Números Complexos

Um número imaginário unitário é definido como:

$$j = \sqrt{-1}$$

logo, $j^2 = -1$

Um número complexo é definido como sendo a soma de um número real com um número imaginário, tal que:

$$c = x + jy \qquad (1)$$

sendo: parte real ➔ $\mathrm{Re}\{c\} = x$
parte imaginária ➔ $\mathrm{Im}\{c\} = y$

Formas Retangular, Exponencial e Polar

A equação (1) é definida como **forma retangular** do número complexo. A **forma exponencial** é expressa como:

$$c = r.e^{j\theta} \qquad (2)$$

onde:

$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ r (ou |c|)➔ magnitude (ou módulo) de c

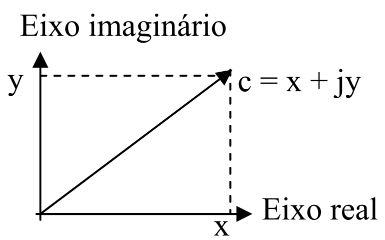
$\theta = \arctan \dfrac{y}{x}$ θ ➔ ângulo de c

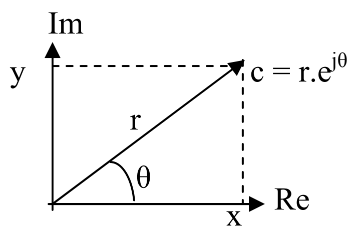
Pode-se converter um número complexo da forma exponencial para forma polar através das equações:

$$x = r.\cos\theta$$
$$y = r.sen\theta$$

A **forma polar** é expressa como:

$$c = |c|\angle\theta = r.\angle\theta \qquad (3)$$





Exemplo 1: Expressar c = 4 + j3 nas formas exponencial e polar.

Calculando o módulo e o ângulo do número:

$$r = \sqrt{(4^2 + 3^2)} = 5$$

$$\theta = tg^{-1}(3/4) = 36{,}9^o$$

Forma exponencial:

$$c = 5.e^{j36{,}9^o}$$

Forma polar:

$$c = 5\angle 36{,}9^o$$

Operações Matemáticas

Conjugado de um número complexo c = x + jy é definido por

$$c^* = x - jy$$

$$c^* = r\angle -\theta$$

<u>Adição ou subtração</u>: Adicionam-se (ou subtraem-se) suas partes reais e suas partes imaginárias. Seja:

C1 = x + jy
C2 = a + jb

C1 + C2 = (x + a) + j(y + b)

C1 = 4 + j3	4 + j3
C2 = 1 – j	1 - j
C1+C2 = 5 + j2	C1-C2 = 3 + j4

<u>Multiplicação</u>:

C1 = x + jy
C2 = a + jb

C1 . C2 = (x + jy).(a + jb) = x.a + x.jb + jy.a + jy.jb
= x.a + j(x.b + y.a) + j^2y.b   como j^2 = -1
= (x.a – y.b) + j(x.b+y.a)

Na forma polar:

C1 = x + jy = $r_1 \underline{/\theta_1}$

C2 = a + jb = $r_2 \underline{/\theta_2}$

C1.C2 = $r_1.r_2 \underline{/\theta_1 + \theta_2}$

$$C1 = 4 + j3 \quad \Rightarrow \quad 5\angle 36{,}9^o$$

$$C2 = 1 - j \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}\angle -45^o$$

$$C1.C2 = (4.1 - (3.-1)) + j(4.(-1) + 3.1) = 7 - j$$

$$C1.C2 = 5\angle 36{,}9^o.\sqrt{2}\angle -45^o = 5.\sqrt{2}\angle -8{,}1^o$$

Divisão:

Na forma retangular é necessário multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado:

C1 = x + jy
C2 = a + jb

$$\frac{C1}{C2} = \frac{x+jy}{a+jb} \cdot \frac{(a-jb)}{(a-jb)} = \frac{x.a+y.b}{a^2+b^2} + j\frac{ya-xb}{a^2+b^2}$$

Na forma polar a divisão é mais simples:

C1 = x + jy $= r_1 \angle \theta_1$

C2 = a + jb $= r_2 \angle \theta_2$

C1/C2 = $r_1/r_2 \angle \theta_1 - \theta_2$

Exemplo: Realize a divisão dos seguintes números complexos na forma polar e na forma retangular

