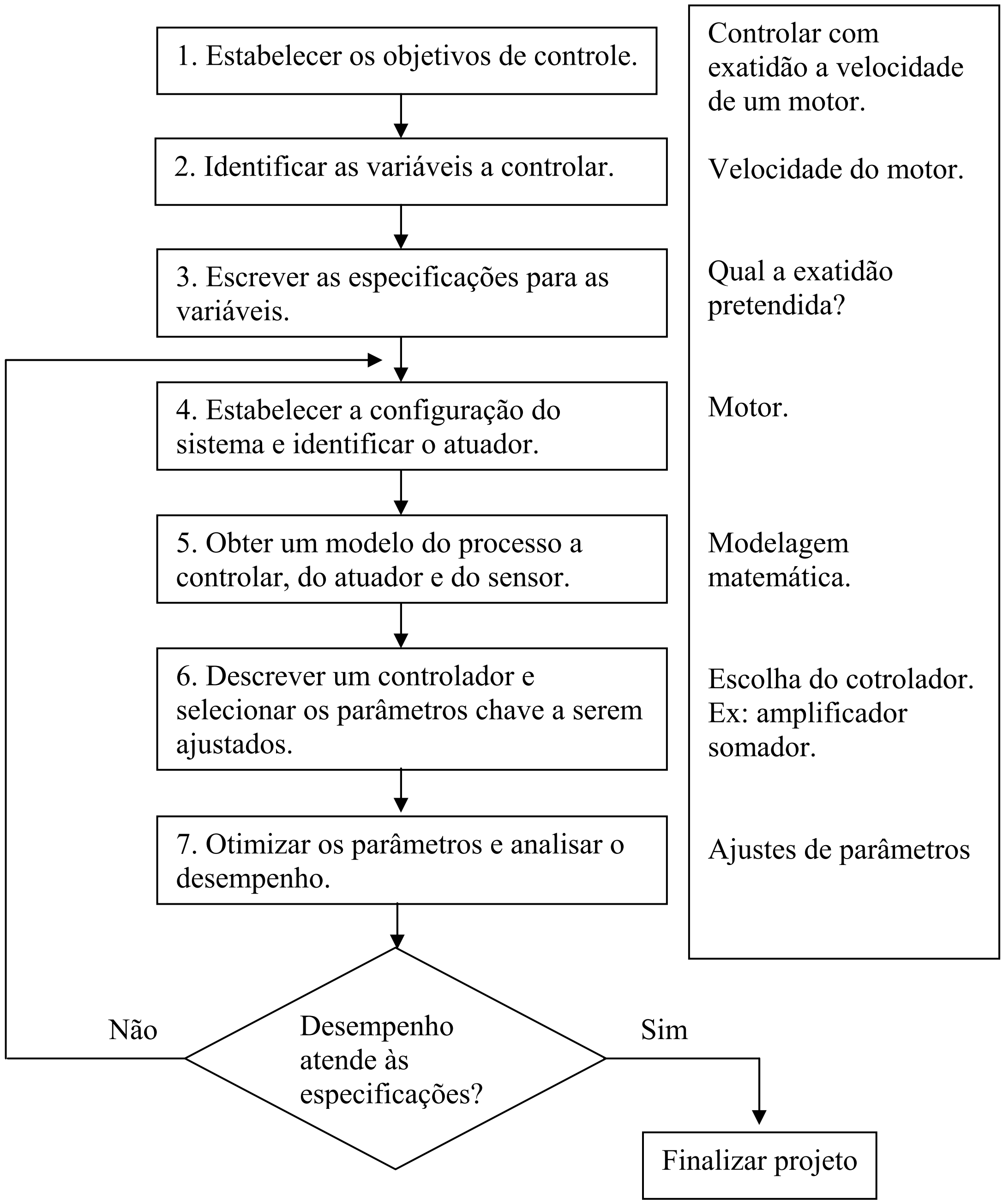
Projeto de Sistema de Controle



A modelagem matemática dos sistemas é um dos requisitos necessários para o projeto de sistemas de controle (item 5 do fluxograma). Os sistemas são constituídos de elementos. Assim um sistema elétrico possui resistores, capacitores, indutores, amplificadores operacionais e outros elementos.

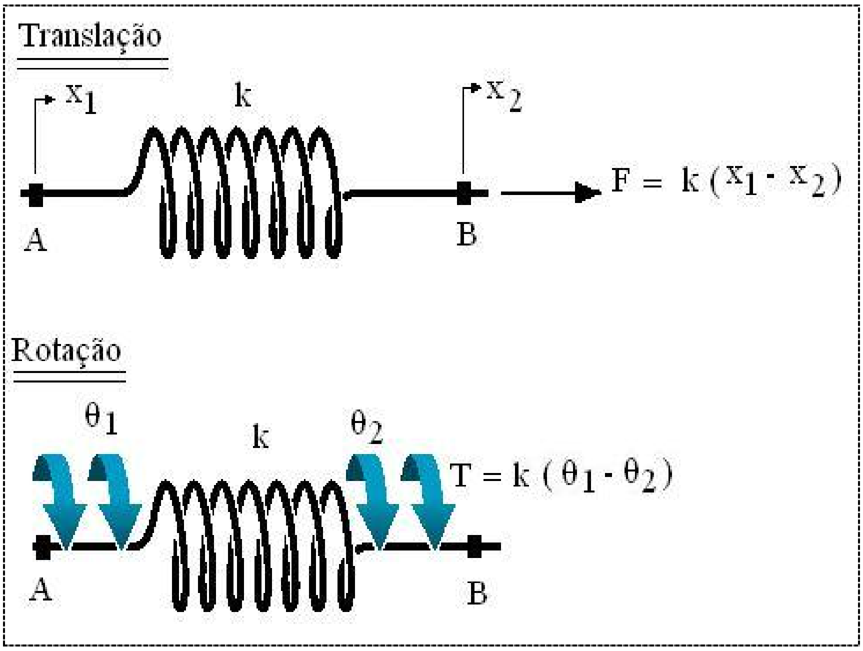
Modelagem de Sistemas Mecânicos

Elementos Mecânicos:

