Pensar Matemática

Para começar

Este pequeno documento foi escrito para educadores/as de jardim de infância e professores/as do 1° ciclo do ensino básico..

Trata-se de algumas reflexões a partir do 1° curso "*Pensar Matemática*" completado por experiências próprias com os meus alunos, influenciadas pelas conversas que mantenho com outros membros do Movimento da Escola Moderna e com a equipa técnica da cooperativa SEIES com que trabalho actualmente.

Os enquadramentos dos conceitos matemáticos trabalhados são feitos em base de leituras, das quais as mais importantes estão referidas na bibliografia, a propósito de situações concretas.

A minha única intenção é que este texto provoque a curiosidade e incite a pegar em material de apoio à investigação matemática com crianças de 4 até 10 anos.
Espero que convide também a discussões em torno da matemática na escola básica.

Pascal Paulus

Novembro 1995

Longe de criarem o desejo de aprender e acrescentar as aptidões do pensamento, as instituições [escolares], excessivas vezes privam os estudantes do prazer de conhecer e injectam, antes de mais, um sentimento de incompetência.
[...] Bastaria uma ponta de paranóia para imaginar que o efeito desmobilizador do ensino público é resultante de uma vontade maquiavélica.

Hubert Reeves,
A Hora do Deslumbramento

Índice

1. Pensando "pensar matemática"

Era uma vez...

Quando eu estava na 6ª classe da escola primária, tinha muitos dificuldades em resolver problemas. Primeiro porque os problemas que eram apresentadas não tinham muito a ver comigo. Lembro-me de juros de capitais que eram vencidos em datas diferentes e para os quais se tinham que aplicar regras compostas. Lá, em casa, falar de capitais a vencer juros não era assunto apropriado para discussão.
Depois, apanhava os problemas dos camponeses que tinham que saber as áreas das suas terras, que num país como os Polderes de Flandres teriam obrigação de ter formas rectangulares, mas, logo por azar, não correspondiam com a paisagem à minha volta.
Não. Os meus camponeses escolares tinham campos hexagonais, triangulares, com acrescentes paralelogrâmicos e outros recantos divertidos para os cavalos e animais de carga, mas concerteza pouco práticos para os donos de tractores que, talvez por isso, abriam falência para recorrer à subsídios (Na Bélgica já havia problemas com o PAC nos anos '60).

Estava eu portanto a descobrir que não ia ser nem gestor de capitais, nem agricultor moderno, quando deparei com outra dificuldade. Enquanto me perdia divertidamente nos problemas dos outros, encontrando até algumas soluções práticas, como propor ao agricultor que mudasse de profissão, ao financiador que distribuísse os dinheiros pelos pobres (corria Maio '68), para logo imaginar quanto dinheiro eu precisava receber desta distribuição para poder ir ao festival de música, mas teimando que os meus pais não eram suficientemente pobres para eu poder aspirar uma doação segundo os meus próprios critérios, os meus colegas mais sérios apresentavam resultados, isto é eles apresentavam *números*!
A regra era: Analisar o problema, condensar o mesmo numa linha em "*forma abreviada*" e apresentar o resultado numérico numa segunda linha. Era como no mundo dos grandes: interessava mostrar obra feita.

Nunca conseguia os resultados que eram esperados ser apresentados. Normalmente propunha o oposto, ou pelo menos, assim me parecia. Como os resultados dos meus esforços intelectuais investidos não condiziam em nada com as aspirações do professor, um dia resolvi utilizar uma estratégia completamente nova. Constituía numa tentativa muito doloroso em alcançar a forma abreviada, sem desvios ou imaginações. Chegado lá, decidi executar uma conta que implicava todos os dados - porque isto já tinha percebido: nos problemas escolares todos os dados eram relevantes, mesmo quando a minha intuição me indicava o oposto.
Iam-me aparecendo os números mais contraditórios às minhas especulações, e, após a entrega da folha, até fiquei com medo que o professor ia pensar que tinha feito de propósito, tão grotescamente errados me pareciam os resultados.
Isto podia ter consequências graves em termos de liberdade pessoal: mais trabalhos de casa.

Três dias depois o professor anunciou: "Deste vez aconteceu algo de estranho com o teste de problemas. Só um aluno obteve o máximo [de 10 pontos]. Todos os outros não passaram de 3 ou 4."
Já estava aliviado. A minha estratégia não ficou visível entre este desaire completo. Fiquei ainda mais contente quando o professor continuou: "Perante estes resultados, considero nulo este teste que vai ser substituído por outro na próxima semana." Quando de repente saiu: "Mas estou curioso para saber como Pascal fez para obter 10, como único?"

Só depois de alguns instantes apercebi-me deste novo problema: para uma vez tive um bom teste, quando estava convencido ter disparatado, enquanto que todos os outros... Além disso, não era capaz de explicar a minha "estratégia". Perdi a confiança do professor, que sempre pensou que tinha tido acesso ao teste, dos colegas que não me perdoaram não ter passado as minhas informações e de mim próprio por não conseguir verbalizar a minha estratégia.

Em contrapartida, aprendi que a escola não é este magnifico edifício aberto a todos nós para nos levar a proezas marcantes, como cantávamos no *Hino da Escola Pública* uma vez por ano, na festa da escola pública laica. Afinal, a escola servia para nos catalogar entre os outros, mas dentro de parâmetros que considerava democráticos: quando, para a maioria, o desvio da norma é demasiado grande, a justiça é reposta: o teste era anulado. Os direitos das minoria ainda não eram reivindicadas. Nem são.

Pensar Matemática é, duma certa forma, consequência deste acontecimento sem importância para o rumo do mundo, os gestores de dinheiros e os agricultores. Proponho reflectir um pouco a partir da integração de três momentos de formação:

- um, com alunos do 4º ano - com um pisco de olhos ao 5º,
- um, com alunos do 1º ano
- um, com professores inscritos num curso com o mesmo título promovido pelo Instituto Irene Lisboa, que serve aqui de enquadramento

Acerca dos objectivos

Considero os objectivos que pretendemos atingir pensados em função dos formandos e das formandas. Quando pensamos na organização do trabalho para reforçar conhecimentos existentes e despertar novas aquisições, é necessário saber o que pretendemos avaliar ao fim dum período previamente estabelecido.

Há sempre a tentação de facilitar a tarefa: basta formular objectivos do nosso próprio ponto de vista de formador(a) / professor(a), para termos uma avaliação satisfatória: avaliamos a nossa própria acção, ou, ainda menos constrangedor, o nosso material/programa utilizado.

Vejamos um exemplo simples: *"Estruturar a numeração até 20"*. Prevemos os conteúdos programáticos para este “objectivo geral”, eventualmente formulando “objectivos” auxiliares.

Imaginemos:

⇒ Construir escadas com material Cuisenaire até 10.

⇒ Decompor os números até 10 em pares de amigos.

⇒ Fazer escadas a partir do dobre dos primeiros 10 números até 20.

⇒ Decompor os números até 20 em triplos.

Depois de passar o tempo que tínhamos previsto para concretizar estes "objectivos", avaliamos e constatamos:

Obj. 1: Num total de 28 alunos, 28 constroem escadas.

Obj. 2: Num total de 28 alunos, 24 decompõem os 10 primeiros números.

Obj. 3: Num total de 28 alunos, 23 montam as escadas.

Obj. 4: Num total de 28 alunos, 19 constroem os triplos.

Parece que temos uma actuação satisfatória: dois terços do grupo "atingiu" logo à primeira os objectivos que nos tínhamos postos. Conclusão: conseguimos alcançar o nosso objectivo geral.
Preocupamo-nos com este resultado: a actuação não resultou para 9 alunos; objectivamente procuramos as razões. Após uma pequena investigação, pode-se imaginar constatações do género:

⇒ alguns alunos chegam com fome na escola;

⇒ alguns não têm apoio em casa para os trabalhos de casa;

⇒ 2 revelam um passado com observação de psicólogo, o que os pais não nos disseram;

⇒ uma criança não ouve muito bem, outra é hiper-activa.

Uf! Diagnóstico feito, a resposta é obvia. Teremos que recorrer ao apoio especializado, já que não estamos preparados para estes "casos".

Entretanto, desinvestimos no material Cuisenaire. Este material é só interessante para crianças que têm um nível cultural adequado, o que infelizmente não é o caso na nossa turma.

A descrição acima, resultado duma criatividade um nadinho maldoso, não prova nada, obviamente.
Mas imaginemos, só um momento, que numa determinada altura, formulamos para o mesmo período de tempo: "*Todos os alunos do 1º ano estruturam os números até 20, utilizando os recursos materiais ao seu alcance*".

Podemos então formular conteúdos programáticos:

Exploração de material Cuisenaire

Exploração do geoplano

Exploração de material não estruturado

Introdução do canto de experiências

Criação de hábitos de registo de descobertas e da vida da sala.

Desde que notamos uma linha de acção que privilegia um determinado material, ou um tipo de investigação, o nosso objectivo poderá ser avaliado parcialmente:

Aluno(s) [nome(s)] estrutura(m) os números até 10 utilizando material não estruturado. Aluno [nome] integra a decomposição de 10 até 20 nos conceitos já adquiridos através do trabalho no canto de experiências. Etc.

Assim já podemos contextualizar o porquê de determinado tipo de material. É claro que pisamos um terreno muito escorregadio. Só será possível continuar a fornecer conteúdos programáticos adequados, se os intervenientes na formação, professor(a) *e* crianças, se envolvem mutuamente na definição de objectivos de aprendizagem. Estão aqui as sementes dum trabalho de educação participativa.

A avaliação está fortemente marcada pela via escolhida. Torna-se parte integrante do processo de crescimento de todas as pessoas envolvidas, nas suas aproximações mútuas dum objectivo que se torna comum e transparente para todas as partes.

Criar planos de acção

Cabe à pessoa adulta neste processo de deslumbramento de desmistificar e:

⇒ anunciar quais são os conteúdos programáticos previstos por lei.

⇒ possibilitar a partilha de poder na construção de objectos e de caminhos para os alcançar.

⇒ criar estruturas para controlar os processos interactivos.

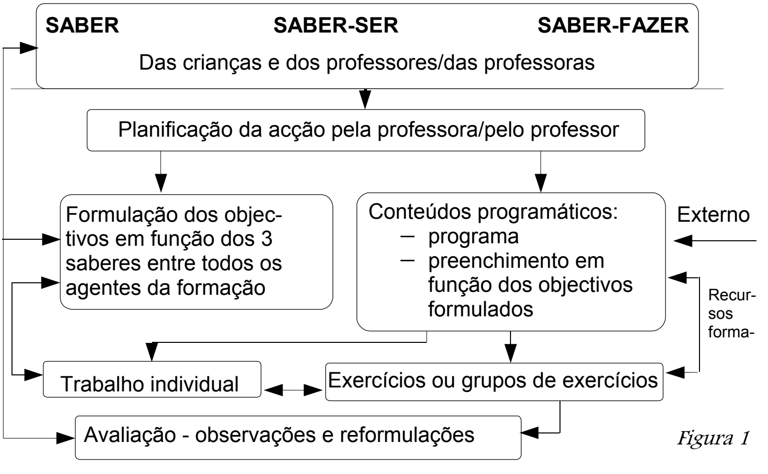


Figura 1

Eis objectivos que são do/da professor(a) para consigo: só este/esta pode desenvolver o trabalho necessário para os alcançar e avaliar para si próprio o desenvolvimento.

A acção que montamos poderá então tomar uma dinâmica actuando sobre os três saberes (Figura. 1)

Para poder potencializar os 3 saberes de cada uma das crianças que formam junto com o professor ou a professora o grupo/universo em que actuam, é preciso activá-las.

A volta da avaliação existem também variadíssimos conceitos.

Não podemos negar que o mais divulgado é este conceito perverso em que a avaliação representa poder, hierarquia, classificação, exclusão. Os alunos sabem-no muito bem, tal como os operários que são controlados pelo relógio de ponto e pelo chefe.

