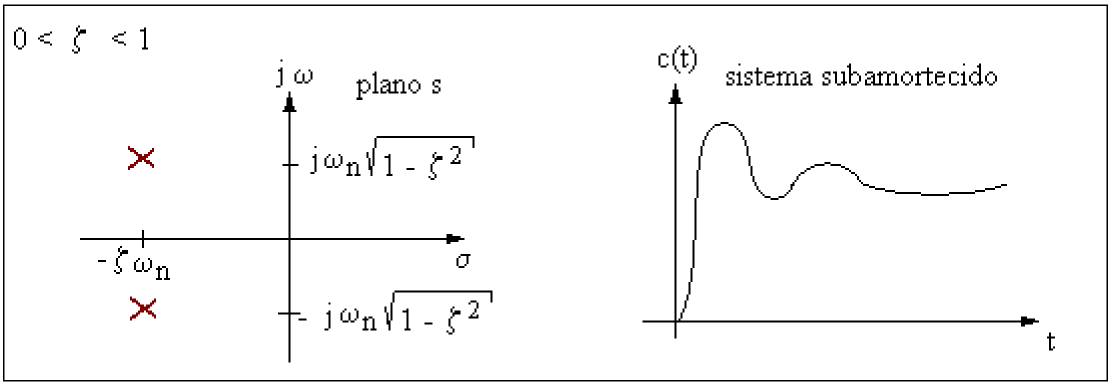
O sinal de erro deste sistema é dado por:

$$e(t)=r(t)-c(t)$$

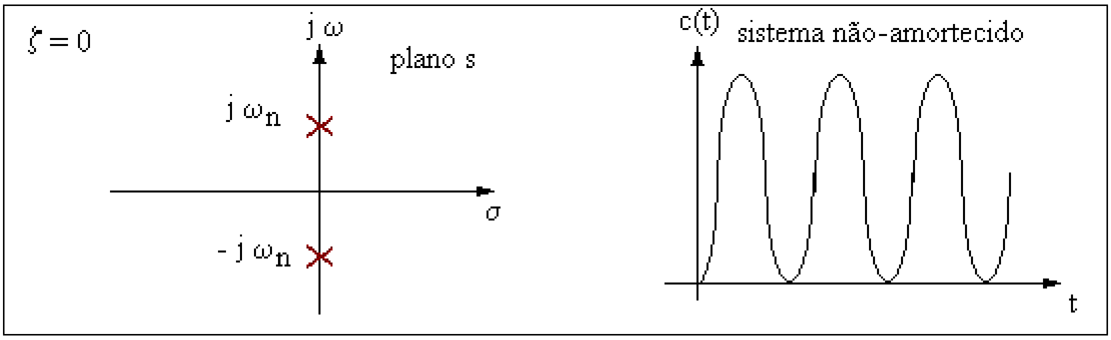
$$e(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t)+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}.sen(\omega_d t)\right)$$ oscilações senoidais

Se t→∞ ➔ erro → 0

A figura seguinte mostra as raízes no plano s de um sistema subamortecido, bem como a resposta do sistema a entrada degrau:



Se ζ = 0 (somente parte imaginária) → c(t) = 1 – cos(w_n.t) → oscilações permanentes. A figura seguinte mostra esta condição:



Resposta Degrau Unitário para o Sistema Criticamente Amortecido (ζ=1)

O sistema criticamente amortecido possui 2 raízes (pólos) reais e iguais. Para a entrada degrau unitário:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{\left(s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2\right)}$$

$$C(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{\left(s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2\right)}$$