Mola
Amortecedor
Massa

Mola:

- Elemento que possui flexibilidade elástica.
- A mola se opõe à força que a ela está aplicada.
- Armazena energia potencial elástica.
- Deformação é diretamente proporcional à força aplicada.



onde:

x1 e x2 – deslocamento linear das extremidades A e B.
θ1 e θ2 – deslocamento angular das extremidades A e B.

A energia armazenada na mola quando a mesma é tracionada é:

$$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$$

A energia armazenada numa mola torcional é:

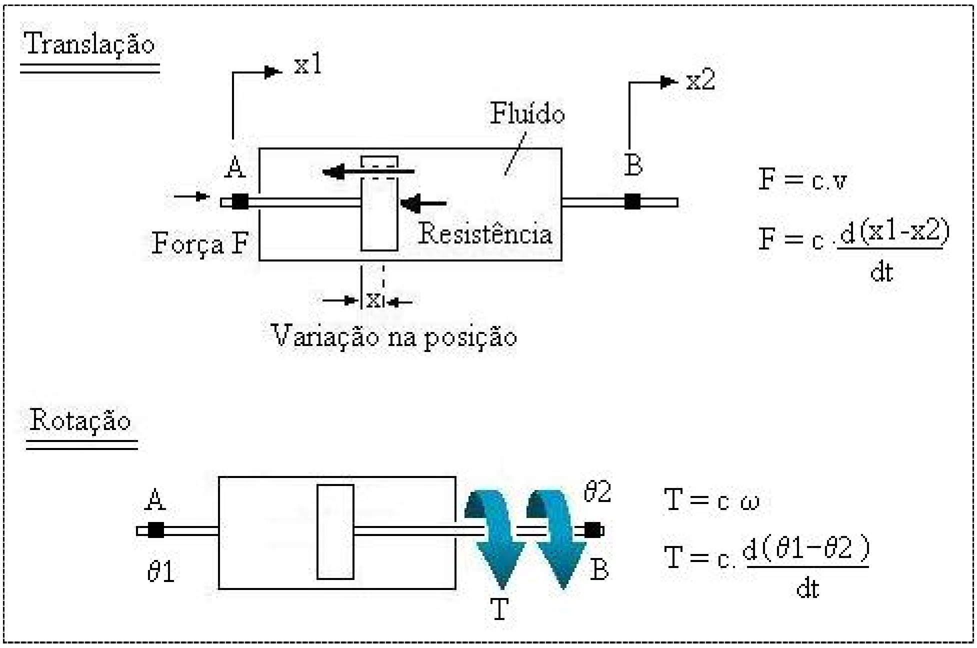
$$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k}$$

Amortecedor:

- Elemento que dissipa energia mecânica
- Amortecimento é o processo pelo qual a energia é retirada do sistema elástico
- A força resistiva é proporcional à velocidade v do pistão.

Tipos:

- **Amortecimento viscoso**: atrito viscoso entre sólido e fluído



c = coeficiente de atrito viscoso

- **Amortecimento seco**: atrito entre dois sólidos:

$$F_d = \mu \cdot N$$

μ = coeficiente de atrito dinâmico
N = força normal entre as superfícies

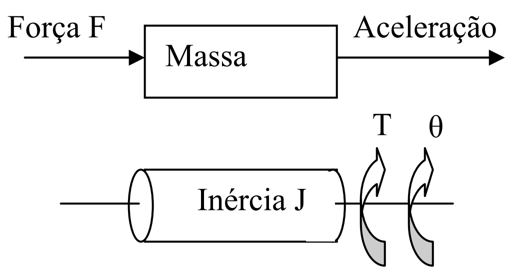
O amortecedor dissipa mais energia do que armazena, a potência P dissipada depende da velocidade v (ou da velocidade angular ω) e é dada por:

Amortecimento translacional; $P = c.v^2$

Amortecimento rotacional: $P = c.w^2$

<u>Massa (m) e Momento de Inércia (J)</u>

- ❑ Elemento considerado como um corpo rígido
- ❑ Quanto maior a massa, maior a força requerida para dar uma aceleração específica.



$$F = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$T = J.\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

A massa e o momento de inércia também armazenam energia. Energia armazenada,

na Massa: $E = \frac{1}{2}.m.v^2$

no Momento de Inércia: $E = \frac{1}{2}.J.\omega^2$

Análise de um Sistema Mecânico

Os sistemas mecânicos são construídos combinando massas, molas e amortecedores. Seus modelos matemáticos são desenvolvidos aplicando-se as leis de Newton ao sistema.