O próprio Ministério de Educação não inventou nada de novo, quando pôs em prática os sistemas de avaliação para a formação de professores. Os esquemas utilizados são tão contabilísticas como os que muitos professores ainda aplicam na sua prática: ordenam, classificam, e reduzem o valor do individuo à sua capacidade de imaginar o que o professor ou o formador pretende dos seus "súbditos". Parece ser um tipo de avaliação ao serviço duma democracia avançada, normalizada, definida por tratado europeu.

A avaliação torna-se uma classificação de pessoas, e não de objectivos atingidos. Logo, ficamos impossibilitados em saber se houve falhas no trabalho desenvolvido, se há raciocínios para rever.

A avaliação é assim confundida com um controlo, um instrumento de medo, de ineficácia, de retrocesso, de incitação à repetição, sustentada pela prepotência da ordem instalada, em vez de ser um apelo constante à criatividade, alteração e progresso.

Este controlo constitui a rejeição do saber da pessoa em formação, criança ou adulta, a negação da formação à partir do vivido dos formandos, a condenação das teses que não correspondem ao saber defendido por grupos corporativos. Abre caminho para a rejeição à descoberta que a terra roda à volta do sol.

Pediu-se às pessoas que participaram no curso "*Pensar Matemática*" colaborar na avaliação a partir das seguintes perguntas:

1) Três aspectos que mais lhe interessaram - Porquê?
2) Três aspectos que menos lhe interessaram - Porque?

utilizando como pistas:

- Que trabalho foi demasiadamente desenvolvido?

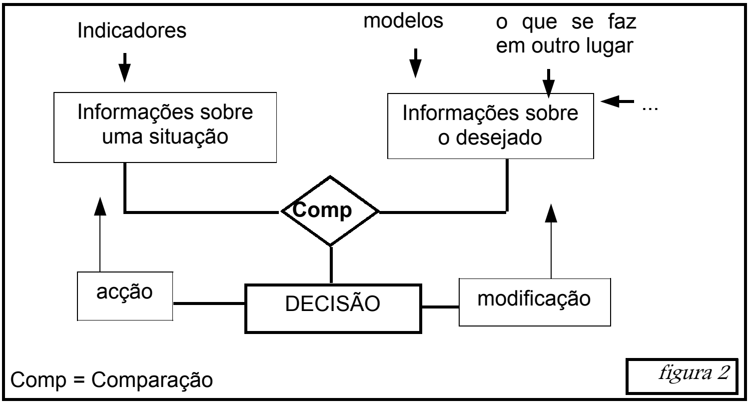


figura 2

- O que acha que foi pouco tratado ou não tratado?
- Coisas que ficaram mesmo bem?
- Coisas pouco realistas no meu contexto.

Da mesma forma, o trabalho sobre a planificação do 1º trimestre do ano escolar serviu de indicador para fazer a comparação na balança de avaliação *(figura. 2)*[1].

Centrado sobre a matemática da escola primária

A introdução ao programa da matemática do 1º ciclo do ensino básico, publicado pela DGEBS em 1991, tem a ideia de avaliação de processos que desencadeiam novos processos bem presente .

Pela sua importância, retomamos o esquema de introdução *(Figura. 3)* e destacamos:

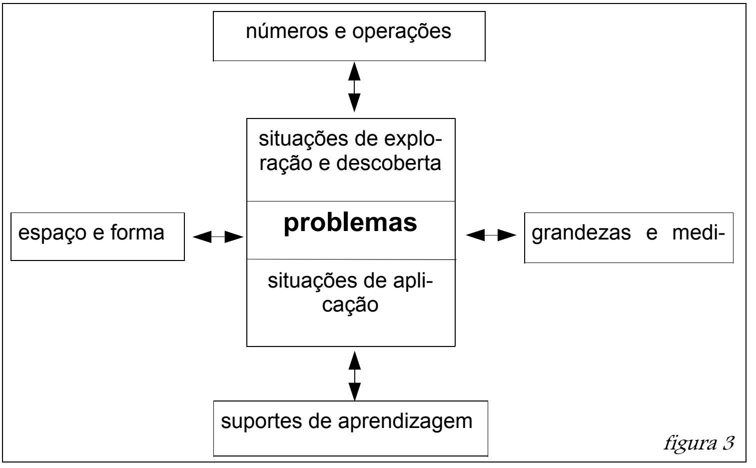


figura 3

- a posição central dos problemas tanto como veículo de exploração e descoberta, como base de aplicação para conceitos adquiridos.
- a utilização de situações problemáticas para solicitar a procura de conceitos matemáticos e a aplicação delas.

Entramos num contexto dinâmico. Os conteúdos programáticos não podem mais serem interpretados como objectivos do formador, avaliados por exercícios aplicados. Sustenta objectivos em função das crianças e uma avaliação do trabalho, permitindo um feedback contínuo entre professor(a) e alunos. Assim todos podem progredir no seu próprio raciocínio lógico e na integração de conceitos.

Destacamos ainda (cursivo do programa):

- "*Estabelecer relações entre os números e ir acedendo gradualmente à estrutura lógica do sistema decimal*", podemos pois, trabalhar bases de numeração, descobrindo padrões na organização dos números.

Outros pontos realçam a experiência e a discussão entre alunos e professor seus pontos de vista para progredir, quando os autores do programa focam a importância dos jogos.

– "*A capacidade de aceitar e seguir uma regra, o desenvolvimento da memória, a agilidade de raciocínio, o gosto pelo desafio, a construção de estratégias pessoais*". Criaremos portanto situações onde aprender tem sentido, já que se trata da estruturação do ambiente em que o grupo se desloca".

O porquê do enquadramento

Todo o discurso no "*Pensar Matemática*" esta centrado sobre o projecto, o trabalho de grupo, a interacção entre membros do grupo, a construção conjunta de quadros de referência e de exploração.

Não é por acaso. Trata-se duma técnica que ficou comprovadamente eficaz quando trabalhar com adultos. Jean-Marie Barbier [(2)] descreve um quadro de P. Beret. Põe em evidência que projectos fortes e estruturados, ligando aspectos sociais a

Família	Projecto	Estudos prolongados	Estudos curtos	Rápido ingresso na vida activa
Ascendência social e volume cultural favorável	forte	66 %	24 %	10 %
	outro	47%	20%	33 %
Ascendência desfavorável e fraco volume cultural	forte	69 %	13 %	18 %
	outro	8 %	31 %	61 %

figura 4

aspectos escolares não são só favoráveis; são determinantes: " mais desfavorizada é a família, mais consequências sobre a sua escolarização tem a ausência dum projecto forte." Reproduzimos aqui o quadro:

"Pensar matemática"

A estrutura de "*Pensar Matemática*" tinha que pôr em evidência o contexto da matemática na sala: o grupo, a vida dentro e a volta da sala, os projectos que nascem da vontade de investigação do grupo.

Retomei como fio condutor a estrutura de curso com o mesmo nome proposto no quadro da Formação Continua para professor do 1º ciclo do ensino básico.

Diga-se já que se tornou claro ser um não-senso falar de formação continua, quando se decreta limitar esta formação a um pacote de horas, dando prémios a quem assiste às sessões, como aconteceu com o "Foco".

Os objectivos do curso referido eram:

- Desenvolver a capacidades pessoais para transformar informações dos alunos em trabalho de investigação.
- Objectivar problemas e projectos.
- Analisar técnicas e métodos utilizados na sua prática diária.

Nas intervenções em "*Pensar Matemática*", tal como neste escrito, aparecem momentos, pequenas histórias, trazendo cada um deles os seus conteúdos especificamente relacionado ao programa de matemática do 1º ciclo do ensino básico, que reformulei em 6 áreas, tendo cada uma delas pontos de atenção:

1 - A matemática... que problema!

1) Abordagens de problemas e de soluções; linguagem e representação de problemas; soluções criadoras.
2) Problemas e paradoxos na história da matemática e a sua importância na progressão do desenvolvimento do raciocínio lógico.
3) Matemática e as outras áreas: Um para todos, todo para um?

- Vantagens e desvantagens da utilização de vários suportes
- Ver matemática no dia a dia.

2 - Os problemas que surgem... naturalmente

1) O canto de experiências
   - Como criar;
   - Como explorar;
   - Como relacionar com todas as áreas do saber
2) Problemas para todas as idades
   - Tratamento dos problemas
   - Problemas inúteis
   - Dar espaço aos problemas
   - Transformar informações vindas das práticas em problemas (tipificação, enquadramento no programa, objectivar)
3) Investigação científico - matemática no 1º ciclo
4) Problemas na prática de cada um.

3 - Medidas: Baldes de água (fria) ou a mania das grandezas

1) Situações problemáticas centradas sobre grandezas e medidas.
   - a descoberta da relação entre as medidas
   - a história da instrumentação e o aproveitamento dela na prática
   - o canto de experiências
2) Relatos de investigação.

4 - Construir, Destruir, Estruturar números

1) Perceber os números, a sua história e a sua utilização
2) Exploração do material de apoio:
   - - Cuisenaire
   - - Papy

- - Material não estruturado e material multibásico

3) Problemas numéricos num contexto real
   - Análise de caso da prática.

5 - Dar forma ao espaço

1) Explorar trajectos, labirintos e percursos
2) Explorar áreas definidos no geoplano e com o tangram
3) Decoração de azulejos
4) Exploração de sólidos

6 - Operações e problemas à la carte

1) Apresentação de casos da prática: 1 caso escrito por formando
2) Operações: formas de operar números reais.
3) Discussão e teorização dos casos apresentados.

Quando sopram os ventos da mudança, uns levantam barreiras, outros constroem moinhos de vento.

Proverbio Chinês

2. O grupo e a sua interacção com a matemática

A escola não é mais do que um espaço cultural que facilita a aprendizagem

Ivan Illich

Um grupo de formação igual aos outros

Neste capítulo, utilizo o trabalho realizado com um grupo de professores/as, em 1993, no quadro duma formação continua promovida pelo Instituto Irene Lisboa, como pano de fundo.

Quando se planifique uma acção formativa, frequentemente ocorre a ideia que se é forçado a trabalhar cegamente.Não há a possibilidade para fazer um estudo aprofundado do meio em que são inseridos os formandos, ou as formandas, até porque muitas vezes não está previsto nenhum dispositivo que o permite.

A situação não é melhor para muitos professores/as do 1º ciclo. Colocado tardiamente ou longe de casa, falta-lhes meios e tempo.
Frequentemente não estão enraizados na zona ou no bairro da escola básica onde vão trabalhar. Falta assim o quadro de referência indispensável à elaboração da acção formativa que lhes é encomendada. Terão que construí-lo com os meios limitados (?) dos quais dispõem:

- a observação do bairro onde está implantada a escola;
- a mobilidade dos utentes da escola;
- a informação fornecida pelos representantes do tecido local: comerciantes, associação de pais, colectividades, poder local, contínuo ou contínua da escola, etc.

Estas observações permitirão:

- a construção do espaço de trabalho, com todos os elementos que nele participam;
- a confrontação das observações pessoais iniciais com as dos parceiros não directamente ligados a este meio: um(a) colega com uma turma de correspondência interescolar, um círculo de estudo, um grupo

de reflexão.

Por isso é preciso não só uma grande maleabilidade, como também a possibilidade de estruturar a acção educativa para possibilitar uma certa liberdade de acção, de readaptação e de *feedback*. Mais fechado sobre si, mais difícil o curso levará as pessoas que nele participam a evoluir.

A melhor forma de paralisar a acção formativa, é recheá-la de exercícios programados, encadeados e fechados, não permitindo desvios sem pôr a flutuar todo o grupo. Mas esta maleabilidade é igualmente fruto da formação continua que o/a formador/a se impõe a si mesmo.

Lembramos, neste contexto, que os conteúdos programáticos só servem de suporte, não são, muitas vezes, sequenciáveis.

Para conhecer o grupo, questionamo-lo. Para o questionar, acordamos o que é questionável. Foi assim que se começou o trabalho no grupo referido:

Fazer um questionário: Que informações aceitamos disponibilizar

Aceitamos divulgar:

1. Nome
2. Local de residência
3. Experiências negativas e positivas para discutir aqui.
4. Se se aplica já o novo programa?
5. Aplicando o novo programa: considera-o mais fácil ou mais difícil?
6. Tamanho da escola onde trabalha actualmente.
7. Tipo de horário.
8. Ano e fase em que lecciona.
9. Expectativas em relação ao presente curso.
10. Razões que nos trazem cá.
11. Qualidades que mais aprecia num grupo de trabalho.
12. Acha que está na profissão certa?
13. Sente-se realizada profissionalmente?
14. Em que zona trabalha?