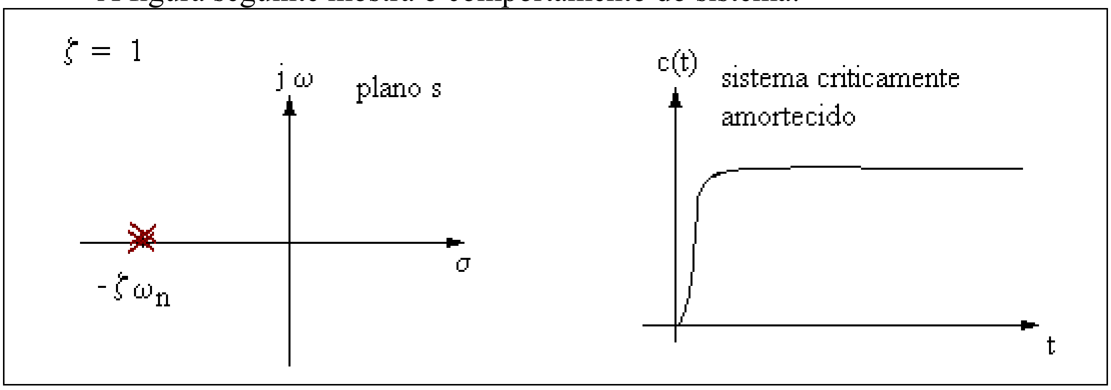
Escrevendo a equação acima em termos de suas raízes e lembrando que $s_1 = s_2 = -\zeta\omega_n$ (com $\zeta = 1$)

$$C(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{\left(s + \omega_n\right)^2}$$

Assim, utilizando a transformada inversa de Laplace, a resposta do sistema é dada por:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$$

A figura seguinte mostra o comportamento do sistema:



Resposta Degrau Unitário para o Sistema Superamortecido (ζ>1)

Este sistema possui dois pólos (raízes) reais e negativos. Para entrada degrau unitário:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{\left(s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2\right)}$$

$$C(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{\left(s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2\right)}$$

Escrevendo em termos das raízes do sistema:

$$s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2$$

$$s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \qquad \begin{cases} s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)} \\ s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)} \end{cases}$$

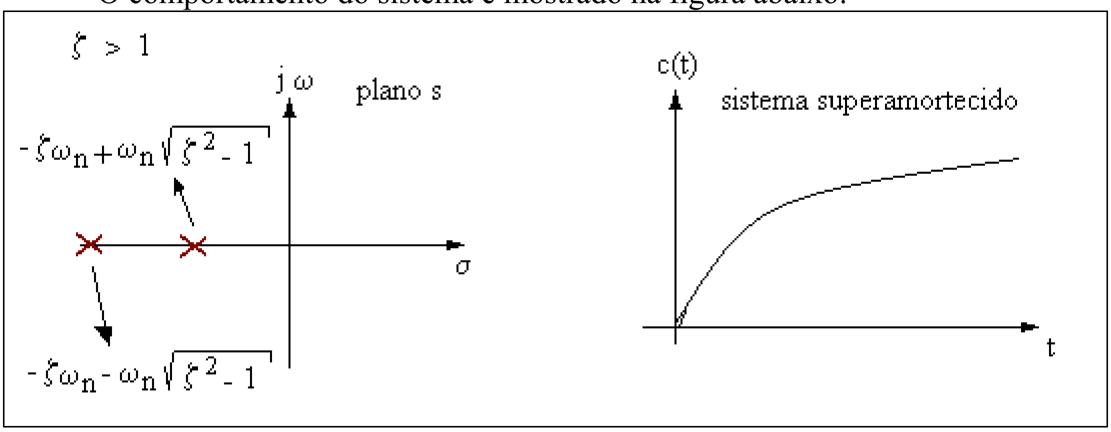
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)})}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, a resposta no tempo é dada por:

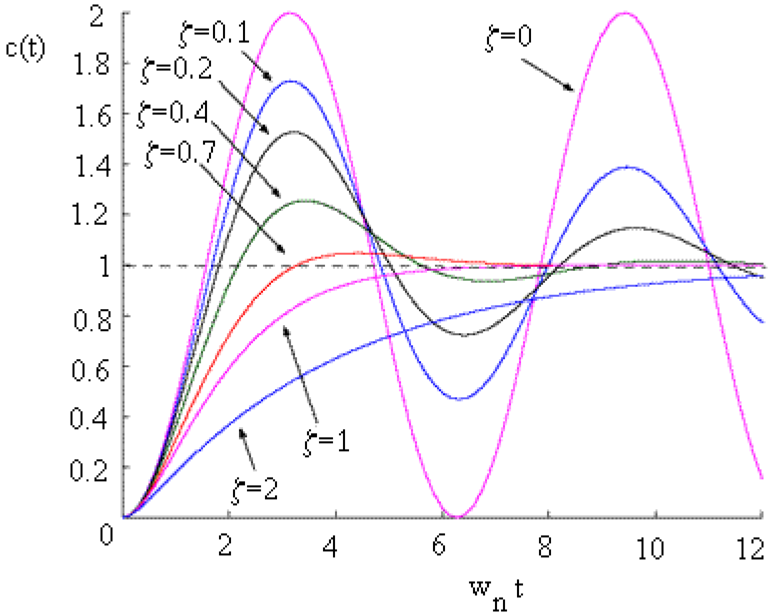
$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}.e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}.e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad OU$$

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}.\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right)$$

O comportamento do sistema é mostrado na figura abaixo:



A figura seguinte mostra as curvas de resposta ao degrau unitário:

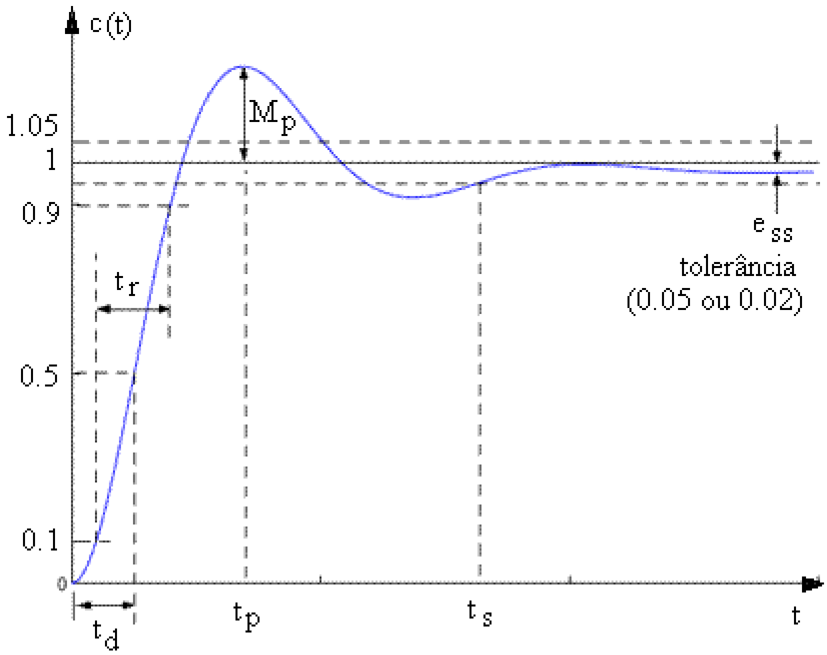


Um sistema subamortecido com ζ entre 0.5 e 0.8 se aproxima mais rapidamente do valor final do que um sistema amortecido ou superamortecido.
Sem oscilação, o sistema criticamente amortecido apresenta uma resposta mais rápida.
O sistema superamortecido possui a resposta mais lenta para qualquer tipo de entrada.

Especificação da resposta transitória

A figura ao lado mostra as características de um sistema de segunda ordem com uma entrada a degrau.

Essas características são importantes para especificar o desempenho do sistema.

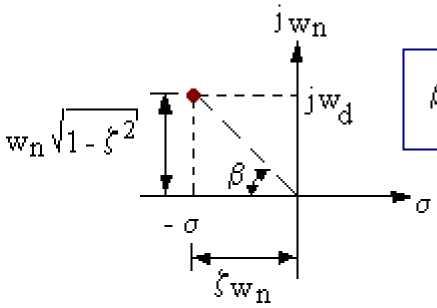


Pela figura temos:

t_d – tempo de atraso (tempo requerido para que a resposta alcance metade de seu valor final).

t_r – tempo de subida (tempo para que a resposta passe de 10% a 90% de seu valor final para sistema supermortecido, ou passe de 5% a 95% ou de 0 a 100% do valor final para sistemas subamortecido).