<u>Leis de Newton</u>

1ª. Lei: Na ausência de forças externas a quantidade de movimento de um corpo permanece constante (quantidade de movimento = massa multiplicada pela velocidade ou m.v).

2ª. Lei: A resultante das forças atuantes sobre um corpo rígido em uma determinada direção produz uma aceleração que é diretamente proporcional à essa resultante e inversamente proporcional à massa do corpo nessa mesma direção.

$$aceleração = \frac{\sum Forças}{massa}$$

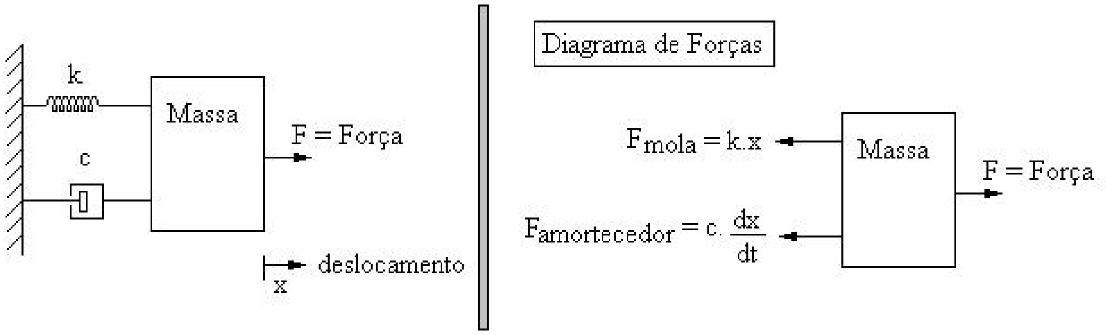
$$ou \qquad \sum F = m.a \qquad [N]$$

3ª. Lei: O torque resultante das forças atuantes sobre um corpo rígido em uma rotação pura em relação à um eixo produz uma aceleração angular diretamente proporcional à esse torque e inversamente proporcional ao momento de inércia desse corpo em relação ao eixo de rotação.

$$aceleração\_angular = \frac{\sum Torque}{momento\_de\_inécia}$$

$$ou \qquad \sum T = J.\alpha \qquad [N.m]$$

Exemplo 1) Qual o modelo matemático para o sistema abaixo:



Utilizando a 2ª.Lei de Newton:

$$\sum F = m.a$$

$$F - kx - c\frac{dx}{dt} = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$ou\_rearranjando\_os\_termos:$$

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F \qquad (1)$$

Esta é a equação diferencial que descreve a relação entre a entrada de força F e o deslocamento de saída x. Na ausência de amortecimento, a massa m oscilará com uma freqüência natural w_n dada por:

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2)$$

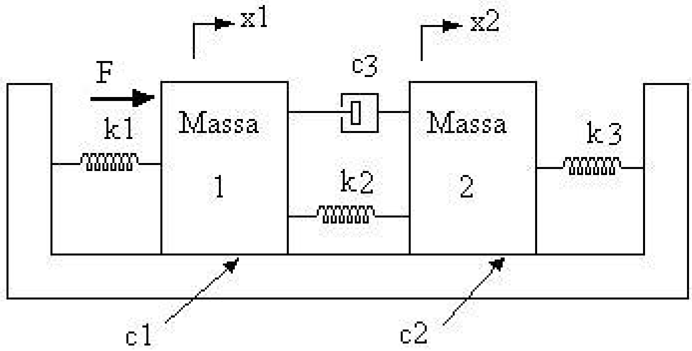
A razão do amortecimento é dada por;

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \qquad (3)$$

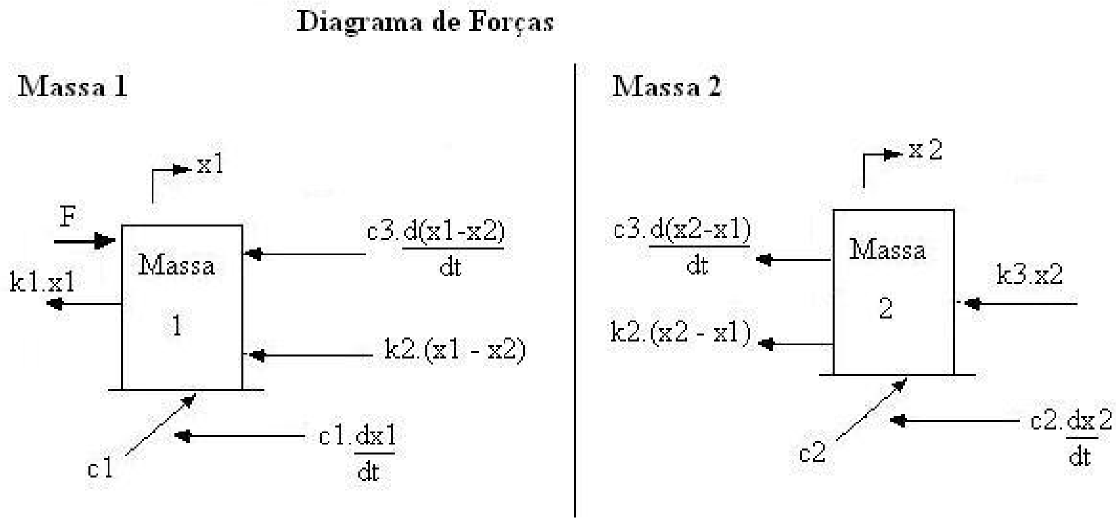
Substituindo (3) e (2) em (1):

$$\frac{1}{w_n^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{w_n}\zeta\frac{dx}{dt} + x = \frac{F}{k}$$