Não aceitamos

1. Comunicar dados sobre a família, estado civil, filhos.
2. Gostos, tempos livres.

3. Outras actividades que fazemos.
4. Qualidades e defeitos que pensamos ter.

Este questionário é o resultado dum curto trabalho em pequenos grupos, socializado de seguida. A exclusão das 4 perguntas (o que não aceitamos), é resultado duma discussão de 10 minutos. A discussão é iniciado por alguém que não concorda responder a todas estas perguntas, por achar que algumas não têm nada a ver com o curso. A discussão leva a definir que no grupo de trabalho que somos, as decisões serão tomadas por consenso. Nesta fase, consente se que é preciso estar atento às pessoas todas, aceitando não fazer as perguntas às quais pelo menos uma pessoa se opõe. Mas na discussão aparecem também cinco estratégias para chegar ao consenso. As 4 primeiras são postas de lado, porque parecem não tomarem em conta o que cada um recente. Eis as propostas:

Como chegar ao consenso?

1. Faz-se a pergunta, não é necessário responder.
2. Não se faz a pergunta.
3. Deixamos falar a experiência.
4. Vamos por votos - talvez seja o mais rápido
5. Não fazemos as perguntas às quais pelo menos 1 pessoa se opõe.

Querendo saber um pouco mais sobre as razões que levaram as pessoas a escolher este curso, faço uma pergunta inocente *" O que sabem do curso?"* A resposta foi esclarecedora:

1) nada.
2) matemática é um problema.
3) corresponde as nossas expectativas.
4) iniciação
5) a melhor maneira para ensinar matemática no ensino básico

E à pergunta *"O que o título do curso vos sugere?"*, responde-se:

1) o lúdico associado à matemática
2) construção de conceitos
3) uma outra forma de abordar a matemática
4) reflectir sobre a matemática

Histórias de sala

Falamos sobre a organização da sala, sobre "eles que nunca se calam", sobre saber o que lhes interesse. Um dia, resolvemos parar, sentar-nos em círculo, falando de novidades.

18.27: I: Pedi que eles inventassem uma história em que entra uma operação, 3 + 2 por exemplo. Inventamos uma história sobre 3 estrelas que se zangaram com as duas luas. Isto é uma história matemática? Como?

18.30: M: Por causa da organização dos jogos da primavera, o Rui esteve a trabalhar a velocidade no treino do salto a corda: Registaram quantas vezes se saltou em 30 segundos.

18.34: M

18.36: L: Sobre a equipa de apoio

18.38: C: Jogamos o jogo da Glória no 1º ano. Pode se fazer com 15 alunos e 6 dados ou com 17 alunos e 9 dados

18.40: E: Comecei uma história a partir da quantidade com a introdução dos símbolos + e - na 1ª classe.

18.41: I: Sobre dados

18.42: C: Eu lembro me duma situação em que pusemos problemas a 20 alunos a volta de situações reais.

18.47: M: Fizemos uma recolha para Moçambique. Aproveitei com o meu 2º ano de fazer contagens com os pacotes de arroz.

Em 20 minutos recolhemos material para discussão e trabalho. Gere-se um debate a volta das histórias de matemática. O trabalho sobre os jogos de primavera é utilizado para analisar um relato sobre a exploração de conceitos como a velocidade. Voltaremos a estes conceitos, quando trabalharmos os dados do grupo. Fica o registo sobre os carros de corrida (texto de apoio 3). A história da recolha para Moçambique vem a seguir a leitura do texto "O regimento dos caixotes do lixo" (texto de apoio 2).

Entretanto o material aumenta. Prevemos tempo para o organizar. Construímos painéis para termos uma leitura mais fácil sobre quem nos somos.

Este trabalho é feito em subgrupos, que se auto-organizam, utilizando material colectivo que também vai aumentando a medida que as necessidades cresceram.

Quando, um mês mais tarde, proponho uma *Chuva de*

Para mim... matemática é...

certeza	ciência	tabela
difícil	apreensão	esquema
ciência	jogo	gráfica
confusão	estimativa	imaginação
jogo	paciencia	motivação
pensar	competição	grandeza
raciocínio	esquema	exploração
cálculo	cálculo	infinito
exactidão	exploração	decimal
investigar	concretização	interesse
experiência	abstração	documentação
trabalho	sequência	paixão
lógica	alternativa	gosto
compreensão	estratégias	problemas
conhecimento	rumos	certezas
comunicação	luz	situações
adquisição	razão	soluções
ilimitado	facilidade	abstração
estudo	raíz	
comparação	vida	

ideias, registamos o que vem no quadro "Para mim... matemática é..."

Fazendo uma pequena interpretação: no total de 58 palavras, podemos encontrar 14 conceitos dinâmicos, 11 conceitos estáticos, 10 conceitos negativos, 32 conceitos positivos.

A maior parte das palavras podem ser interpretadas como apreciações positivas, poucas são negativas, ultrapassadas pelas consideradas neutras. Para um grupo que 1 mês atrás não podia (nem queria...) dizer nada acerca de matemática e do curso, pode se considerar que houve alguma evolução.

É interessante registar que 1 mês de "problemas de vida" altera por completo neste grupo as ideias clássicas sobre matemática ("contas em pé", tabuada, cálculo, grandeza, ...) e que ela surge agora como a ciência que de facto é: dum lado um vasto campo de investigação só por si e sobre si próprio, do outro lado, um sustento, uma base ou um enquadramento para imensas outras actividades.

Adquerida esta visão da matemática, já é possível entusiasmar-se para o assunto.

Só falta organizar o espaço para tornar a aprendizagem possível.

Construir instrumentos de trabalho para o grupo.

Quais?

Para que os alunos possam trabalhar, é necessário desenvolver instrumentos e socializar informações, disponíveis de forma organizada. Menciono aqui os instrumentos que foram construídos pelas pessoas do grupo para os levar, de seguida, para a sua prática quotidiana com os alunos.

1) Tabuada extensiva.
   A tabuada não para em 10 x 10. No sistema decimal que utilizamos actualmente, é fácil fazer correspondências, porque dispomos duma técnica

bastante simples para nos ajudar no cálculo mental: o algoritmo da multiplicação. Mas investigar a tabuada além de 10 x 10, ajuda a perceber as lógicas que estão por trás. Voltaremos mais tarde a falar deste assunto.

2) Minicalculadora Papy.
   Esta técnica desenvolvida tendo o material Cuisenaire como base, permite duma forma simples e estruturante, expandir as operações para a lógica do sistema decimal, facilitando a leitura das casas de ordem de grandeza. Os painéis necessários podem ser construídos em papel e cartolina. Encontram se alguns exemplos no capítulo 4
3) Material não estruturado.
   Este material continua a ser o mais fácil a arranjar e organizar, para permitir as trocas de uma ordem de grandeza para outra, independentemente da base em que se está a trabalhar. Parece nos indispensável no canto de experiências, do momento que é de livre acesso para cada um e acompanhado duma grelha de transformação para anotar as descobertas ou os resultados.
4) Casa dos números.
   A casa dos números, da qual reproduzimos um modelo no 4º capítulo, ajuda a visualizar a posição dos algarismos em números > 9. É interessante notar que muitas crianças sabem mencionar séries de números até valores bastante elevadas, muito antes de entrar na escola, e que esta casa dos números funciona para os alunos como a banheira para Arquimedes.
5) Linha numérica ordenada 0 - 109
   Outro instrumento útil para os alunos que querem confirmar rapidamente saltos de uma dezena para outra, sobretudo quando estão a desenvolver raciocínios de cálculo mental.
6) Linha do tempo.

Sugestão: de mês em mês para o ano escolar actual e anterior, de ano em ano, para os anos anteriores até ao ano de nascimento dos alunos, saltos de 10 em 10 anos até ao início do século (bisavós...), depois de 50 em 50, de 100 em 100, 500 em 500, 1000 em 1000 e um salto ENORME até os dinossauros. Com é óbvio, é preciso identificar as diferentes escalas utilizadas e discutí-las com os alunos.

7) Calendário do tempo
   Articulado com o canto de experiências que dispõe dum termómetro, barómetro e uma janela (para observar as nuvens), poder-se-á fazer uma recolha de dados sensível de ser trabalhada de seguida.
8) Mapa de presenças
   Este mapa permite visualizar muito facilmente semanas e meses, dando oportunidade para constatar quanto tempo um trabalho leva a ser feito, quantas faltas houve num determinado mês, analisar faltas ao longo dum ano, calcular dias úteis e feriados, fazer pequenas estatísticas. Convêm que estes interpretações são feitas a partir de perguntas ou discussões concretas, senão arrisca-se de voltar a encontrar uma situação como da piscina (*ver infra*).
9) Fichas Plano de Trabalho Individual
   Disponibilizar material aos utentes, implica dar lhes a oportunidades para trabalhar com ele. Implica um apoio para uma auto-avaliação permanente, implica também um instrumento que regista o trabalho feito.
10) Ficha de registo canto de experiência.
   O canto de experiências necessita duma organização que permite a utilização por todos. Não é de entrada livre. Necessita uma discussão prévia de que se pretende investigar, e como vai ser registado. Além disso, convém manter um certo controlo sobre a utilização dos materiais.
   Esta ficha, tal como a anterior, é obviamente concebida para ser utilizada pelos/as alunos/as, mesmo

se são do pré-primário.

11) Geoplano

Outro instrumento interessante, e de fácil elaboração e que permite muitas explorações individuais e colectivas. Pode se pedir apoio a pais e mães para martelar os cem preguinhos numa tábua velha.

No grupo de formação, organizamos espaços para evidenciar o que fizemos: Canto de experiências, material de exposição, parede de descobertas, dados sobre o grupo em painéis, relatórios que trouxemos, material colectivo.

Estes instrumentos foram evoluindo e crescendo durante toda a formação, conforme são propostos ou sentidos como necessários. As vezes, forçado pelo tempo. Não chegamos, por exemplo, a explorar a fundo o canto de experiências, com todas as discussões que pode provocar.

Porquê?

Qualquer material de apoio tem as suas características específicas. Por isso, não facilitam necessariamente a fixação de conceitos matemáticos de todos os alunos que connosco trabalham na turma.

Mais: por mais interessante que seja o material, ele nunca está garante para a aprendizagem dum aluno. É facilitador para perceber um problema ou uma situação, permite enquadramento, diversificação, do ângulo de vista.

Penso que o material didáctico ideal não existe. Há sempre o risco que o material bloqueia a evolução dum aluno ou dum grupo de alunos em vez de os favorecer. A simplicidade pode ser uma resposta a um problema complexo, sem reduzir a fórmulas sem contexto. Vale a pena desmontar as situações até o seu essencial. Uma recta numérica visualiza as contagens já dominadas. Fixa a ordenação culturalmente dada aos números, logo que são mencionadas numa sequencia lógica: a ordenação de números naturais, uma linha do tempo começando pelas datas de nascimento, um registo do tempo semanal, um mapa de presenças mensal, cada um com todas as relações sociais e materiais que implicam, têm uma razão não-matemática de ser.

São observações da vida do grupo e do ambiente envolvente dele. Claro que têm uma utilidade para introduzir alunos da pré-primária e da primeira classe na ciência matemática. Observamos estes situações; leva os alunos à porquês:

- Até onde é que se pode contar? Porquê é que nunca acaba?
- Quantos nomes (substantivos) diferentes utilizamos para nomear os números?
- Pode se dizer vinte e dez? oitenta e dez? em francês diz-se ...
- Porque é que meninos que nasceram todos no mesmo ano têm anos diferentes? Isto é sempre assim? Diminui o número? Aumenta? Quando?