C1 = 3 + j4
C2 = 4 + j3

Forma retangular:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{3.4+4.3}{4^2+3^2} + j\frac{4.4-3.3}{4^2+3^2} = \frac{24}{25} + j\frac{7}{25}$$

Forma Polar:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{5\angle 53{,}13}{5\angle 36{,}87} = 1\angle 16{,}26 = 0{,}96 + j0{,}28$$

1) Converta os números seguintes para a forma polar:

a) 4+j3 b) 2+j2

c) 3,5+j16 d) 100+j800

e) 1000+j400 f) 0,001+j0,0065

g)7,6-j9 h) –8+j4

i) –15-j60 j) 78-j65

2) Converta os números seguintes para a forma retangular:

a) $6\angle 30$ b) $40\angle 80$

c) $7400\angle 70$ d)$4.10\text{-}4\angle 8$

e) $0,04\angle 80$ f) $0,0093\angle 23$

g) $65\angle 150$ h) $1,2\angle 135$

i) $500\angle 200$ j) $6320\angle\text{-}35$

3) Efetue as operações, fornecendo a resposta na forma retangular:

a) (2+j3)(6+j8)

b) (0,002+j0,006)(-2+j2)

c) $(2\angle 60)(4\angle 22)$

d) $(6,9\angle 8)(7,3\angle\text{-}72)$

4) Efetue as operações, fornecendo a resposta na forma polar:

a) $(42\angle 10)/(7\angle 60)$

b) $(0,006\angle 120)/(30\angle\text{-}20)$

c) $(4360\angle\text{-}20)/(40\angle 210)$

d) (8+j8)/(2+j2)

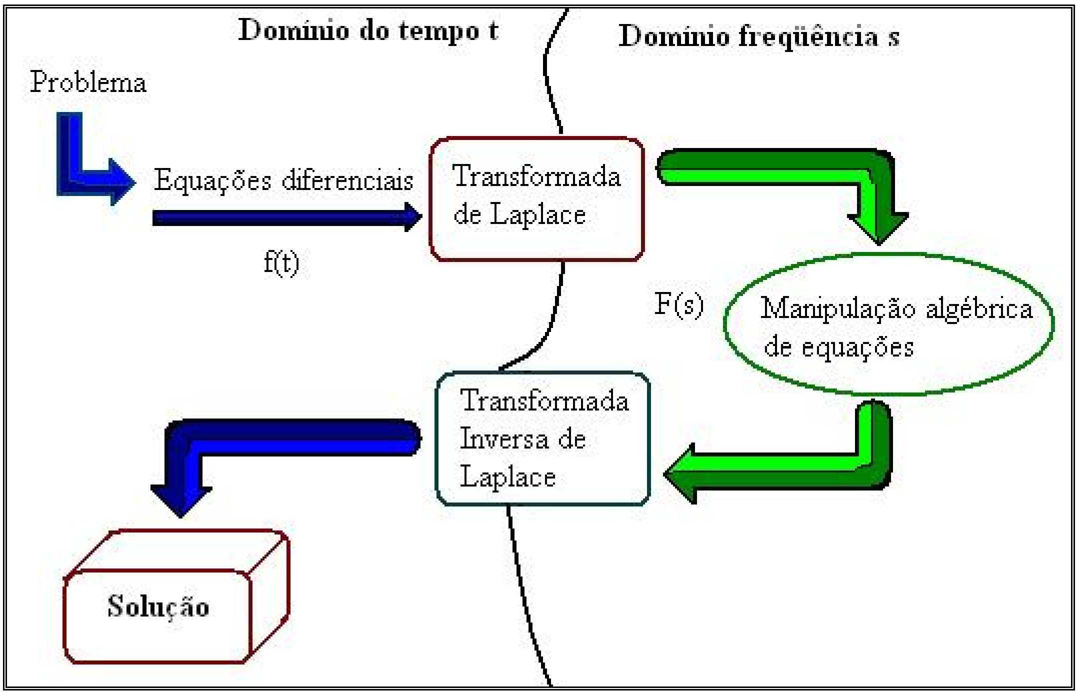
e) (8+j42)/(-6+j60)

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace transforma equações diferenciais em equações algébricas, cujas soluções são mais fáceis de serem encontradas. A transformada é definida como:

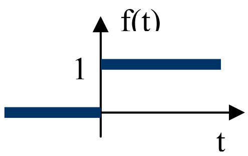
$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t).e^{-st}dt$$

sendo: s = σ + jω, uma variável complexa.