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{w_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi - \beta}{w_d}$$



$$\boxed{\beta = \mathrm{tg}^{-1}\,\frac{w_d}{\sigma}}$$

t_p – tempo de pico (tempo para atingir o primeiro pico).

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

M_p – Máximo de sobre-sinal (ou somente sobre-sinal) – valor máximo de pico medido a partir da saída em regime permanente. Pode ser calculado por:

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} x100\%$$ ➔ indica estabilidade relativa

se o valor final for unitário:

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

ts – tempo de acomodação (temo necessário para que a curva alcance os valores em uma faixa (2% ou 5%) do seu valor final.

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\omega_n \zeta} = \frac{4}{\sigma} \qquad t_s(5\%) = \frac{3}{\omega_n \zeta} = \frac{3}{\sigma}$$

Número de oscilações: o número de oscilações que ocorrem no sistema é a razão entre o tempo de estabilização e o período:

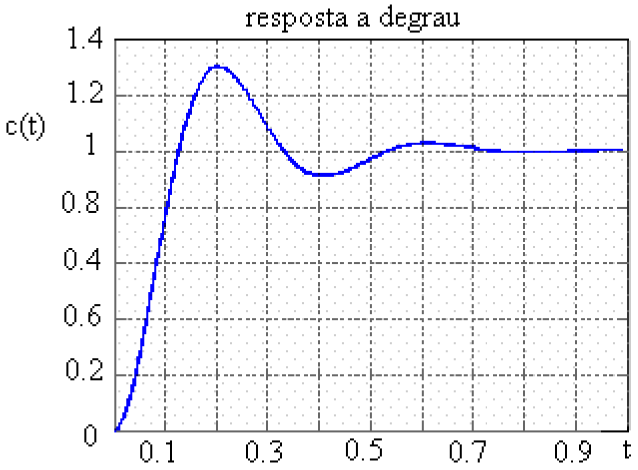
$$n^o oscilações(2\%) = \frac{4/\zeta\omega_n}{2\pi/\omega_d} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} \qquad n^o osci.(5\%) = \frac{3}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}$$

Objetivo: Fazer que um dado sistema chegue o mais rápido possível ao seu valor final alterando as características dadas acima.

Exercício 4: Dada a seguinte função de transferência calcular: tempo de subida (tr), tempo de pico (tp), sobre-sinal (Mp) e tempo de acomodação para o critério de 2% e 5%. Considerar que seja empregada uma entrada degrau unitário e que o sistema seja subamortecido.

$$FT = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

Exercício 5: Dado o gráfico abaixo, obter a função de transferência do sistema:



Resposta a Rampa Unitária
Resposta à Rampa Unitária para um Sistema de Segunda Ordem

A transformada de Laplace para a rampa unitária é $1/s^2$. Inserindo essa entrada em um sistema de segunda ordem, obtém-se:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{\left(s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2\right)}$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2}\frac{\omega_n^2}{\left(s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2\right)}$$

Para:

a) Sistema subamortecido (0<ζ<1)

$$c(t) = t - 2\frac{\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}sen\left[\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2} + \arctan\left(\frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta^2-1}\right)\right]$$

b) Sistema criticamente amortecido (ζ=1)