O canto de experiências permite ter material variadíssimo à mão dos/das utentes. A fixação (cartazes na parede ou fichas) das descobertas de cada criança permite a socialização e a discussão à volta das mesmas. A discussão permite rupturas, conflitos e reencontros; permite fazer sentir a necessidade de criar regras para o grupo e os indivíduos evoluírem. Permite também perceber que a aprendizagem é um processo dinâmico. Aliás, a exploração do mundo e de si-próprio só tem sentido se a professora ou o professor fomenta constantemente esta ideia de processo dinâmico.

As nossas regras

Trata-se em muitos casos de fixar o patamar de acordo. Não são leis. No grupo de formação, três regras apoiaram e ancoraram a regulação do trabalho:

1ª regra (03.05.93): Trabalhamos por consenso. Se 1 pessoa se opõe, não fazemos.

2ª regra (26.05.93): O formador propõe: nas discussões, falamos um de cada vez. Ninguém se opõe. Não é regra, mas pode ser transformado numa... um dia.

3ª regra (14.06.93): Em cada módulo prevemos 3 horas de plano de

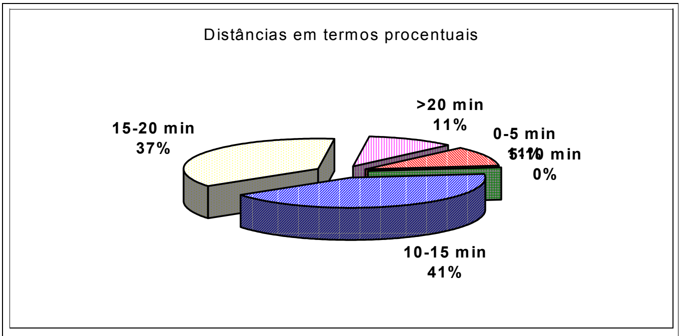


figura 5

trabalho individual - 20% do tempo.

As regras nascem de necessidades sentidas[3]. Neste grupo, não foram muito trabalhadas Entretanto, o argumento: "Trabalho de grupo? Não! Eles estão sempre a falar e não aprendem nada!" deixou de ser argumento, porque a apreciação sobre o trabalho feito mudou consideravelmente.

O que se traz de lá fora...

O consenso à volta do questionário determina os assuntos não controversos, dos quais todos querem falar abertamente. Como o grupo vedou o acesso a perguntas do tipo "Quantas crianças tem?", "É casada?" ou "O que considera serem as suas qualidades e os seus defeitos?", não houve informação deste tipo exposto na sala de trabalho durante a formação.

Em contrapartida, surgem grelhas sobre as distâncias entre casa e escola, nºs de alunos que cada um(a) tem na sala, em que regime se trabalha, o "tamanho" da escola (nº de alunos), em que ano leccionamos. São os grupos de trabalho a organizar, completar e representar os dados. Surgem iniciativas próprias. (*ver figura 5*)

2.2. O trabalho para a sala

A partir dum momento de recolha de trabalho feito na sala, procuramos o apoio do grupo de formação para enriquecer a proposta.

Eis alguns exemplos trabalhados:

A partir duma proposta no canto de experiências, um grupo discute:

O que se pode fazer com...

DADOS

	♦♦♦ ♦♦♦	♦♦♦ ♦♦	♦♦♦ ♦	♦♦♦	♦♦	♦
Rui						
Joana						

Material: 1
ado ou mais.
* Jogo da
lória - identifi-
ação dos
úmeros
somas
- subtracções
- correspondência de quantidades

d
G
c
n
-

* Tabelas

* Multiplicação
* Caricas - comparar quantidades
  - fazer contagens
  - adições
  - registo

A E. discute com outro grupo situações criadas com quantidades e ou sinal + e -:

- Noções do sinal + e -
- Conjuntos e subconjuntos
- Noção da quantidade
- Correspondência: unívocas e biunívocas.
- Tábua para adição e subtracção
- Noção de cor
- Inventar situações problemáticas no campo real.
- Noção do sinal <, =, >

O jogo de preparação para os Jogos da Primavera, na escola da M., abre uma discussão animada.

- Nome do jogo: Nata com piolho
- Equipas de 6 jogadores
- Como só há 23 alunos, a professora também joga
- Tempo de duração do jogo: 10 minutos, ou termina quando todos os jogadores duma equipa forem eliminados.
- Para ir aos jogos da primavera, só vai uma equipa por turma. Na escola há jogos eliminatórias e vai a equipa "ganhadora"

Um grupo discute uma série de propostas de trabalho a partir do levantamento de dados feito na turma duma das participantes:

Investigação real

Medimos os alunos. Registámos as suas alturas em cm. A partir daqui, fizemos conjuntos A e B, com os que mediam mais que 127 cm e menos que 127 cm.

Utilizamos simbologia $>;<;=;\neq;\in;\notin$

- Diferença entre o mais alto e o mais baixo do conjunto A.
- Diferença entre o mais alto e o mais baixo do conjunto B,
- Quanto mediam todos os alunos do conjunto A; e os do conjunto B.
- Diferença entre o mais alto do conjunto A e o mais alto do conjunto B.
- Diferença entre os totais dos 2 conjuntos.
- Soma dos 2 conjuntos.
- Tabela com as alturas dos dois conjuntos.

* Com os dados, as propostas não variam muito das clássicas. Veremos na mesma investigação que há trabalho bem mais motivador para fazer (4).O material não se deixa abusar sem consequências. Lembro-me da 5ª classe que com que conseguiu obter uma aula de

natação por semana depois de muitas diligências à direcção da piscina do bairro. Todo entusiasmado, criei uma serie de problemas "da vida deles": m^3 de água e piscinas que transbordam quando 25 alunos entram. A resposta foi imediata: "O! Pascal, se é para fazer problemas, a gente dispensa a aula de natação."

* As situações criadas deixam os alunos com o papel do professor na situação anterior. Podemos duvidar do real...
* Discutimos o conceito da equipa. Será que a "democracia" impõe aqui a mediocridade? Nada de mandar os 6 melhores jogadores...
* As medições lembram o trabalho inicial nosso: Quem somos nos...

É difícil sair da rotina, mas abriu-se as portas à discussão.

Planificar para os alunos

As resistências vencem-se pouco a pouco. Mudança não é um processo fácil. Há também medos para vencer. Medos, que têm a ver com a instituição escola. Fica combinado fazer da avaliação do curso um exercício útil, não só para arquivar.

Aproveitando o início do novo ano escolar, cada pessoa prepara o 1° trimestre, integrando na planificação para a matemática os aspectos de "*Pensar matemática*" que queira abordar. Fica combinado utilizar o módulo "à la carte" para fazer uma crítica conjunta aos planos apresentados. Ambiciosamente, pensa-se haver tempo para falar de todos os planos.

Respeitando a regra que a crítica é confidencial, não reproduzo aqui o conteúdo destas discussões.

Mas constato:

* Que a maior parte dos planos retoma ideias de organização;
* Que se advinham pequenos projectos de trabalho

integrado;
* Que o enquadramento do grupo e a construção dos materiais para fixar as referências do grupo está consolidado em alguns planos;
* Que só 5 planos são analisados;
* Que na avaliação muito se refere a falta de tempo para analisar as práticas;
* Que no início do curso a maioria do grupo pede para não insistir muito sobre o trabalho intercalar (trabalho a realizar entre dois momentos de formação, para pôr em prática algumas pistas de trabalho, deixadas durante a formação, devolvendo os resultado para a formação);
* Que ao longo do curso só algumas pessoas trazem experiências da sala até que surge o pedido para passar algumas coisas por escrito;
* Que neste momento, no grupo há quem pensa que a formação continua não é um curso com um número pré-estabelecido de horas.

Avançamos...com a história:

E se fossemos a Bélgica?

Tendo mantido uma correspondência interescolar entre os meus alunos em Lisboa e os alunos duma turma em Lovaina (Bélgica), as crianças Portugueses formulam o seu desejo numa reunião no início de Janeiro: "E se nos fossemos encontrar com os nossos correspondentes?". A ideia tornou se plano de trabalho para toda a turma. Segue um extracto do dossier de apresentação aos financiadores (que os alunos procuraram):

1. História

A terceira classe da escola " A voz do Operário", começou uma correspondência interescolar com a escola "De Appeltuin) em Lovaina, enquadrado numa tradição pedagógica para tornar o estudo do meio envolvente mais realista, de duas maneiras:

– o que estudam serve para ser lido por outros que não estão na melhor situação para poder estudar este assunto. Enviamos

dossiers sobre matérias por nós analisados:
- projecto 5 de Outubro (implantação da república portuguesa)
- projecto Descobrimentos Portugueses
- projecto Doenças Tropicais
- Recebemos:
- projecto sobre golfinhos, com perguntas concretas sobre a legislação Portuguesa na matéria da protecção do ambiente.
- projecto sobre hábitos e tradições na Bélgica na época do Natal (pedido nosso)

(...)

Escolhemos uma turma Belga por diversas razões:
- Bélgica, e sobretudo Bruxelas (a 26 km de Lovaina) é um nome muito referido nos telejornais, por causa da C.E.E.
- O neerlandês, completamente diferente do Português foi pólo de atracção.

2. Conteúdos de trabalho da visita

* Contacto com uma família de outro país
* Semana de trabalho temático:
  - transporte;
  - C.E.E.
  - visita ao centro C.E.E. - Bruxelas
  - laços históricos entre Flandres e Portugal (desde a reconquista até o século passado)
* Contacto inter-cultural alunos-pais
* Organização da visita pelos alunos, desde o pedido de autorização aos pais até a sua realização

Organizaram-se na sala uma série de grupos de trabalho, cada um encarregado com determinadas tarefas, das quais tinham que dar conta semanalmente, nas reuniões de avaliação.

A matemática aparece como suporte em múltiplas actividades:
- Desenho de mapas de viagens
- Cálculo das distâncias Escola Lisboa - Escola Lovaina, recorrendo a plantas das cidades, mapas do país e mapas de Europa
- Interpretação de dados do instituto da meteorologia

onde pedimos informações sobre as diferencias entre o clima português e belga.

– Bilhetes de avião: comparação de preços e ofertas
– Tesouraria
– Horários
– Projecto de animação (logo) em computador

A matemática, e não só, tornou-se suporte para a realização dum projecto que envolvia toda a turma.

2.3. O espaço cultural intermediário (5)

Os esquemas escolásticos não levam os formandos a pensar e se desenvolver. Na melhor das hipóteses, levam-nos a reproduzir o que outros pensavam para eles.

A medida que sabemos mais sobre como o ser humano pensa e estrutura o seu conhecimento, tornou-se menos polémico afirmar que as seguintes condições são importantes para que haja desenvolvimento pessoal:

* O grupo/espaço onde se propõe formação interage sempre com o indivíduo. Incluir esta interacção na formação será muito mais eficaz que tentar contrapó-la ou ignorá-la.

* A pessoa não se desenvolve no vácuo. Se o grupo/espaço de formação corta com o passado e não prepara o futuro com o indivíduo, criam-se angustias que bloqueiam o processo de aprendizagem.

* É reconhecido na investigação pedagógica que o acto de aprendizagem é um acto de integração e reorganização de novos conceitos dentro das estruturas que já fazem parte do pensar da pessoa. Se não houver espaço para esta integração, não haverá aprendizagem.

* Um processo de aprendizagem activa, i.e. tomando em conta cada uma das pessoas, das vivências, das histórias presentes no grupo, não significa de forma

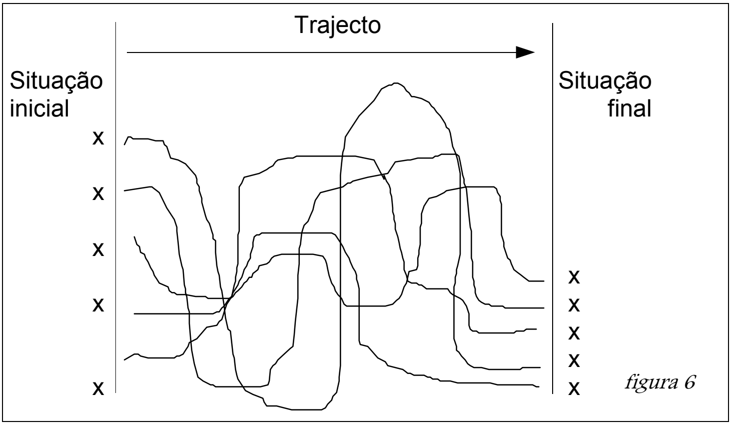


figura 6

nenhuma, a ausência do/a formador/a, que guia, que alerta, sintetizando, assim apoiando a referida integração.