Exemplo 2) Qual o modelo matemático para o sistema abaixo:



Para analisar este exemplo, deve-se estudar as forças que atuam em cada massa isoladamente:



Massa 1:

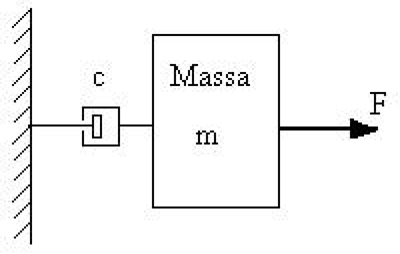
$$F - c3\frac{d(x1-x2)}{dt} - c1\frac{dx1}{dt} - k2(x1-x2) - k1x1 = m1\frac{d^2x1}{dt^2}$$

Massa 2:

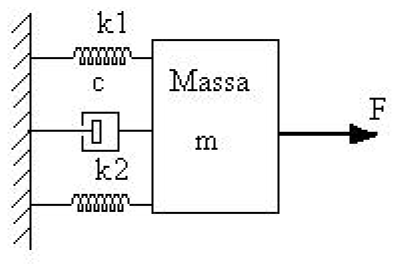
$$-c3\frac{d(x2-x1)}{dt} - c2\frac{dx2}{dt} - k3x2 - k2(x2-x1) = m2.\frac{d^2x2}{dt^2}$$

Exercício 1) Determine a equação matemática para os sistemas abaixo:

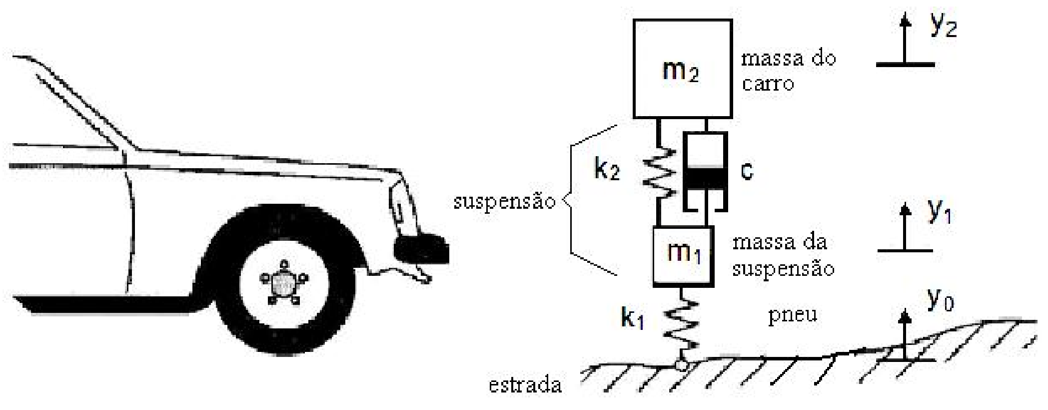
a)



b)



Exercício 2) A figura seguinte mostra um modelo mecânico para suspensão de um automóvel. Forneça o modelo matemático do sistema:



Considere y0 = 0.

Modelagem de Sistemas Elétricos

Elementos Elétricos:

- Resistor
- Capacitor
- Indutor

Resistor:

- Elemento que dissipa energia.

Capacitor:

- Elemento que armazena energia.

Indutor:

- Elemento que armazena energia.

A figura abaixo mostra as equações desses elementos em função tensão (a) e da corrente (b), bem como a energia armazenada ou dissipada:

		Equação		
	Símbolo	Tensão (a)	Corrente (b)	Energia armazenada (E) ou Potência dissapada (P)
Resistor	R, A, B	$v_A - v_B = R.i$	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{v^2}{R}$
Capacitor	C, A, B	$v_A - v_B = \frac{1}{C}\int i.dt$	$i = C\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}C.v^2$
Indutor	A, L, B	$v_A - v_B = L.\frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L}\int v.dt$	$E = \frac{1}{2}L.i^2$

Análise de um Sistema Elétrico

Os sistemas elétricos são construídos combinando resistores, capacitores e indutores. Seus modelos matemáticos são desenvolvidos aplicando-se as leis de Kirchoff ao sistema.

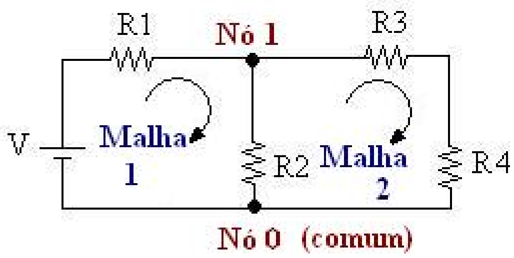
Leis de Kirchoff

1ª. Lei: A soma algébrica das correntes que entram em um nó é igual a soma algébrica das correntes que saem do mesmo nó. (Lei das Correntes - LKC). ➔ Análise Nodal.

2ª. Lei: A soma algébrica das tensões ao longo de qualquer percurso fechado (laço ou malha) é igual a zero. (Lei das Tensões – LKT) ➔ Análise de Malha.

OBS.: As fontes de alimentação possuem sua próprias polaridades. Nos resistores, capacitores e indutores, o lado positivo é o terminal por onde a corrente entra.