Exemplo 1: Qual a transformada de Laplace para o degrau unitário:

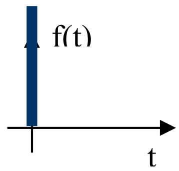
$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & para \quad t < 0 \\ 1 & para \quad t \geq 0 \end{cases}$$

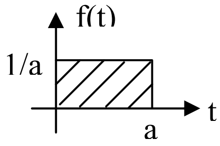


$$L[u_{-1}(t)] = \int_0^\infty u_{-1}(t).e^{-st}dt = \int_0^\infty 1.e^{-st}dt = -\frac{1}{s}.e^{-st}\Big|_0^\infty = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

Exemplo 2: Qual a transformada de Laplace para o impulso unitário:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & para \quad t \neq 0 \\ \infty & para \quad t = 0 \end{cases}$$





$$L[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t).e^{-st} dt = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a}.a = 1$$

Geralmente não é necessário calcular as integrais para determinar a transformação de Laplace, isto porque existem tabelas que fornecem as funções mais comuns. As tabelas combinadas com as propriedades da transformada de Laplace possibilitam a resolução da maior parte dos problemas.

Propriedades:

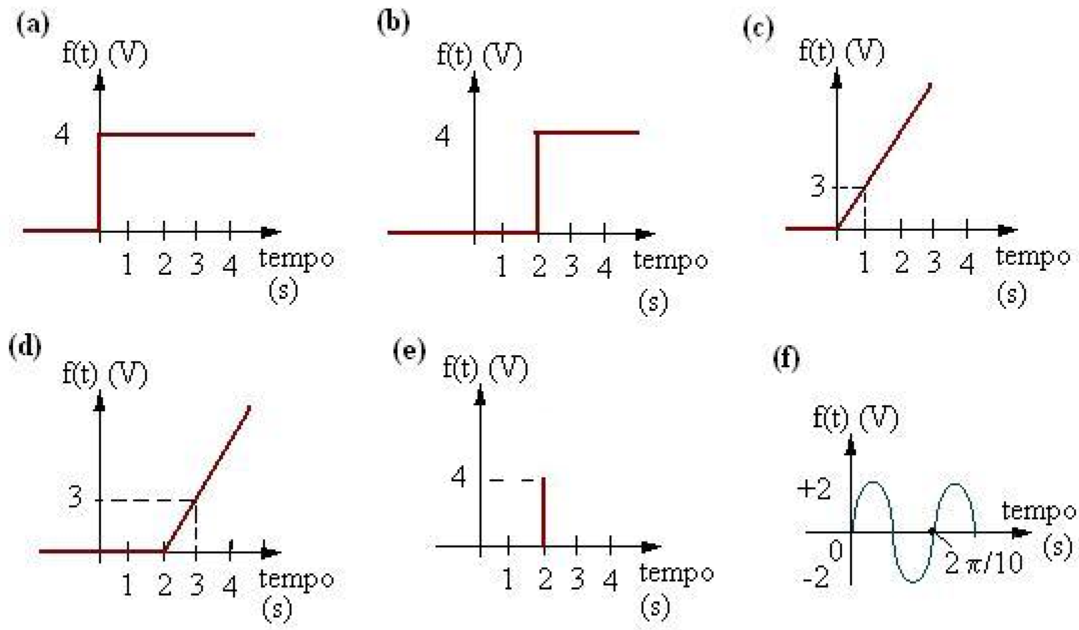
Item	Teorema	Nome
1)	$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt$	Definição
2)	$L[k.f(t)] = k.F(s)$	Teorema da linearidade
3)	$L[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$	Teorema da linearidade
4)	$L[e^{-at}.f(t)] = F(s+a)$	Teorema do deslocamento de freqüência
5)	$L[f(t-T)] = e^{-st}.F(s)$	Teorema do atraso
6)	$L[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Teorema da escala
7)	$L\left[\frac{df}{dt}\right] = s.F(s) - f(0^-)$	Teorema da derivação
8)	$L\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = s^2.F(s) - s.f(0^-) - f(0^-)$	
9)	$L\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n.F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}.f^{k-1}(0^-)$	
10)	$L\left[\int_{0-}^{t} f(t).dt\right] = \frac{F(s)}{s}$	Teorema da integração
11)	$f(\infty) = \lim_{s \to 0} s.F(s)$	Teorema do valor final
12)	$f(0+) = \lim_{s \to \infty} s.F(s)$	Teorema do valor inicial

Tabela de algumas transformadas de Laplace:

Função no tempo	Transformada de Laplace	Descrição
$\delta(t)$	1	Impulso unitário
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	Degrau unitário
$u(t-T)$	$\frac{e^{-st}}{s}$	Degrau unitário com atraso de tempo
$pulso\_duração\_T$	$\frac{1-e^{-st}}{s}$	Pulso retangular de duração T
t	$\frac{1}{s^2}$	Rampa unitária
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	Exponencial decrescente
$t.e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	
$t^2.e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$	
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	Exponencial crescente
$t-\frac{(1-e^{-at})}{a}$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	
$1-e^{-at}-a.t.e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	
$(1-a.t).e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)^2}$	

Função no tempo	Transformada de Laplace
$\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$
$1-\dfrac{b}{b-a}e^{-at}+\dfrac{a}{b-a}e^{-bt}$	$\dfrac{ab}{s(s+a)(s+b)}$
$\dfrac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{-bt}}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$sen(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}.sen(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}.\cos(\omega t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$1-\cos(\omega t)$	$\dfrac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
$\dfrac{\omega}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}e^{-\zeta\omega t}.sen\left(\omega.t\sqrt{(1-\zeta^2}\right)$	$\dfrac{\omega^2}{s^2+2.\zeta\omega s+\omega^2}$
$1-\dfrac{\omega}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}e^{-\zeta\omega t}.sen\left(\omega.t\sqrt{(1-\zeta^2}+\phi\right)$	$\dfrac{\omega^2}{s(s^2+2.\zeta\omega s+\omega^2)}$
$com \quad \zeta<1$	$com \quad \zeta=\cos\phi$

Exemplo 3: Utilizando as tabelas determine as transformadas de Laplace para as seguintes funções:



Respostas:

a) É uma função degrau multiplicada por uma constante 4. Através da propriedade 2:

F(s) = L[k.f(t)] = k.L[f(t)] = k.F(s)
F(s) = L[4.u(t)] = 4.L[u(t)] = 4.1/s ➔ F(s) = 4/s

b) É uma função degrau multiplicada pela constante 4 e atrasada de 2s. Aqui será utilizada as propriedades 2 e 5:

F(s) = L[k.f(t-T)] = k.L[f(t-T)] = k.e^{-st}.F(s)
F(s) = L[4.f(t-2)] = 4.L[f(t-2)] = 4.e^{-2s}.1/s ➔ $F(s) = \frac{4}{s}.e^{-2s}$

c) É uma função rampa. A equação da rampa é da forma:
f(t) = a.t

onde a constante a é a inclinação da reta, no caso 3 V/s (Δy/Δx).

F(s) = L[f(t)] = L[a.t] = a.L[t] = 3.L[t] = 3.1/s^2 ➔ F(s) = 3/s^2

d) É uma função rampa anterior atrasada em 2s:

f(t) = 3.(t-2)

F(s) = L[f(t)] = L[3.(t-2)] = 3.L[(t-2)] = 3.e^{-2s}.1/s^2 ➔ $F(s) = \frac{3.e^{-2s}}{s^2}$

e) É um impulso atrasado de 2s e limitado em 4 V.

$$F(s) = L[k\delta(t-T)] = k.L[\delta(t-2)] = 4.e^{-2s}.F(s) \Rightarrow F(s) = 4.e^{-2s}$$

f) É uma função senoidal com amplitude de 2 V.

$$f(t) = 2.sen(\omega t)$$

$$F(s) = L[k.f(t)] = L[2.sen(\omega t)] = 2.L[sen(\omega t)] = 2.\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Através do gráfico pode-se calcular ω. Pelo gráfico o período da onde é:

$$T = 2\pi/10$$

A freqüência é: $f = 1/T \rightarrow f = 10/2\pi$

A freqüência angular é dada por: $\omega = 2.\pi.f = 2.\pi\frac{10}{2\pi} = 10$

Substituindo o valor de ω na equação, tem-se:

$$F(s) = 2.\frac{10}{s^2+10^2} = \frac{20}{s^2+100}$$

OBS.: Estas seis funções apresentadas representam as formas mais comuns de sinais de entrada para os sistemas.