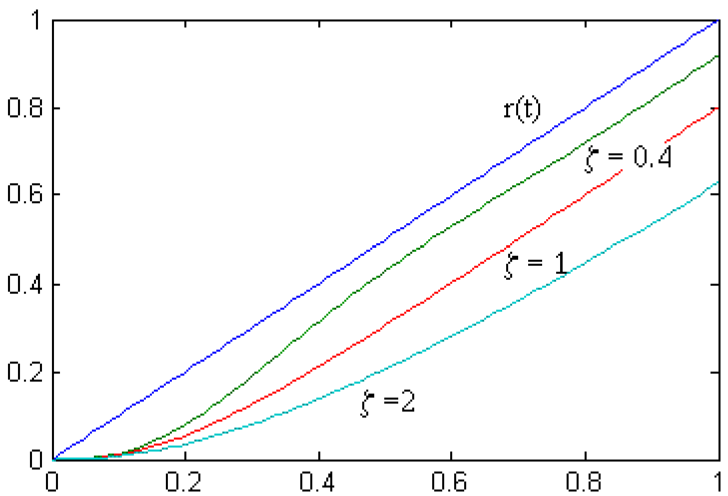
$$c(t) = t - 2\frac{\zeta}{\omega_n} - \frac{2}{\omega_n}e^{-\omega_n t}\left(1 + \frac{\omega_n t}{2}\right)$$

c) Sistema superamortecido (ζ>1)

$$c(t) = t - 2\frac{\zeta}{\omega_n} - \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2-1}}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} + \frac{2\zeta^2 - 1 + 2\zeta\sqrt{\zeta^2-1}}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$

O erro nos três caso é dado por: e(t) = r(t) – c(t)

O erro em regime permanente é dado por: $e_{ss} = 2\frac{\zeta}{\omega_n}$



🡐 A figura ao lado mostra o desempenho do sistema para os três casos.

Resposta ao Impulso Unitário

A transformada de Laplace para o impulso unitário é 1. Inserindo essa entrada em um sistema de segunda ordem, obtém-se:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{\left(s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2\right)}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{\left(s^2 + 2.\zeta\omega_n.s + \omega_n^2\right)}$$

Para:

a) Sistema subamortecido (0<ζ<1)

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} sen\left(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

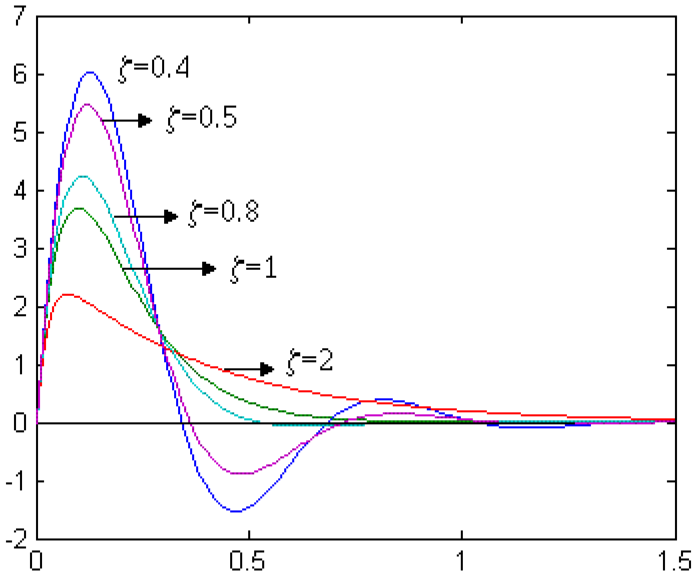
b) Sistema criticamente amortecido (ζ=1)

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

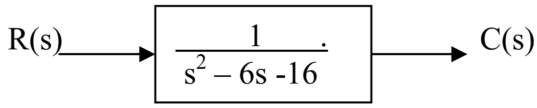
c) Sistema superamortecido (ζ>1)

$$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$

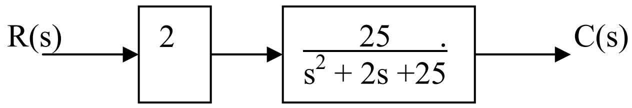
A figura seguinte mostra o desempenho do sistema de segundo grau para uma entrada impulso unitário. Notar que para sistemas superamortecido e criticamente amortecido a resposta é sempre positiva e para o sistema subamortecido a resposta oscila em torno de zero. ➔



Exercício 6: Dado o diagrama de bloco abaixo, qual é o tipo de amortecimento do sistema quando o mesmo é sujeito a uma entrada degrau?