Exemplo 1: Gere as equações do circuito abaixo utilizando.

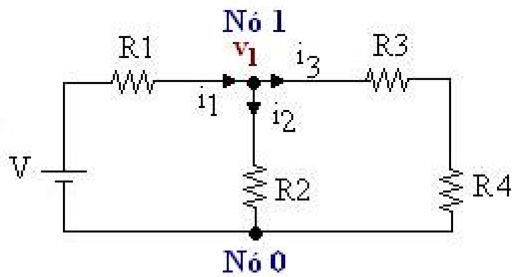


No diagrama ao lado, o circuito possui 2 malhas (malha 1 e malha 2) e 2 nós (nó 0 e nó 1). Em geral quando o número de nó de um circuito é menor do que o número de malhas, é mais fácil empregar análise nodal.

A figura seguinte mostra a corrente i_1 que entra no nó 1 e as correntes i_2 e i_3 que saem dele.

Ligado ao nó 1 existe uma tensão denominada de v_1, assim pela 1ª Lei:

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad (4)$$



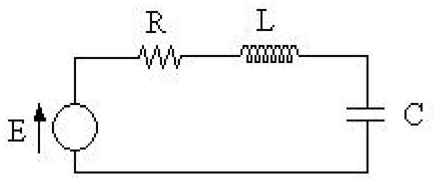
As tensões nos resistores são:

$$\begin{aligned} &em \quad R1: \quad v - v_1 = R1.i_1 \\ &em \quad R2: \quad v_1 = R2.i_2 \\ &em \quad R3: \quad v_1 = (R3 + R4).i_3 \end{aligned} \qquad (5)$$

Isolando as correntes nessas 3 equações e substituindo em (4), temos:

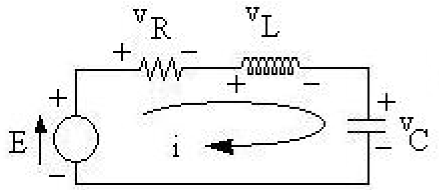
$$\frac{v - v_1}{R1} = \frac{v_1}{R2} + \frac{v_1}{(R3 + R4)}$$

Exemplo 2: Determine a relação entre a saída no capacitor e a entrada da fonte E:



O circuito ao lado possui apenas uma malha. Para fazer a análise de malha é conveniente supor a existência de correntes percorrendo a malha.

As fontes de alimentação possuem suas próprias polarizações, nos demais elementos a corrente entra pelo lado positivo e sai pelo lado negativo, conforme figura ao lado:



Pela 2ª Lei (Lei das Malhas):

$$E = v_R + v_L + v_C \tag{6}$$

Substituindo as equações das tensões:

$$E = R.i + L.\frac{di}{dt} + v_C \tag{7}$$

Na equação (7) há a tensão de entrada E, a tensão de saída v_C e existe uma incógnita, a corrente i. A mesma pode ser substituída pela relação:

$$i = C.\frac{dv_C}{dt} \tag{8}$$

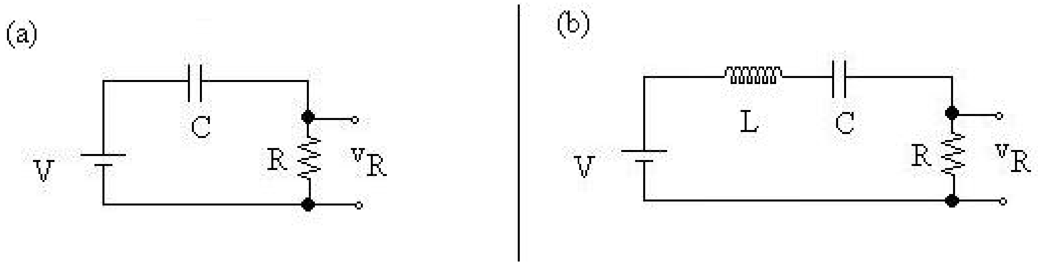
Substituindo (8) em (7):

$$E = R.C.\frac{dv_C}{dt} + L.\frac{d(C.\frac{dv_C}{dt})}{dt} + v_C$$
$$E = R.C.\frac{dv_C}{dt} + L.C.\frac{d(\frac{dv_C}{dt})}{dt} + v_C \tag{9}$$

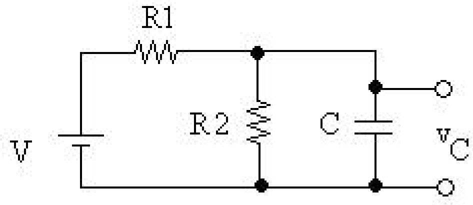
Assim, a relação entre a entrada E e a saída v_C é:

$$E = R.C.\frac{dv_C}{dt} + L.C.\frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C \tag{10}$$

Exercício 3: Determine a relação entre a saída no resistor R e a entrada v para os circuitos abaixo:



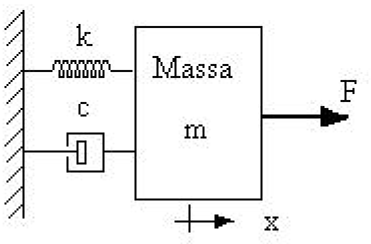
Exercício 4: Determine a relação entre a saída de tensão no capacitor e a entrada de tensão v do circuito abaixo:

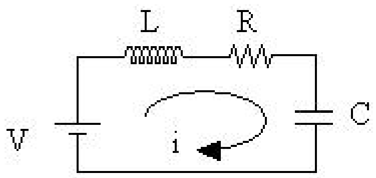


Circuitos Análogos

Os sistemas mecânicos podem ser representados por circuitos elétricos equivalentes. Esses circuitos podem ser análogo série, quando se utiliza a equação de malha ou análogo paralelo, quando se utiliza a equação de nó.