Isto tudo faz me lembrar o esquema que foi apresentado numa formação de formadores: os itinerários de cada um dos elementos do grupo podem ser muito diferentes, embora tendo pontes de passagem (sínteses, globalizações, socialização de conhecimento adquirido) em comum; todos seguem um trajecto estabelecido pelo formador (*figura 6*)

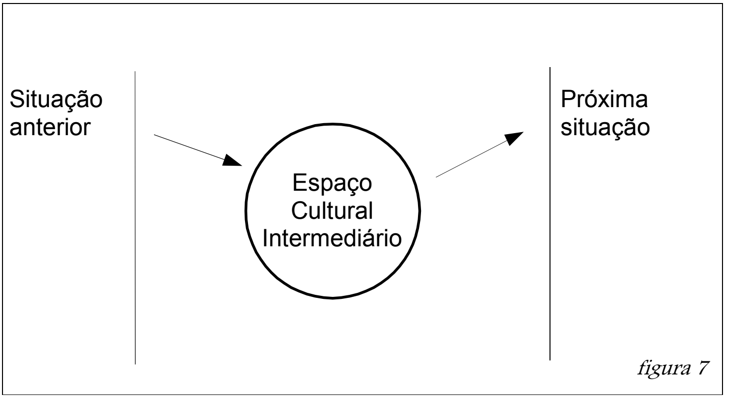


figura 7

O espaço cultural intermediário permite o recuo mas incitando o grupo a evoluir (*figura 7*). Por isso, encontramos necessariamente os problemas de vida, do dia a dia, neste espaço, evitando assim que *conceitos* se confundam com *técnicas*. Somar m^2 com ha e dm^2 não é resolver problemas, é mostrar a incapacidade do formador para tratar de assuntos de verdadeiro interesse, assuntos estes que podem ser sustentados por uma grelha que permita reconduzir grandezas.

Para ilustrar: encontrei este espantoso "problema" no caderno da minha filha de 8 anos: *Uma peixeira vende 1 dezena mais 1/2 dezena de carapau e um quarteirão de*

3. Problemas - O início, o meio e o fim

Mandam-se as crianças para a escola para se habituarem a cumprir escurpulosamente o que se lhes ordena, de modo que depois não pensam, mesmo que têm de pôr em prática as suas ideias.

Imanuel Kant

3.1. Problemas do nosso dia a dia

Problemas ... de escola

O dia a dia do professor de ensino primário é bem diferente que dos outros seres mortais: pelos problemas que cria, inventando situações, desde peixeiras que vendem quarteirões de sardinhas, passando pelas clássicas torneiras que pingam enchendo banheiras que se vazam porque o tampo não fecha bem, até fruticultores que continuam a pôr colheitas inteiras em caixote ou agricultores ainda a procura da área das suas terras, complicam a vida que pensam retratar.
A dificuldade da peixeira para reconverter o preço de compra ao peso em preço de venda por quarteirões, irá fazé-la abdicar rapidamente desta tentação, resolvendo assim o problema.
A segunda situação pode de facto ser mais difícil para resolver, tomando em consideração a falta de canalizadores. De qualquer maneira, uma visita a um centro de bricolage será de certo mais eficaz para resolver o problema do que procurando saber quando a banheira estará cheia, adiando esta visita.
Na terceira situação, os fruticultores e agricultores que mecanizaram os processos de embalagem e de sementeiras, têm outros problemas:.o PAC, o GATT e o Mercado Único parecem muito reais.

A tendência para fugir de forma sistemática à realidade, tem várias justificações, entre as quais realçamos estes testemunhos:

* A vida real é demasiado complexo. Temos que ir por passos.
  (Felizmente, as crianças aprendem a falar na vida real, e não seguindo um método científico-escolar tipo passo a passo.)
* Os problemas da vida real podem perturbar as crianças. Na escola temos que criar um bom clima,

esquecendo-nos do que se passa lá fora.

* Como atingir os nossos objectivos, se não planificamos os problemas que vamos trabalhar?
* Na vida real, não se encontram sempre situações que servem para trabalhar conteúdos previstos no programa.

A lista é longa... assim poderiamos apresentar:

Receita dum problema de escola

* Tomar uma operação adaptada à média da turma.
* Criar uma história simples e inequívoca à volta desta operação.
* Redigir um esquema de resolução.
* Deixar os alunos resolver a situação *individualmente* controlando bem o tempo que leva a responder
* Controlar se o esquema de resolução do aluno corresponde ao esquema acima mencionado. Caso contrário, repetir q.b. , sob forma de trabalho de casa.

acrescentando esta proposta a muitas outras que existem nos livros culinários da pedagogia.
Aqui, proponho trabalhar a partir de dois tipos de problemas, provisóriamente definidos como problemas científicos e problemas da vida.

Problemas científicos

Estes problemas provêm muitas vezes de observações pelas quais não se encontram respostas aceitáveis na altura da observação.
Descobriu-se que para trocar objectos contra objectos, os números naturais servem muito bem, como modelo de abstracção. Para calcular fragmentos de objectos, já se precisa um novo instrumento: inventou-se maneiras para determinar as fracções.
Talvés que os números negativos não foram inventados pelos

economistas procurando uma forma para explicar porque é que, apesar de sinais abundantes de mas-estar, tudo vai bem, mas muitas invenções matemáticas são resultante da tentativa de descrever fenómenos observados: a álgebra, a geometria descritiva, o cálculo integral, os conjuntos de Cantor e mesmo observações enigmáticas como esta de Fermat, com a sua "maravilhosa demonstração que para $n > 2$ não existe terno $x^n + y^n = z^n$.

Muitos problemas científicos podem ser explorados no primeiro ciclo da escola básica: o teorema de Pitágoras sobre os quadrados perfeitos por exemplo. Com o geoplano ou com material do canto de experiências (caricas, tampas, etc.), depressa os alunos descobrem que a soma dos primeiros n ímpares $= n^2$.

Numa primeira classe, deduzimos informação sobre o sol, o zénite, o Verão e o Inverno, a partir da sombra dum pau. Nada de original.

Problemas da vida

Fiquei muito interessado por um livro de Michel Fustier, *La résolution de problèmes*, onde o autor expõe claramente a diferença entre problemas de escola, científicos e da vida, desenvolvendo depois só os últimos. Como consultor, interessa-lhe também fazer a análise dos problemas de organização nas empresas e a pesquisa de qualidade de produtos. Para resolver o problema é preciso identificá-lo. As vezes o que parece ser importante, só é de interesse secundário. E como é natural, pela nossa experiência somos condenados a não aceitar determinadas pistas de solução, o que faz com que podemos não conseguir resolver o problema de forma satisfatória. Introduzimos muita informação que vem do nosso vivido e não dos dados objectivamente formulados. Pode ser útil esquematizar o problema, até para que se torne mais claro onde intervem "o que toda a gente sabe", os "isto é óbvio" e as informações parcialmente omitidas e muitas vezes completadas por interpretações, esquema esse, mais funcional do que uma qualquer forma abreviada do problema.

O problema de vida é para mim também esta situação que aparece no grupo e que o grupo está interessado em desenvolver (com o estímulo do professor). É o relato do regimento dos caixotes de lixo, é a viagem à Bélgica, mas também a organização cooperativa da sala, da festa do Magusto, a construção do scrabble (6) e tudo que queremos investigar porque simplesmente tem a ver connosco.

3.2. Problemas, ao ataque.

Nome	distancia	tempo	est. + veloz	vel. m/ min	conc. + vel
Adelaide	5,000 m	45'		111	
São	2,000 m	5'	2ª	400	3ª
Marília	3,000 m	20'		150	
Lucinda	15,000 m	60'		250	
Isabel	3,000 m	30'		100	
Emília	4,000 m	45'		88,8	
Celeste	10,000 m	60'		156	
Mª do Carmo	1,500 m	10'		150	
Ilídia	5,000 m	15'	3ª	333	
Mª Adelaide	5,000 m	30		166	
Fátima	300 m	2'		150	
Glória	3,000 m	30'		100	
Teresa	22,500 m	25'	1ª	900	1ª
Joaquim	60,000 m	40'		428	2º
Cecília	4,000 m	30'		133	
Elisabete	2,000 m	11'		181	
Bernarda	5,000 m	30'		166	
Pascal	12,000 m	70'		171	

No grupo de formação anteriormente referido, foi registado, num dos painéis, a distância entre a casa de cada uma das pessoas e a escola onde trabalha.. Aproveitamos estes dados para reflectir um pouco sobre as noções que cada um tem de velocidade. Montou-se o quadro reproduzido na página anterior.

Várias observações:

* As duas pessoas que vivem mais longe do trabalho são também as pessoas que desenvolvem a maior velocidade.
* Ninguém estava a espera que o Joaquim estava entre os mais velozes.
* Demorar pouco tempo para chegar à escola não diz nada sobre a velocidade.

A partir deste trabalho, foi possível ler e interpretar o relatório *O Lego-logo e a construção de conceitos matemáticos* (texto de apoio 3).

Há varias técnicas possíveis para visualizar dados do grupo. Assim, utilizamos "setas que falam" para relacionar os alunos com mais, menos ou o mesmo tamanho de 127 cm na sala da Eduarda.
Entre adultos, foram feitos jogos de setas de equação (tu tens o mesmo tamanho que eu) e de relação (quando 1 é maior que 2 e 2 é maior que 3, 1 é maior que 3). Não foi fácil descobrir que neste tipo de relação, há sempre um encadeamento.

Como interpretamos um problema: A máquina registadora

O exercício a seguir, desenvolvido pela SEIES, foi aqui utilizado para realçar como se completa informações àlguns dados relatados em estilo telegrama.

A história:

Um negociante acaba de acender as luzes de uma loja de calçado, quando surge um homem pedindo dinheiro.
O proprietário abre uma máquina registadora.

O conteúdo duma máquina registadora é tirado e o homem corre.
Um membro da polícia é imediatamente avisado.

Apresenta-se este pequeno texto, junto com as frases seguintes:

Declarações acerca da história.

1 Um homem apareceu assim que o proprietário acendeu as luzes da sua loja de calçado.
2 O ladrão foi um homem.
3 O homem não pediu dinheiro.
4 O proprietário da loja de calçado retirou o conteúdo da máquina registadora e fugiu.
5 Alguém abriu uma máquina registadora.
6 Depois que o homem pediu o dinheiro, apanhou o conteúdo da máquina registadora e fugiu.
7 Embora houvesse dinheiro na máquina registadora, a história não diz a quantidade.
8 O ladrão pediu dinheiro ao proprietário.
9 A história regista uma série de acontecimentos que envolvem três pessoas: o proprietário, um homem que pediu dinheiro e um membro da polícia.
10 Os seguintes acontecimentos da história são verdadeiros: Alguém pediu dinheiro/A máquina registadora foi aberta/ o seu dinheiro foi retirado e um homem fugiu da loja.

Pede-se, individualmente, para cada uma destas declarações de dizer se são falso, verdadeiro ou desconhecido.

O trabalho é executado individualmente, depois discutido em grupo.

No caso do presente grupo, houve interpretações contraditórias. Na discussão que segue, e que é muito animada, por várias vezes, as pessoas reconhecem terem dificuldades em aceitar revre os seus pontos de vista. Mas ao mesmo tempo, e neste caso, trabalho de grupo faz com que a solução, que aqui é só uma, se torna mais evidente.

Problemas científicos...

...os caminhos do tabuleiro...