Exercício 7: Qual função de transferência do sistema abaixo e o seu sobre-sinal quando sujeito a uma entrada degrau:



Resp: Mp = 52,6%

Exercício 8: Qual a resposta do sistema para a função de transferência abaixo, quando o mesmo for sujeito a uma entrada impulso unitário.

$$G(s) = \frac{2}{(s+3)(s+4)}$$

Resp: $c(t) = 2(e^{-3t} - e^{-4t})$

Exercício 9: A relação entre o sinal de entrada para um captador de um radiotelescópio e a direção na qual ele aponta é dada pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 8s + 100}$$

Qual o erro em regime permanente quando o sinal de entrada do telescópio for uma rampa, e qual o tempo de estabilização para o critério de 2%.

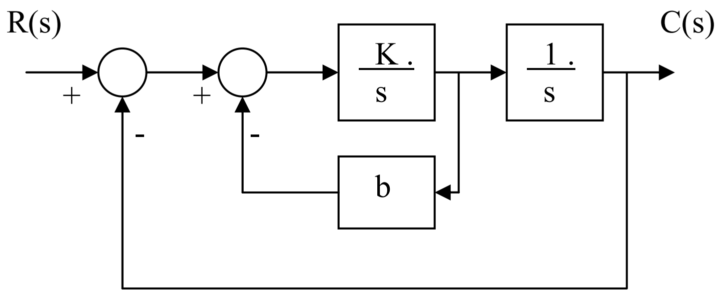
Resp: Erro Estacionário = 0,08s ts = 1s

Exercício 10: Calcule w_n, ζ, ts, tp e Mp da seguinte função:

$$G(s) = \frac{121}{s^2 + 13{,}2s + 121}$$

Resp: $w_n = 11$ $\zeta = 0{,}6$ ts = 0,357s tp = 0,606s Mp = 9,48%

Exercício 11: Dado o diagrama de bloco abaixo, determinar K e b para que o sistema tenha um máximo de sobre-sinal de 25% para uma entrada degrau unitário, e que o tempo de pico seja de 2s.



Resp: K = 2,95 b = 0,471

Exercício 12: Achar a localização dos pólos (raízes do polinômio do denominador) para as seguintes condições:

a) Mp = 12% e ts = 0,6s

Resp: - 6,66 ± j 9,885

b) ts = 7s e tp = 3s

Resp: - 0,57 ± j 1,047

SECÇÃO MATLAB

Com o matlab as representações gráficas das curvas de resposta em função do tempo são dadas pelos seguintes comandos:

step(num, den, t)	→	entrada degrau	→	onde t é a base de tempo
lsim(num, den, r, t)	→	entrada rampa	→	rampa de entrada
impulse(num, den, t)	→	entrada impulso		

Se o comando não for atribuído a alguma variável, o próprio comando já mostra a representação gráfica:

```
num = [0  0  10]
den =  [1  8  10]
t=0:00.1:10;
r = t;                    % reta linear
step(num, den, t);        % já mostra o gráfico da entrada degrau
lsim(num, den, r, t);     % mostra o gráfico da entrada rampa
impulse(num, den, t);  % mostra o gráfico da entrada impulso
```

Se os comandos forem atribuídos a alguma variável deve-se utilizar o comando plot para visualizar os gráficos. Útil quando for plotar várias formas de onda:

plot(t,x) → plota o gráfico de x pela base de tempo t.

```
num = [0  0  10]
den =  [1  8  10]
t=0:00.1:10;
r = t;                         % reta linear
x = step(num, den, t);         % não mostra o gráfico
y = lsim(num, den, r, t);      % não  mostra o gráfico
z = impulse(num, den, t);      % não mostra o gráfico

plot(t,x,t,y,t,z)          % mostra os gráficos
grid                           % coloca grade no gráfico
grid                           % tira a grade do gráfico
title(‘estudos entradas’)      % coloca título no gráfico
xlabel(‘tempo’)                % coloca o rótulo no eixo x
ylabel(‘volts’)                % coloca o rótulo no eixo y
```