Análogo Série: Considere os seguintes circuitos:





A equação para o sistema mecânico é:

$$F = kx + c.\frac{dx}{dt} + M.\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (11)$$

Para o sistema elétrico é:

$$V = L.\frac{di}{dt} + R.i + \frac{1}{C}\int i.dt \qquad (12)$$

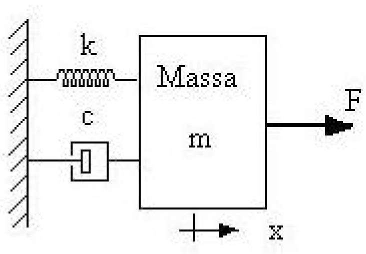
derivando a equação (12):

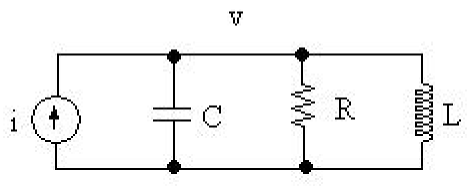
$$V = L.\frac{d^2i}{dt^2} + R.\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}.i \qquad (13)$$

Comparando (13) com (11), temos as seguintes analogias:

Massa = M	➔	indutor = M henries
Amortecedor = c	➔	resistor = c Ohms
Mola = k	➔	capacitor = 1/k farads
Força = F	➔	tensão = F

Análogo Paralelo: Considere os seguintes circuitos:





A equação para o sistema mecânico é:

$$F = kx + c.\frac{dx}{dt} + M.\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (14)$$

Para o sistema elétrico é:

$$I = C.\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v.dt \qquad (15)$$

derivando a equação (12):

$$I = C.\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}.\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}.v \qquad (16)$$

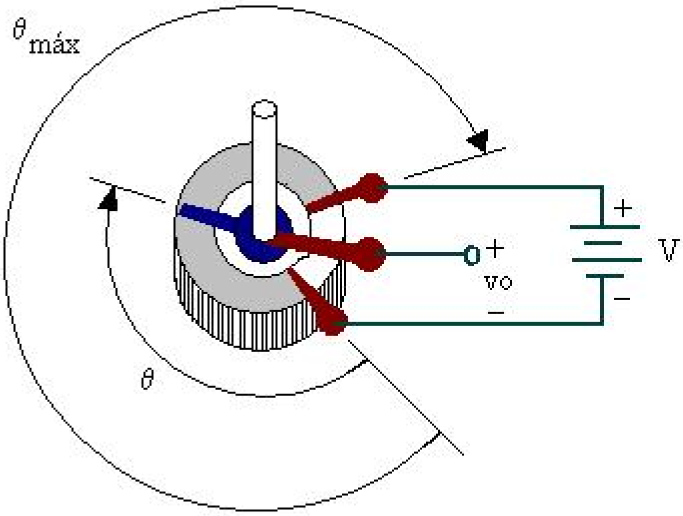
Comparando (16) com (14), temos as seguintes analogias:

Massa = M ➔ capacitor = M farads
Amortecedor = c ➔ resistor = 1/c Ohms
Mola = k ➔ indutor = 1/L henries
Força = F ➔ fonte de corrente = F

Sistemas Eletromecânicos

São sistemas que possuem elementos elétricos e mecânicos como potenciômetros, motores e geradores.

Potenciômetro:



A entrada de um potenciômetro é a posição (ou rotação) do knob (mecânico) e sua saída é a diferença de potencial vo (elétrico).

Para a figura ao lado:

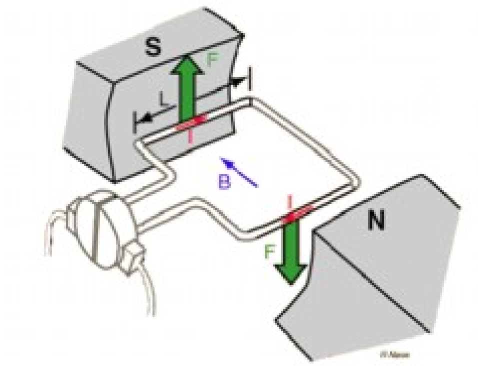
$$\frac{vo}{V} = \frac{\theta}{\theta m\acute{a}x} \quad \text{ou}$$

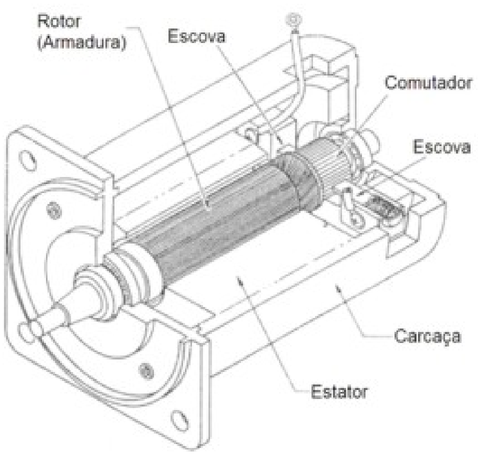
$$\frac{vo}{\theta} = \frac{V}{\theta m\acute{a}x}$$

Motor de Corrente Contínua:

O motor elétrico é usado para converter um sinal de entrada elétrico em um sinal de saída mecânico (rotação).