Exercício 5) Determinar as transformadas de Laplace das seguintes funções:

a) t^2

b) t^2e^{-at}

c) $t^2(1+e^{-at})$

Exercício 6) Determinar a transformada inversa de Laplace de:

a) $\dfrac{2}{s}$

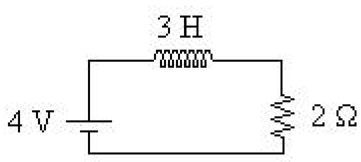
b) $\dfrac{3}{2s+1}$

c) $\dfrac{2}{s-5}$

Transformadas de Laplace utilizadas para resolver equações diferenciais

1) Transformar cada termo na equação diferencial em suas transformadas de Laplace.
2) Realizar os estudos, isto é, aplicar um determinado sinal de entrada (impulso, degrau, rampa...)
3) Fazer a transformada inversa de Laplace para obter a resposta em uma função do tempo. Para realizar a transformada inversa de Laplace geralmente é necessário decompor a equação em frações parciais.

Exemplo 4: Achar a transformada de Laplace para a variação de corrente do seguinte sistema, com i(0) = 0:



Equação do circuito:

$$V = V_L + V_R$$

$$4 = 3\frac{di(t)}{dt} + 2.i(t)$$

A tensão de 4 V pode ser considerado como uma função degrau com amplitude de 4 V:

L[4.u(t)] = 4.L[u(t)] = 4/s

$$L\left[3.\frac{di(t)}{dt}\right] = 3.L\left[\frac{di(t)}{dt}\right] = 3[sI(s) - i(0)] = 3.sI(s)$$

L[2.i(t)] = 2.L[i(t)] = 2.I(s)

Portanto a equação diferencial se torna:

$$\frac{4}{s} = 3.sI(s) + 2.I(s)$$

$$4 = 3.s^2 I(s) + 2.sI(s)$$

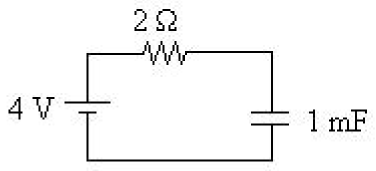
Isolando a variável I e manipulando a equação para achar uma função na tabela

$$I(s) = \frac{4}{3.s^2 + 2.s} = \frac{4}{s(3s+2)} = \frac{4/3}{s(s+2/3)} = \frac{2.(2/3)}{s(s+2/3)}$$

Usando as tabelas e aplicando a transformada inversa de Laplace, tem-se:

$$i(t) = 2.(1 - e^{-2t/3})$$

Exercício 7: Resolva para o circuito abaixo a equação diferencial para a diferença de tensão no capacitor (vc), considere que vc=0 em t =0.



1- Escreva a equação diferencial (lei das malhas)
2 – A corrente é a mesma em todo o circuito, levante a equação de corrente no capacitor e substitua aonde for necessário.

Exercício 8: Resolva a seguinte equação diferencial:

a) $2\frac{dx}{dt} + 5x = 6 \qquad com \qquad x = 0 \qquad em \qquad t = 0$

Transformada Inversa de Laplace

A transformada inversa de Laplace converte a equação do plano complexo (domínio s) para o domínio do tempo, é definia pela equação:

$$L^{-1}[F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s).e^{st}ds$$

Frações Parciais

Usado para obter a transformada inversa de Laplace de uma função complicada. O objetivo é converter a função complicada em soma de termos mais simples. Considerando a função:

$$F_1(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Se N(s) < D(s) ➔ possível a expansão em frações parciais
Se N(s) > D(s) ➔ deve-se realizar a divisão de N(s)/D(s), até se obter N(s) < D(s).

Exemplo:

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5}$$

Dividindo N(s) por D(s), obtém-se:

$$F(s) = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5}$$

Agora é só calcular a transformada inversa de cada termo:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[s] + L^{-1}[1] + L^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + s + 5}\right]$$

$$f(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t) + L^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + s + 5}\right]$$

O último termo da expressão acima deve ser expandido em frações parciais.

OBS.: As raízes de N(s) são chamadas de zero da função F(s)
As raízes de D(s) são chamadas de pólo da função F(s)

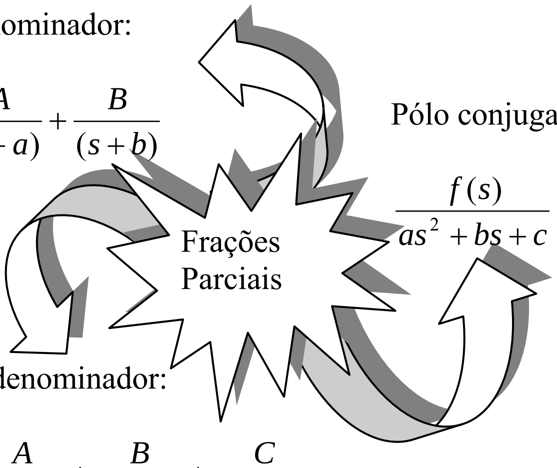
3 Tipos básicos de frações parciais:

Pólo Simples no denominador:

$$\frac{f(s)}{(s+a).(s+b)} = \frac{A}{(s+a)} + \frac{B}{(s+b)}$$

Pólo conjugado:

$$\frac{f(s)}{as^2+bs+c} = \frac{As+B}{as^2+bs+c}$$



Pólo Múltiplos no denominador:

$$\frac{f(s)}{(s+a).(s+b)^2} = \frac{A}{(s+a)} + \frac{B}{(s+b)} + \frac{C}{(s+b)^2}$$

Exemplos: Achar a transformada inversa de Laplace das seguintes funções de transferência:

<u>Pólo Real e Simples</u>:

a)

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+2s}$$

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+2s}\right] = L^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s+2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}\right]$$

é necessário calcular o valor de A e B:

$$A = s.\left.\frac{(s+1)}{s(s+2)}\right|_{s=0} = \left.\frac{s+1}{s+2}\right|_{s=0} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

$$B = (s+2).\left.\frac{(s+1)}{s(s+2)}\right|_{s=-2} = \left.\frac{s+1}{s}\right|_{s=-2} = \frac{-2+1}{-2} = \frac{1}{2}$$

substituindo na equação de f(t):

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1/2}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{1/2}{s+2}\right] = \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.e^{-2t}$$

b) Seja um sistema com o seguinte modelamento, sendo excitado por uma função degrau com amplitude de 32:

$$\frac{d^2v}{dt^2}+12\frac{dv}{dt}+32v=32.u(t)$$

Obter a solução para v(t).

Passando para Laplace:

$$s^2.V(s)+12.s.V(s)+32.V(s)=\frac{32}{s}$$

Isolando V(s), e calculando as raízes da equação de 2º grau:

$$V(s)=\frac{32}{s(s^2+12.s+32)}=\frac{32}{s(s+4).(s+8)}$$

achando a inversa:

$$V(s)=\frac{32}{s(s+4).(s+8)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+4}+\frac{C}{s+8}$$

$$A=s.\frac{32}{s(s+4)(s+8)}\bigg|_{s=0}=\frac{32}{4.8}=1$$
$$B=(s+4).\frac{32}{s(s+4)(s+8)}\bigg|_{s=-4}=\frac{32}{-4.(-4+8)}=-2$$
$$C=(s+8).\frac{32}{s(s+4)(s+8)}\bigg|_{s=-8}=\frac{32}{-8.(-8+4)}=1$$

$$V(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+4}+\frac{1}{s+8}$$
$$v(t)=1-2e^{-4t}+e^{-8t}$$

Pólos Reais e Múltiplos:

c)

3 pólos múltiplos

$$F(s)=\frac{1}{(s+2)^3(s+3)}=\frac{A_3}{(s+2)^3}+\frac{A_2}{(s+2)^2}+\frac{A_1}{(s+2)^1}+\frac{B}{(s+3)}$$

$$A_3=(s+2)^3.\frac{1}{(s+2)^3(s+3)}\Bigg|_{s=-2}=\frac{1}{(-2+3)}=1$$

$$A_2=\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}.\left[(s+2)^3\frac{1}{(s+2)^3(s+3)}\right]\Bigg|_{s=-2}=\frac{d}{ds}.\left[\frac{1}{(s+3)}\right]\Bigg|_{s=-2}=\frac{-1}{(s+3)^2}\Bigg|_{s=-2}=-1$$

$$A_1=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}.\left[(s+2)^3\frac{1}{(s+2)^3(s+3)}\right]\Bigg|_{s=-2}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}.\left[\frac{1}{(s+3)}\right]\Bigg|_{s=-2}=$$

Fatorial da ordem da derivada

$$A_1=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}.\left[\frac{-1}{(s+3)^2}\right]\Bigg|_{s=-2}=\frac{1}{2}\frac{-2}{(s+3)^3}\Bigg|_{s=-2}=1$$

$$B=(s+3).\frac{1}{(s+2)^3(s+3)}\Bigg|_{s=-3}=\frac{1}{(-3+2)^3}=-1$$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{(s+2)^3}-\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{1}{(s+2)^1}-\frac{1}{(s+3)}$$

$$f(t)=\frac{t^2.e^{-2t}}{2}-t.e^{-2t}+e^{-2t}-e^{-3t}$$

Pólos Complexos:

d)

$$F(s)=\frac{2s+12}{s^2+2s+5}=\frac{Bs+C}{s^2+2s+5}$$

as raízes do denominador são complexas (-1+j2) e (-1-j2).