Vejamos um simples tabuleiro do jogo de damas *(figura 8)*:

A proposta é simples: Procura todos os caminhos possíveis

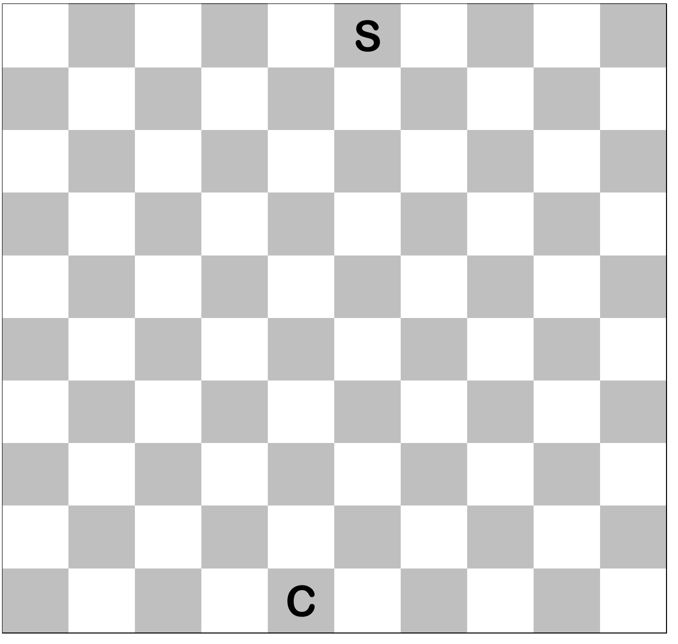


figura 8

autorizados para ir da saída S à chegada C.

Numa primeira estimativa feita pelos elementos do grupo, surgem as seguintes propostas: 20, 5^5 (3125), 9, 10, 50, 100. Depois de algum trabalho e de várias estratégias, as soluções apresentadas são: 11, 111, 34, 64, 54.

As duas estratégias utilizadas são de somar ou de desenhar todos os caminhos, o que tanto num caso como noutro provoca alguma confusão. Colectivamente descobre-se os rectângulos formados pelos caminhos exteriores, e as possibilidades de movimentação dentre de cada rectângulo. Afinal, descobre se os caminhos possíveis. Só uma das estimativas e só um dos números encontrados após o desenvolvimento duma primeira estratégia se aproxime da solução, que foi encontrada por análise colectiva.

... e a sombra do pau.

Da prática da primeira classe, discutimos esta observação feito pela Inês, a Rita e a Catarina:

Com um pau, no recreio, medimos:

25.03: 4 horas da tarde - a sombra tem 25/29 palmos
26.03: 2 horas da tarde - a sombra tem 15 palmos - não cortamos o pau
26.03: 4 horas da tarde - a sombra tem 25/29 palmos - será que cresceu?
27.03: 2 horas da tarde - a sombra tem 14 palmos - o pau mede 19 palmos.
27.03: 5 horas da tarde - a sombra tem 30 palmos - o pau continua a medir 19 palmos. Hoje observamos também que a sombra não está sempre do mesmo lado.

Da discussão na sala:

- A sombra é por causa do sol.
- É por isso que não está sempre do mesmo lado, o sol gira.
- ??
- O sol não está no mesmo lado de manhã e a tarde.
- Não inclinaram o pau?
- Não, foi sempre direitinho, como na ficha (Fichier de travail cooperatif, ficha nº 368)

Discutimos o aproveitamento deste trabalho no canto de experiências: pode se observar como o sol muda de altura do Inverno para o Verão, pode se construir um relógio solar.

Um projecto de trabalho: a saída ao jardim

Situações como esta com a Inês, Rita e Catarina, ocorrem em todos os grupos. O canto de experiências foi a técnica formativa utilizada que provocou a pequena investigação e o registo em ficha das conclusões provisórias e aparamente contraditórias. E é exactamente esta contradição que faz com que a discussão entre os alunos e o professor se torna possível.

No grupo de formação, aparece um vídeo feito por uma criança, filmando uma entrevista aos reformados, preparada e realizada pela turma, no jardim perto da escola, sobre a qualidade do ambiente. O menino, muito interessado nos pombos, revela-se grande columbófilo, teimando em filmar estes pássaros em todas as posições.
O resultado do trabalho é uma redacção com elementos uniformes, seguido por uma listagens de perguntas e respostas.

Fica uma pergunta da professora que traz o video: *"Como aproveitar matematicamente desta situação?"*

O trabalho é executado em pequenos grupos, e leva à seguinte série de propostas:

* Observar ângulos/figuras geométricas/sólidos
* Fazer contagens: Pombos/pessoas/carros/bancos.
* Fazer conjuntos de animais / pessoas / árvores / pombos / etc.
* Perímetros e áreas
* Investigar a capacidade do lago (EPAL) - equivalências de medidas de volume
* Traçar itinerários - tipo de linhas antes / depois / durante
* Plantas do jardim
* Trabalho analítico das entrevistas
* Relação bancos-pessoas
* Investigação - quem é o mais novo dos entrevistados no jardim
  - quem é o mais velho no jardim
* Calcular a altura das árvores
* Procurar saber qual é a altura máxima da água do repuxo/a quantidade de água que é preciso por dia.
* Relacionar uma área do passeio ao volume e o peso dos seixos necessários.

Há claramente dois tipos de explorações. Toda uma série de propostas são pontuais, podem ou não estarem relaciona-

das umas às outras. São as peças soltas que continuam a prevalecer, os conteúdos programáticos determinados pelo professor em função de objectivos mais ou menos claros para os alunos.
Imaginemos só um momento que o canto de experiências tem uma proposta (em ficha - colocada pelo professor) para fazer uma investigação sobre a utilização dum espaço público perto da escola. Alguns alunos pegam nela, e no desenvolvimento do projecto concerteza surgirão conteúdos programáticos acima referidos.

E, sabendo que não vamos nadar para resolver problemas escolares, paramos quando surge o risco de introduzir conteúdos que não contribuem à resolução do problema.

O problema do Rui

O Rui traz o seguinte enunciado para a sala:

Um homem que estava na América do Sul queria vir para Portugal.
1. Tenta descobrir como é que ele veio.
2. Descobre os transportes que ele utilizou até aonde.

Nota: Não veio de avião

Todos os alunos da 3ª classe pegam neste problema. Enquanto procuram uma solução surgem as seguintes perguntas:

1) Tem carro?
2) América do Sul tem comboios?
3) Onde é que ele estava?
4) Havia barcos?
5) No oceano havia porto?

Depois fizemos um levantamento das respostas:

Meios utilizados:

– Comboio e barco
– Barco grande
– Boleia

– Camioneta e barco
– Carro e barco
– "Trotinete" e submarino
– Barco à vela
– Carro e comboio
– Nave espacial
– Navio e submarino
– A nadar.

Tentamos classificar as respostas, primeiro segundo o critério possível / impossível. O critério não satisfaz muito porque ficam demasiado hipóteses em aberto. Concordamos que de carro e comboio deve ser impossível porque ou o carro ou o comboio precisam de outro suporte para atravessar o oceano (avião, barco, alguém sugere até um icebergue). A nave espacial tende muito tempo para a categoria "impossível", mas o defensor desta solução explica: "Sai da base de lançamento do ARIANE, e quando sobrevoa Portugal desce com a cápsula de para-quedas."

Procuramos outro critério. Adoptamos o provável/pouco provável

Agora sim, eliminamos algumas respostas como "a nadar", "nave espacial", "trotinete e submarino", "barco a vela". Reafirmamos que tudo isso é possível (teimam com o nadar, por mais que vemos a distância real entre a costa sul-americana e a costa portuguesa.

Trata-se aqui de apoiar as crianças para formular hipóteses e fazerem selecções aceitáveis para a execução da tarefa, tomando em conta contextos que, mesmo não vendo mencionados no enunciado, são lógicos.
Encontram as dificuldades na selecção de certa forma parecida com as dificuldades que investigadores têm: não aceitar todas as pistas possíveis, sem ser demasiado selectivo. Só para incorporar este conceito e reforçar atitudes que podem tomar quando trabalham no canto de experiências, o problema do Rui vale a pena ser socializado. Aproveitamos ainda

para realçar outro aspecto na "formulação de problemas":

Invertemos a situação: a resposta é: *"Ele vai de carro até Rio de Janeiro, apanha um barco até o porto de "Le Havre" e vem de comboio até Évora, passando por Paris"*
Em três pequenos grupos, os alunos desdobram-se sobre o que podem ser enunciados.

1) O homem apanha três transportes, dois terrestres e um naval. Um até Rio de Janeiro, outro até a capital Alentejana, passando pela capital da França. O naval vai até o porto de Le Havre.
2) Foi por terra, em transporte próprio até Rio de Janeiro - transporte de 4 rodas sem animais, apanha um navio francês até "Le Havre" e foi por via férrea até Évora.
3) Veio em três transportes, dois terrestres e um naval que apanhou num porto francês, foi de caminho de ferro até a capital do Alentejo, passando pela capital da França.

Constatámos que:

- há incorrecções nos enunciados;
- quando há uma solução conhecida, é desnecessário fabricar enunciados que complicam tudo outra vez .

Trabalhando o problema do Rui entre adultos (antes de saber o desenvolvimento na turma, obviamente), surgem as seguintes propostas e observações:

Propostas

Barco + à pé/autocarro/táxi; táxi + autocarro + táxi + barco + táxi + comboio + RN + carro; barco + comboio; carroça + barco + à pé + comboio; pedindo boleia; balão; helicóptero; submarino.
(reflecte para já que os professores utilizam mais o táxi que os alunos...)

Observações

- Qual é o país de América do Sul?

– Vem para o interior ou para o litoral?
– Qual é a região de Portugal?
– Quais são as condições sócio-económicas do homem?
– Que tipo de viagem é que ele faz?
– É novo ou velho?
– Que tipo de bagagem é que ele leva?

De facto, estamos outra vez nos problemas de vida. Labirintos e percursos podem ser um suporte para planificar as saídas da escola. Não são necessariamente um objectivo em si. Vejamos o...

... Ganhar tempo[7].

Este exercício serve para discutir planificação e lógicas subjacentes às decisões que tomamos, realçando novamente que - salvo em problemas escolares ou em falsos problemas - raramente uma situação problemática tem só uma solução ou uma via para chegar a ela.

Pede-se de executar uma série de tarefas respeitando um conjunto de regras. Para as executar cada pessoa tem uma planta a sua disposição.

Na discussão é realçado a dificuldade que algumas pessoas têm para passar do seu raciocínio para o raciocínio de outras pessoas ou dum grupo. Bloqueia inclusive o consenso, como já tínha acontecido também no exercício *a máquina registadora*. Verifica-se também que o consenso se atinge a medida que cada um consegue desenvolver a sua ideia melhor, levando a clarificar para o próprio e para o grupo onde está a sua força e a sua fraqueza.

3.3. Material de exploração

Tangram

Não vou aqui descrever o tangram, nem propor figurinos a construir com as sete peças do jogo. Durante o curso exploraram se propostas de trabalho do livro *Viva a matemática* para de seguida discutir as dificuldades sentidas.

Fixou-se:

* A dificuldade para ver a relação entre duas áreas de forma diferente.
* A hesitação em confirmar o que ocupa a mesma área.
* Figuras mais compactos são mais difíceis para reproduzir que figuras com contornos mais irregulares.
* Discutir em conjunto, provocar reacções no outro, estimula a procura da solução, facilitando-a muitas vezes.
* Ninguém falou de "jogo", "perda de tempo", "sem objectivos precisos". O puzzle, obviamente jogo, inventado para divertir um imperador chinês, apela à criatividade matemática reforçando a percepção de figuras geométricas planas.
* Para poder aproveitar plenamente o Tangram, o canto de experiências com propostas em ficha ou em cartaz, enquadrado por momentos de socialização de descobertas, impõe-se. Senão, o "exercício" pode se tornar fastidioso.

Geoplano

O geoplano pode ser útil para explorarmos uma série de conceitos tanto numéricos como geométricos. Para o efeito, utilizamos um geoplano 10 x 10.

Repare as várias leituras possíveis no quadrado da figura 9:

* é um quadrado de 9 unidades de área
* é um quadrado que apanha 16 pregos
* é um quadrado que tem 12 pregos na fronteira e 4 no interior
* numericamente este quadrado é $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ ou 4^2, seja, a soma dos 4 primeiros números ímpares.