A figura ao lado mostra um motor com uma bobina (ou enrolamento de armadura) que gira quando imersa em um campo magnético. O campo magnético (B) é gerado por uma corrente no enrolamento de campo.





Quando um condutor (bobina) de comprimento ***L***, circulando uma corrente elétrica ***ia***, passa através de um campo magnético ***B*** aparece um força ***F*** sobre o condutor:

$$F = B.ia.L$$

Se houver N espiras (bobinas):

$$F = N.B.ia.L \qquad (17)$$

A força gerada na armadura (F) resulta num torque T:

$$T = F.b \qquad (18)$$

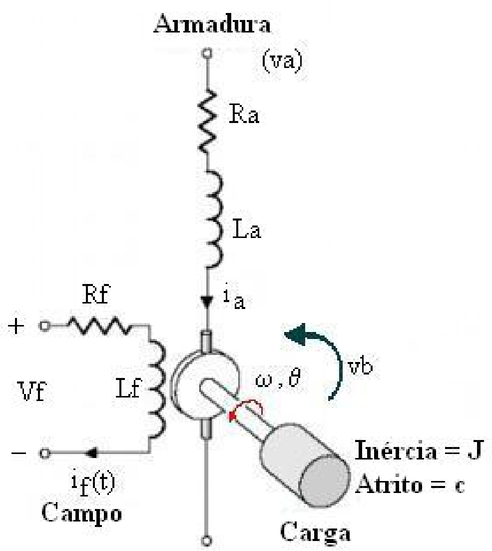
Sendo b, a largura da bobina. Substituindo (17) em (18):

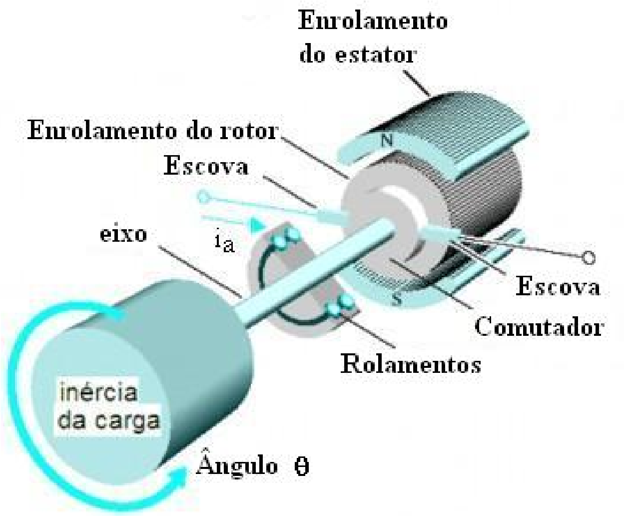
$$T = N.B.ia.L.b$$

Como N, L e b são constantes, pode-se escrever:

$$T = k_1.B.ia \qquad (19)$$

O circuito de um motor CC é mostrado abaixo:





O diagrama acima mostra que o motor é composto de dois circuitos: circuito de campo e circuito de armadura. Esses circuitos são ligados através do fluxo magnético e da tensão induzida.

Os motores CC podem ser controlados através do campo ou pela armadura.

<u>Motor controlado pelo campo</u>:

Neste modelo a corrente de armadura é mantida constante e o motor é controlado variando a tensão de campo. Para o circuito do campo, tem-se:

$$vf = Rf.if + Lf.\frac{dif}{dt} \qquad (20)$$

A corrente if gera um campo magnético (e um torque) no circuito de armadura através da equação (19). Como a densidade de fluxo B é proporcional à corrente de campo if e como ia é constante, então:

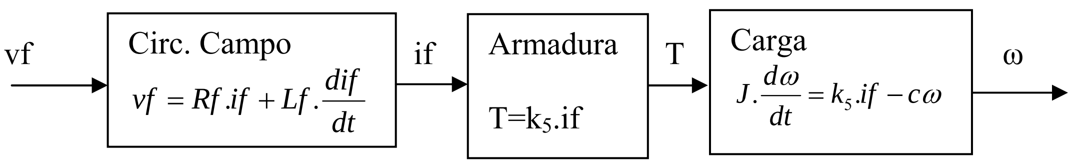
$$T = k_1.B.ia = k_1.k.if.ia$$
$$T = k_5.if$$

Este torque é convertido pela carga em velocidade angular (ω). O somatório das forças sobre a carga será:

$$\sum torques = T - torque\_de\_amortecimento$$
$$J.\frac{d\omega}{dt} = k_5.if - c\omega \qquad (21)$$

As equações (20) e (21) descrevem o comportamento do motor controlado pelo campo.