Pode-se achar as constantes B e C através do método Heaviside para pólo simples ou procurar na tabela alguma transformada parecida. Da tabela temos as seguintes transformadas parecidas:

$$e^{-at}.sen(wt)\quad\Rightarrow\quad\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$$

$$e^{-at}.\cos(wt)\quad\Rightarrow\quad\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$$

Manipulando a expressão de F(s) para obter os termos da tabela:

$$F(s)=\frac{2s+12}{s^2+2s+5}=2.\frac{s+6}{(s+1)^2+2^2}=2.\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+\frac{10}{(s+1)^2+2^2}=$$

$$F(s)=2.\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+5\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

Aplicando a transformada inversa:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = 2.L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right] + 5.L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right] =$$

$$f(t) = 2.e^{-t}.\cos(2.t) + 5.e^{-t}.sen(2.t)$$

Usando o teorema do valor inicial e o teorema do valor final

Esses teoremas são úteis quando for necessário determinar o comportamento da função f(t) no instante 0 e no infinito.

Exemplo: Calcular o valor inicial e final das funções:

a)

$$F(s) = \frac{s+a}{s^2}$$ multiplicando a função por s:

$$s.F(s) = s\frac{s+a}{s^2} = \frac{s+a}{s}$$

Teorema do valor inicial: $f(0+) = \lim\limits_{s\to\infty} s.F(s) = \lim\limits_{s\to\infty} s\frac{s+a}{s^2} = \lim\limits_{s\to\infty}\frac{s+a}{s} = \lim\limits_{s\to\infty}\left[1+\frac{a}{s}\right] = 1$

Teorema do valor final: $f(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} s.F(s) = \lim\limits_{s\to 0} s\frac{s+a}{s^2} = \lim\limits_{s\to 0}\frac{s+a}{s} = \lim\limits_{s\to 0}\left[1+\frac{a}{s}\right] = \infty$

b)

$$Vc(s) = \frac{V(1/RC)}{s[s+(1/RC)]}$$ multiplicando a função por s:

Teorema do valor inicial: $f(0+) = \lim\limits_{s\to\infty} s.F(s) = \lim\limits_{s\to\infty} s\frac{V(1/RC)}{s[s+(1/RC)]} = \lim\limits_{s\to\infty}\frac{V(1/RC)}{[s+(1/RC)]} = 0$

Teorema do valor final: $f(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} s.F(s) = \lim\limits_{s\to 0} s\frac{V(1/RC)}{s[s+(1/RC)]} = \lim\limits_{s\to 0}\frac{V(1/RC)}{[s+(1/RC)]} = V$

Exercício 9: Determine as transformadas de Laplace das seguintes tensões que variam com o tempo de acordo com as equações:

a) $v = 5(1 - e^{-t/50})$

b) $v = 10 + 5(1 - e^{-t/50})$

c) $v = 5.e^{-t/50}$

Exercício 10: Ache a transformada inversa de Laplace de:

a)
$$\frac{4s-5}{s^2-s-2}$$

b)
$$\frac{1}{s^2+3s+2}$$

Exercício 11: Quais são os valores iniciais e finais das seguintes transformadas?

a)

$$\frac{5}{s}$$

b) $\dfrac{5}{s(s+2)}$

Exercício 12: Resolva as seguintes equações diferenciais de segunda ordem. Note as condições iniciais:

a)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+64x=0 \qquad com \qquad \frac{dx}{dt}=0 \qquad e \qquad x=2 \qquad quando \qquad t=0$$

b)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+64x=0 \qquad com \qquad \frac{dx}{dt}=2 \qquad e \qquad x=0 \qquad quando \qquad t=0$$

MATLAB

O comando *residue* do Matlab determina os resíduos(r), os pólos (p) e o termo direto (k) da expansão em frações parciais. Considerando:

$$\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{num}{den}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\ldots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_n}=\frac{r(1)}{s-p(1)}+\frac{r(2)}{s-p(2)}+\ldots+\frac{r(n)}{s-p(n)}+k(s)$$