A partir daí abrem-se muitas pistas de investigação:

1) Este quadrado apanha 16 pregos. Conseguem construir um quadrado de 1 prego? e de 2, e de 3, e de 4, etc.
   Os alunos da 1ª classe com quem trabalhei, faziam um registo das descobertas:
   1 prego: Vasco, Inês
   2 pregos: Tiago, Fernando, Vasco
   3 pregos: -
   4 pregos: o grupo
   5 pregos: o grupo
   9 pregos: o grupo

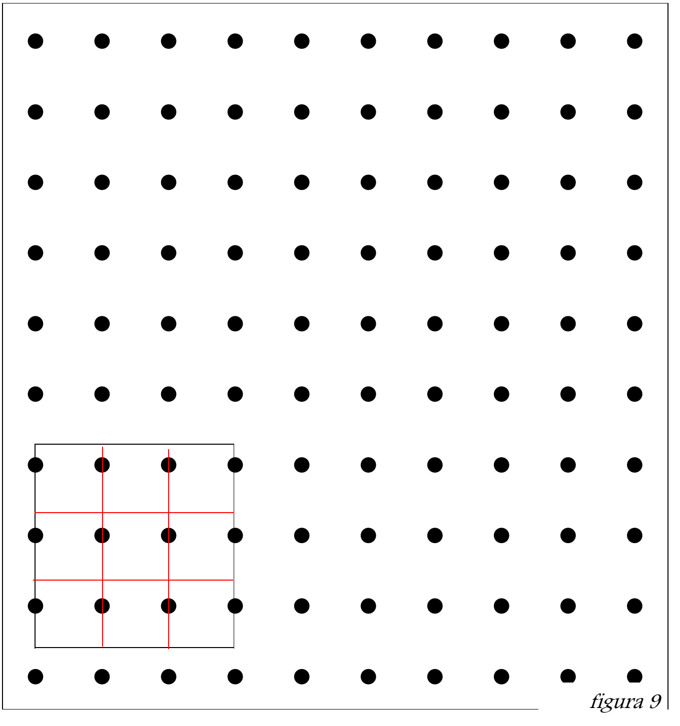


figura 9

13 pregos: Vasco, Catarina

16 pregos: Tiago
25 pregos: Vasco, André, Tiago
36 pregos: Tânia, Catarina, Tiago, Vasco

2) Construímos rectângulos:

com 8 pregos: - 2 filas de 4
- 4 filas de 2

com 12 pregos: - 3 filas de 4
- 4 filas de 2

com 18 pregos: - 3 filas de 6
- 9 filas de 2
- 2 filas de 9

Quem continua?

3) Estabelece a relação entre os pregos apanhados por um rectângulo e os pregos de fronteira. Relaciona isto à tabuada de Pitágoras.
4) Para pessoas mais crescidas: estabelecer a relação entre a área *A* de uma figura fechada por um elástico simples, os pregos *i* do interior e os pregos *f* da fronteira. Este resultado chama se o teorema de Pick e vem descrito no livro *O geoplano na sala de aula* além de muitas propostas de investigação (ver bibliografia).

Volumes e o canto de experiências.

Trabalhar os volumes a partir de situações reais, relacionados com os alunos, pode ser um pouco difícil no primeiro ciclo do ensino básico. Também não é de admirar que o programa só propõe um reconhecimento geral dos sólidos, de introduzir os conceitos de conteúdo e de volume. O texto *Uma história de baldes, água, arroz e areia* , embora relatando uma experiência do 5º ano e referido como texto de apoio, pode servir de base para uma discussão e algumas propostas.

1) No canto de experiências, começamos por coleccionar frascos de vidro grosso e embalagens irregulares em que é fácil verificar a diferença entre o

volume e capacidade, já que o conteúdo já foi retirado antes do frasco chegar às nossas mãos. Com material graduado, poderemos constatar esta diferença.

2) Numa 3ª classe, abordamos o seguinte problema (começado como proposta de trabalho numa ficha do canto de experiências que a mim me cheirava muito aos problemas dos agricultores dos Polderes, mas para a qual os meus alunos se entusiasmaram):

   O dono dum lagar tem de distribuir 8 l de azeite em duas partes à duas pessoas. Ele tem para isso:
   - 1 medida de 8 l cheia
   - 1 medida de 5 l vazia
   - 1 medida de 3 l vazia
   As medidas não têm graduação. Como é que ele resolve a divisão?
   Na discussão os alunos sugerem:
   - Ele põe mais um frasco
   - Ele põe graduações nos frascos
   - Ele junta 1 l aos 3
   - Ele dá 5 a um e 3 a outro
   - Ele compra uma garrafa dum litro
   Pista:
   Ele pode vazar e encher repetidamente.
   * É impossível. Não se pode tirar 4 do 8
   * Dos 3 l o que se pode tirar? Só há 3 frascos.
   * Podemos experimentar com frascos transparentes.
   Tentamos com frascos com marcas em 8, 5 e 3 dl. (Quem quiser, os outros fazem logo em papel)

3) Numa 4ª classe, coleccionamos embalagens de cartão tetra-pack dum litro, depois de conferir com o material m.a.b., que os cartões têm uma capacidade de 998 cm^3. Utilizamos estes cartões para encher um m^3 que construímos com tubos para fios eléctricos. Depois de 540 embalagens postas, conseguimos calcular que para encher precisávamos de 1002. Corrigindo os erros, aceitamos que 1.000

dm^3 correspondem a 1 m^3.

Como referimos no artigo acima citado, o canto de experiências é o lugar por excelência onde crianças podem interiorizar os conceitos de volume, capacidade e conteúdo.

3.4. Esquema cibernético de problemas

Michel Fustier, já vários vezes citado nestas folhas, apresenta um esquema interessante que representamos aqui:

Este esquema pode servir de base para a análise de múltiplas investigações na escola com os alunos.

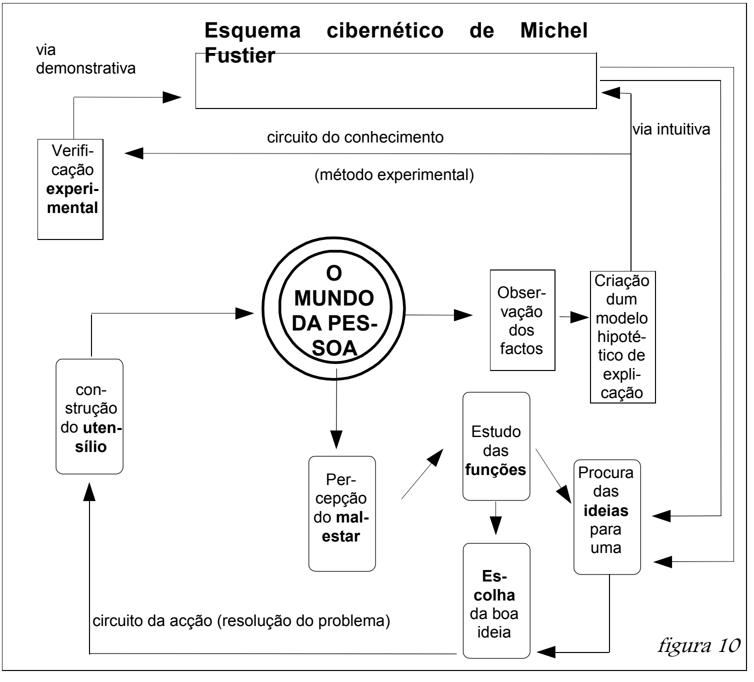


figura 10

4. Reviver a história da aritmética

*Não foi o homem que inventou o jogo,
mas é o jogo, e apenas o jogo, que torna
o homem completo*

F. Schiller - 1793

4.1. A história da aritmética da escola primária

Esta parte foi escrito depois da leitura de *História concisa das matemáticas,* livro do qual retirei alguns exemplos para esta introdução. Penso importante lembrar uma afirmação do autor, Dirk Struik, que é mais ou menos esta: o ensino da matemática tem a particularidade de deixar as crianças da escola básica com os conhecimentos da Grécia antiga, os finalistas da escola secundária algures no século 18, os finalistas da cadeira de matemática numa Universidade média, no início deste século. Só quem se especializa, alcança depois de anos de estudo, o nível de investigação actual da matemática.

Penso que é extremamente importante que sabemos e transmitimos esta ideia às crianças das nossas turmas. As disciplinas não acabaram num certo passado, para nunca mais evoluir. Estão sempre em mudança. Infelizmente, muitos manuais não ajudam para passar esta ideia, já que dão uma imagem extremamente estática da disciplina que pretendem enquadrar.

Mas há outra ideia pouca focada nas abordagens mais clássicas do apoio à aprendizagem. A mudança só se faz porque o conhecimento adquirido é constantemente reavaliado, conferido com novas descobertas, e, por mais que isto custa, é necessário, muitas vezes, adaptar-se a uma nova estrutura porque a anterior estava errada. Isto é tanto verdade nesta "ciência exacta" que é a matemática como num terreno muito mais escorregadio chamado "ciência humana", incluindo a pedagogia.

Parece-me importante termos algumas noções da história da matemática até para perceber como é maravilhoso que as crianças conseguem armazenar em poucos anos o saber colectivo de largos milhares de anos.

Desde que a humanidade quis quantificar e ordenar, agrupar bens e estabelecer relações entre quantias, ela precisou dum conjunto de nomes e símbolos para o poder fazer. Qualquer cultura - mesmo as culturas chamadas primitivas - consegue fazer estes agrupamentos. Encontramos em todas elas a indicação para a existência dum sistema de quantificação. As vezes os objectos contados são mais importantes do que a quantia, o que faz com que um conjunto tem o seu nome específico. Nas ilhas Fiji por exemplo podemos encontrar a palavra *bola* para determinar *dez barcos*, enquanto *koro* significará *dez cocos.* Em outras culturas, os nomes para determinar quantias ficam limitadas, utilizando o genérico *muito* para todas as quantias superiores. O que aparece rapidamente é a repetição de nomes para fazer combinações superiores. O povo Kamilaroi por exemplo utiliza as palavras *mal, bulan* e *guliba* para quantificar 1, 2 ou 3 objectos, passando depois para *bulan bulan, bulan guliba, guliba guliba* para distinguir 2 + 2, 2 + 3 e 3 + 3.

Estes sistemas, que aparecem mais tarde na história, são muitas vezes conseguidas utilizando o próprio corpo como referência. Assim encontramos numerações em base 5, 10 e 20, onde a indicação de valores superiores aos símbolos ou nomes para identificar o valor base, é composto pela repetição lógica dos valores anteriores em agrupamentos. Esta lógica é percebida pelas crianças. A nossa filha mais nova, aos 2 anos e meio contava *uma, quat, doi, te, cinc* repetindo sem fim estes nomes e identificando os valores, combinando uma definição a um conjunto de dedos, mostrando dois deles em resposta à pergunta "Quantos anos tens?" Aos 4 anos, faz séries que nunca mais acabam, experimentando os vinte e dez, trinta e dez e assim de seguida, cada vez que a ajudamos a passar para a próxima dezena. De certa forma as crianças passam pelos diferentes estádios de desenvolvimento da humanidade.

Os Celtas utilizaram um sistema de numeração em base 20. Os Anglo-saxónicos tinham provavelmente um sistema baseado em 10, tendo um nome numérico para cada dedo (como nós ainda temos), construindo relações a seguir: o inglês *eleven* é provavelmente derivado do termo *endleofan* significando *um que sobrou.*[8]

Os Egípcios baseavam-se num sistema decimal em que a passagem para uma unidade superior (de 1 para 10, de 10 para 100 ...) era marcado pela introdução dum sinal especial. Para poder proceder a um cálculo mais elaborado do que a simples soma de dois valores, recorriam à decomposições em que no fim se somava as partes. Multiplicar por 15 (1 + 2 + 4 + 8) é possível, multiplicando por 1, fazer de seguido duplicações sucessivas, somando por fim os resultados parciais obtidos desta forma. Uma multiplicação complicada torna-se possível fazendo as operações mentalmente, ou utilizando agrupamentos fáceis.
O sistema romano tem o mesmo princípio. I sendo a unidade base, X, C, e M identificam a passagem para uma posição mais elevada. Introduzem os símbolos V, L e D como apoio, repetindo-os com uma marca para números ainda mais elevados.