Diagrama de blocos:



<u>Motor controlado pela armadura</u>:

Neste modelo a corrente de campo if é mantida constante e o motor é controlado ajustando-se a tensão de armadura va. Como a corrente de campo if é constante o fluxo magnético B gerado também será constante. Para o circuito de armadura, tem-se:

$$va - vb = La.\frac{dia}{dt} + Ra.ia \qquad (22)$$

A corrente ia na armadura gera o torque T, como B é constante a equação (19) fica:

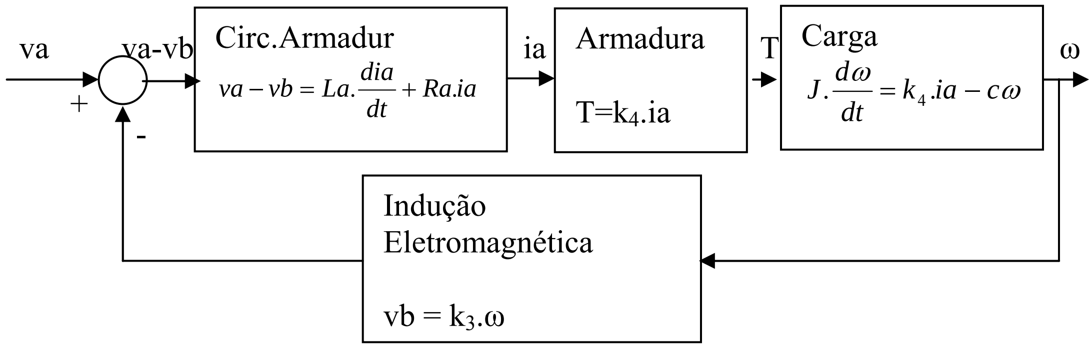
$T = k_1.B.ia = k_4.ia$

Este torque é convertido pela carga em velocidade angular (ω). O somatório das forças sobre a carga será:

$$\sum torques = T - torque\_de\_amortecimento$$
$$J.\frac{d\omega}{dt} = k_4.if - c\omega \qquad (23)$$

As equações (22) e (23) descrevem o comportamento do motor controlado pelo campo.

Diagrama de blocos:



Informação: Sensor Termistor

Termistores são controladores de modo térmico resistores sensíveis cuja função principal é exibir uma mudança grande, previsível e precisa em resistência elétrica quando um equipamento ou produto sofrer uma mudança na temperatura de corpo. Coeficiente de Temperatura negativo (**NTC**) (Negative Temperature Coefficient) exibem uma diminuição em resistência elétrica quando submetido a um aumento em temperatura do equipamento e Coeficiente de Temperatura Positivo **(PTC**) (Positive Temperature Coefficient) exibem um aumento em resistência elétrica quando acontece a um aumento da temperatura do equipamento que está contido o termistor. Os termistores são capazes de operar em temperatura abaixo de -100 ° a mais de +600 ° Fahrenheit. Por causa das características muito previsíveis deles e a excelente termo estabilidade longa deles, os termistores são os mais recomendados para medida de temperatura e controle de qualquer equipamento.

A característica mais importante de um termistor é, sem dúvida, seu coeficiente de temperatura extremamente de resistência alta. Tecnologia de um termistor moderno resulta na produção de dispositivos com resistência extremamente preciso contra características de temperatura, lhes fazendo o sensor mais vantajoso para uma variedade larga de aplicações.

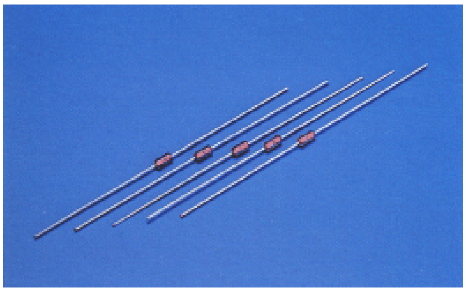
O processo de fabricação dos NTCs é semelhante ao de fabricação das cerâmicas. Depois de uma mistura intensiva e do acréscimo de um agregante plástico, a massa é moldada na forma desejada por extrusão para obter tarugos ou por pressão para obter discos e aquecida a uma temperatura suficientemente alta, para sintetizar os óxidos constituintes.

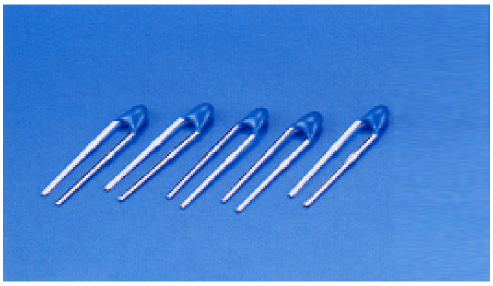
Depois, os contatos são colocados queimando-se os elementos e utilizando-se pasta de prata.Muitos tipos de encapsulamentos são utilizados conforme a figura 2, dependendo da aplicação final do componente.

Os tipos miniaturas, de menor capacidade térmica e maior prontidão são usados na medidas de temperatura (NTCs termoelétricos) , enquanto que os maiores são usados no controle de dispositivos diversos, por exemplo em alarmes e termostatos.

Informação: Sensor Termistor

A empresa brasileira que vem se destacando muito nesse ramo é a **Add-Therm Sensores Especiais de temperatura** (www.add-therm.com.br), que além produzir sensores de ótima qualidade , eles produzem sensores encapsulados especiais de temperatura para diferentes aplicações que você necessita , seja para um projeto novo de um novo equipamento ou a substituição de um sensor de uma aplicação. Possuem uma linha completa de Termistores NTC e PTC com ótima qualidade e baixo custo, otimizando seus custos.





Links sobre Termistores:

www.add-therm.com.br

www.thermistor.com

www.sensormag.com