Decompondo a seguinte função em frações parciais:

$$\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{2s^3+5s^2+3s+6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

Nessa função: num = $2s^3 + 5s^2 + 3s + 6$
den = $s^3 + 6s^2 + 11s + 6$

No Matlab:

```
num = [2 5 3 6]     ;     → vetor com os coeficientes do num
den = [1 6 11 6]    ;     → vetor com os coeficientes do den

[r,p,k] = residue(num, den)
```

O matlab irá retornar os seguintes valores:

```
r =            p =            k =
  -6.0000        -3.0000          2
  -4.0000        -2.0000
   3.0000        -1.0000
```

Assim a expansão em frações parciais fica:

$$\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{2s^3+5s^2+3s+6}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{-6}{s+3}-\frac{4}{s+2}+\frac{3}{s+1}+2$$

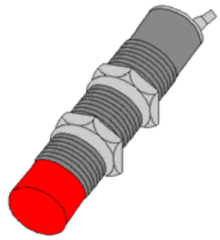
O comando residue também é utilizado para realizar o caminho inverso, experimente:

```
[num, den] = residue(r, p, k);

printsys(num, den,'s')
```

Obs.: o numerador e o denominador devem ter o mesmo grau, se não tiver o vetor deve ser preenchido com zero nos graus mais elevados.

INFORMAÇÃO: Sensor de Proximidade Capacitivo



Aplicação SCP-19

Podem ser usados para detecção de qualquer tipo de material, tais como: papel, madeira, plásticos, farinha, metais e etc.

Vantagens

Atuação sem contato físico; acionamento de relés ou controle eletrônicos diretamente com carga em série; possibilidade de ajuste externo de sensibilidade; unidade a prova de pó, óleo e vibrações; saída a dois fios, com LED indicador de atuação; ampla faixa de alimentação.

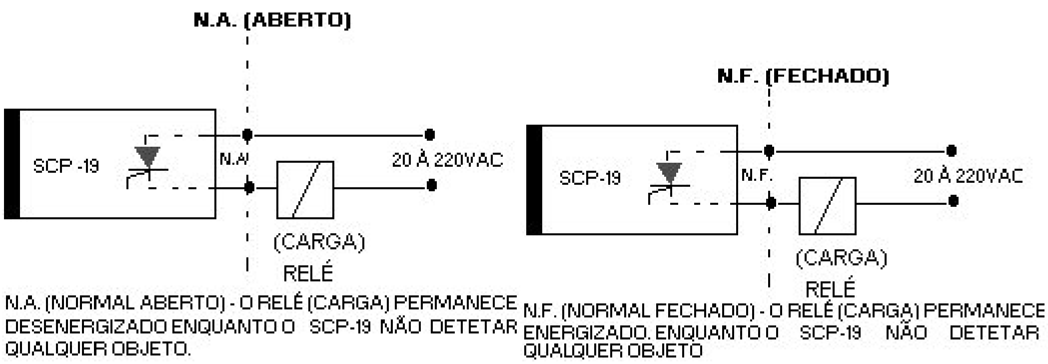
Princípio de Funcionamento

Utiliza como princípio de funcionamento a variação do dielétrico. Pois um oscilador alimenta um capacitor formado por duas placas em sua extremidade, que é a parte sensível do aparelho. Quando algum material ingressa nesta região, provoca uma variação da capacitância alterando oscilador que é detectada pelo circuito de acionamento do Sensor Capacitivo, atuando sua carga em série.

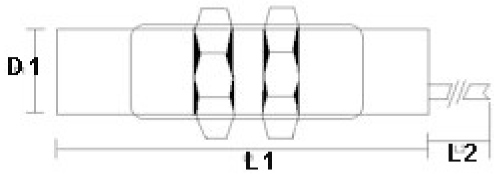
Dados Técnicos

Tensão de operação 20 a 220VAC/60/Hz/50Hz
Contatos de saída à Tiristor,Imax - 450mA
Tipo N.A. ou N.F. (Especificar na encomenda)
Máxima distância Sensora: 40mm
Corrente de consumo: 5,5mA
Faixa de Temperatura: - 15 à 70ºC
Comprimento do cabo: 2 metros

Funções N.A ou N.F.



Dimensões Físicas



MODELO M-40

D1	L1	L2	sens.
40	130	2000	35

MODELO M-30

D1	L1	L2	sens.
30	110	2000	25

MODELO M-18

D1	L1	L2	sens.
18	90	2000	10