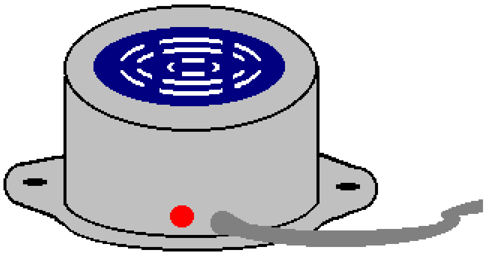
Utilizando o matlab faça um estudo da seguinte função de transferência considerando $\zeta = 0.4$, 1 e 2

$$G = \frac{100}{s^2 + 2.\zeta.10s + 100}$$

Sensor de Proximidade Indutivo SIP- 98 / K-7

Os sensores de proximidade Indutivos SIP-98, são utilizados com vantagens como limites e fim de curso em:

-Máquinas operatrizes correias transportadoras, processos de automatização e indústria em geral.



Vantagens

- Atuação sem contato físico.
- Inexistência de manutenção e ajustes.
- Acionamento de relés ou controle eletrônicos diretamente com carga em série.
- Tempo de vida útil muito longo.
- Tensão de alimentação com ampla faixa em corrente alternada.
- Unidade encapsulada à prova de poeira,óleo,água e vibrações.

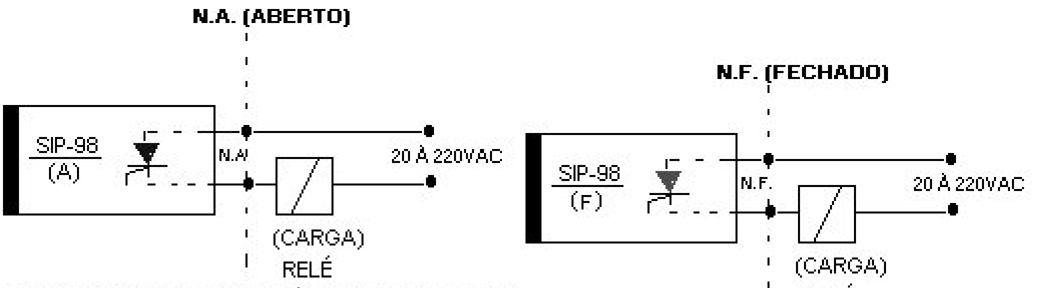
Princípio de Funcionamento

Possui um oscilador de rádio frequência, cuja oscilação é modificada quando algum corpo metálico corta o campo magnético da bobina. Não é necessário o contato do corpo com o sensor. Esta modificação na oscilação é interpretada em um circuito comparador, que irá ativar o gate de um tiristor, tal como uma chave liga/desliga em estado sólido.

Dados Técnicos

-Tensão de operação 20 à 220VAC/60HZ/50HZ.
-Máxima distância sensora: 35mm.
-Contatos de saída: Comutação à tiristor,corrente máxima 700 miliamper
Corrente de consumo: 1,2 miliampér

-Tipo: N.A. ou N.F. (especificar na encomenda)
-Faixa de temperatura: 15 à 70ºC.
-Comprimento do cabo: 2 metros.
-Funções N.A. ou N.F.



N.A. (NORMAL ABERTO) - O RELÉ (CARGA) PERMANECE DESENERGIZADO ENQUANTO O SIP-98 NÃO DETETAR O METAL

N.F. (NORMAL FECHADO) - O RELÉ (CARGA) PERMANECE ENERGIZADO, ENQUANTO O SIP-98 NÃO DETETAR METAL

Dimensões Físicas

DIÂMETRO...54mm
ALTURA...35mm
DISTÂNCIA ENTRE FUROS..68mm
DISTÂNCIA SENSORA..25mm
MATERIAL DO INVÓLUCRO..PLÁSTICO ABS
GRAU DE PROTEÇÃO...IPI-67