Os gregos optaram para um sistema decimal não posicional em que 27 letras (24 correntemente utilizados e 3 arcaicos) em 3 grupos de 9 (1-9, 10-90, 100-900) identificam sem ambiguidade todos os números até 999 com um máximo de 3 símbolos. É fácil estender o sistema. Não existe um valor de posição, pelo qual 11 pode ser definido por αι ou ια e 100 por ρ, utilizando neste exemplo o alfabeto grego moderno.

Da Mesopotâmia chega-nos uma posição de números repetidos em base sexagésimal. Tem o inconveniente de precisar de muitos símbolos (para identificar os primeiros 59 números naturais) mas a vantagem de escrever grandes valores com poucos símbolos. É depois necessário analisar o contexto para perceber qual é o valor representado: se representamos dois números por símbolos por nós conhecidos, 9 e 5 por exemplo, a junção dos dois (95) poderá significar 545 ($9 \times 60^1 + 5 \times 60^0$) ou 32405 ($9 \times 60^2 + 5 \times 60^0$), ou qualquer outro valor, conforme a ordem representada. Ficou nos deste sistema sexagésimal o relógio e os graus de arco.

Os Maias que utilizavam um sistema de posição de base 20, introduziram na representação dos números um símbolo para o 0, o que lhes permitia utilizar o mesmo símbolo para 20 e para as potências de 20.
Os Incas conheciam também este sistema nos quipos que utilizaram - fitas coloridas com nós - em que as cores representavam dentro dum determinado contexto os objectos contados e os nós em distâncias regulares os valores. O zero é representado por uma distância maior entre dois nós. Num

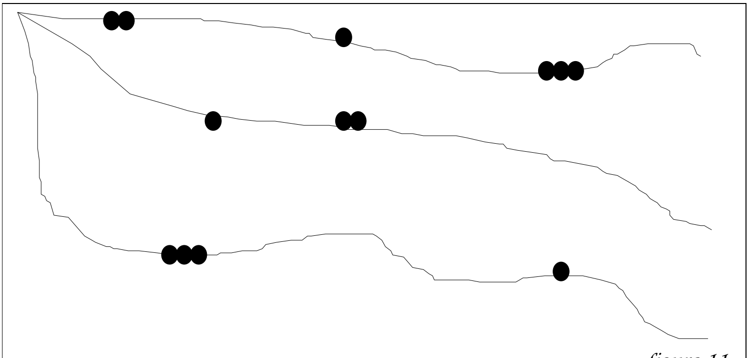


figura 11

sistema decimal teríamos assim de forma inequívoco:

o que, lendo em direcção do nó, nos dá sucessivamente 3102, 210 e 1030.

Só no século 12 é que chega também à Europa o zero, provavelmente como invenção Hindu, exportado pelos Mouros. Como os Maias, começam a representar não só os valores reais, mas também o nada, por um símbolo que os Árabes deram o nome de *cifra,* o que significa *vazio*, aqui, o vazio na respectiva linha do ábaco. As nossas palavras *cifrar*, *cifrão* e *cifra* são derivados desta palavra árabe.
Este símbolo abriu caminho para um sistema decimal generalizado com 9 símbolos para os 9 primeiros números naturais mais 1 para definir a ausência de número (os nossos 10

algarismos), permitindo a representação simples e inequívoca de qualquer valor. A civilização europeia tinha finalmente percebida o que outras civilizações já tinham achado muito antes: para facilitar as contas era preciso optar para um sistema posicional.

4.2. Material estruturante

Para reviver de certa forma esta história da nossa cultura matemática, existem vários materiais que podem servir de apoio. Os mais conhecidos são o material Cuisenaire, a Minicalculadora de Papy, o material m.a.b., o ábaco, o material de desperdício ou a calculadora multibásica para trabalhar bases.

O ábaco e a calculadora multibásica são materiais de apoio tão simples que qualquer criança rapidamente pode fazer contagens e executar operações simples apoiando-se nestes instrumentos. O reconhecimento de *amigos de 10*, conceito muito trabalhado na 1ª classe para apoiar o cálculo mental na estrutura da base decimal, pode ser trabalhado com este material, tal como com o...

...material Cuisenaire.

O texto de apoio 8 traz uma possível exploração do sistema decimal com material Cuisenaire. Trata-se duma série de exercícios feitos ao longo do curso "*Pensar Matemática*" e que podem ser adoptados às circunstâncias da turma com a qual se trabalha.

Não defendo este material mais do que qualquer outro. Mas como qualquer outro material bem aproveitado pode servir as crianças para construírem conceitos. Paul le Bohec relata experiências interessantes no seu livro *A matemática natural na instrução primária.*

Entretanto o material convidou o grupo em formação a investigar as decomposições possíveis dos números naturais: cada número n é decomposto em 2^{n-1} combinações.

Descobriu-se também a fórmula para calcular o número de réguas necessárias para pôr todos os tapetes dos 10 primeiros números, começando pelo tapete 1 que precisa duma única régua.

Fixou-se a grelha das multiplicações por substituição dos tapetes de réguas por uma representação simbólica.

Decompondo multiplicações (até 10 x 10), foram construídas torres de potências dos primeiros números primos 2,3,5 e 7, visualizando assim a expressão *elevado a* pela torre duma determinada base.

material Papy

O material Papy consiste numa série de placas ou de painéis, divididos em 4 espaços com as cores Cuisenaire correspondentes às 4 primeiras potências de 2. Nestes placas

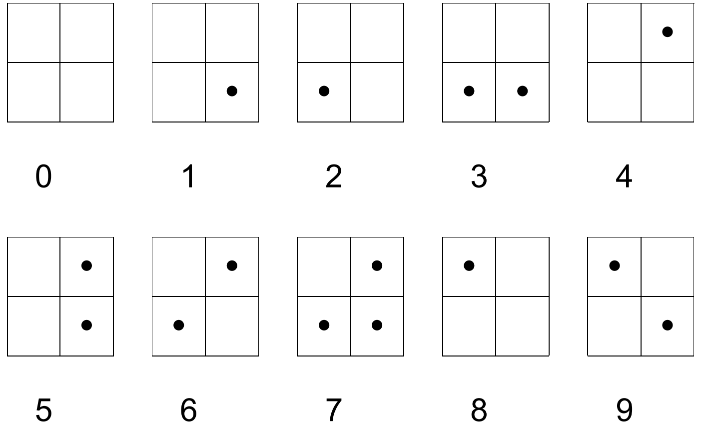


figura 12A

os números são representados de forma binário para cada ordem decimal. (fig 12A).

Pondo as placas uma ao lado da outra, expandimos o sistema como quisermos. Basta pôr a indicação por cima, como no exemplo *(fig 12B)*.

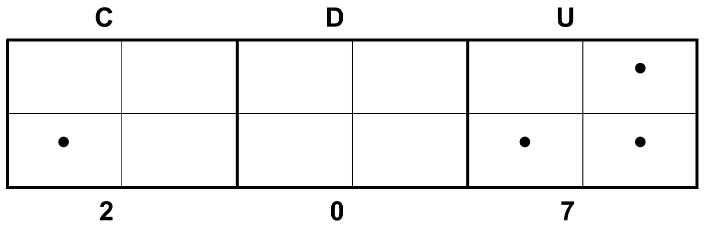


figura 12b

Há algumas regras para o trabalho nas placas.

Para a adição.

1) Colocar a representação de todos os números a adicionar.
2) Nunca podem ficar 2 marcas num quarto de painel.
3) 2 marcas num quarto, valem 1 marca no quarto a seguir.
4) Para manipular as marcas trabalha-se com as duas mãos, mencionando o que se faz: *2 marcas no 1 é 1 marca no 2 e sai uma marca.*
5) Nota-se o resultado obtido por baixo das placas (sempre um só algarismo) para podermos ler o resultado no fim.
6) O resultado é lido de várias maneiras: o número inteiro ou o a representação por placa.

Para multiplicar actua-se da mesma forma.

Para subtrair, faz-se operações inversas até ter o número para retirar, notando o número que fica, sendo ele o resultado.
Por baixo das placas podem assim aparecer os algoritmos da adição e da subtracção.

Toda a lógica é baseada no sistema binário, onde se escolha sempre entre duas situações: há 1 ou há 2 equivalente a 0 numa ordem superior.

material de desperdício e material m.a.b.

O material que temos sempre a mão, não só para estruturar a base decimal, como qualquer outra, é o material de desperdício. Tivemos pouco tempo durante o curso de expe-

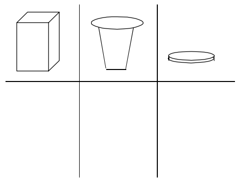


figura 13

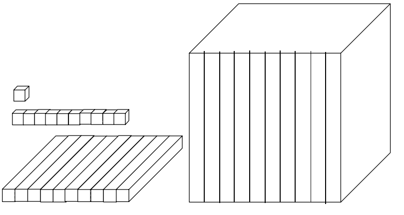


figura 14

rimentar este material no canto de experiências.
Consiste em fazer trocas duma ordem para outra, desde que atingido o valor da base. Trabalhamos com tampas, potes de iogurte e caixas de cartão por exemplo.
Na base quatro, uma caixa vale 4 potes de iogurte que valem cada um 4 tampas: A caixa é 4^2, o pote de iogurte equivale 4^1 e a tampa 4^0.
Na base 10, a caixa vale 10^2, o pote de iogurte 10^1 e a tampa 10^0.
Uma grelha como representada na *figura 13*, serve para as anotações.

O material M.A.B., apresenta as ordens das bases com cubos, barras e placas *(figura 14)*. Existem conjuntos para diferentes bases.

O cubo pequeno pode servir de unidade, pelo que o grande será b^3, em que b é a base na qual trabalhamos. Se utilizamos o cubo grande como unidade, o cubo pequeno será b^{-3}.

É fácil construir uma grelha que pode ser utilizada pelos alunos para estabelecerem relações entre diferentes ordens de grandeza, possibilitando-os a introduzir a unidade de trabalho lá onde quiserem. Com outras palavras, podem escolher a barra 10, como podem utilizar dl, kg, ou mm como unidade.

4.3. Jogar com operações

Com a tabuada

Durante toda a escola primária há imensas situações com as quais podemos brincar, para entrar no mundo da aritmética. A tabuada é concerteza um dos assuntos mais odiados. Isto não tem razão, a não ser que só é encarada como algo que se tem que aprender a recitar. Mas convêm recordar que a tabuada foi desenvolvida na antiga Grécia, para facilitar o cálculo de somas consecutivas. Não tem, na sua origem, nada a ver com o algoritmo de multiplicação. Os algoritmos só foram desenvolvidos no século XVII a partir do trabalho de Neper.

A tabuada foi analisada de várias formas, baseado sobre um trabalho feito numa 2ª fase. Retomo aqui uma parte do relato:

A tabuada em concurso

Durante o ano lectivo 90-91, combinei com a minha colega que tinha a 3ª classe, de trabalhar em conjunto em várias áreas. Um jogo, organizado durante o mês de Janeiro levou os alunos à proposta de retomar este tipo de "concursos". Este pedido levou-nos a organizar uma série de actividades a que chamamos *o concurso da tabuada.*

1. A organização

Semanalmente as duas turmas discutiram às segundas-feiras o plano de trabalho para a semana. Para poder incluir momentos colectivos entre as duas turmas, era necessário ver previamente a grelha. Assim, às quintas-feiras, os dois professores e 2 responsáveis do dia das duas turmas, juntaram-se para fazer uma proposta. A proposta era levada para as turmas no dia a seguir e aprovada (ou alterada) nas assembleias.

Para o concurso da tabuada as regras combinadas eram:

1) Formamos equipas de 2 elementos, ficando ao critério de cada um quem será o parceiro.
2) A pontuação é a seguinte:
   2 pontos para uma resposta certa
   1 ponto para uma resposta errada ou parcial
   0 pontos caso não haver resposta.
3) Depois de apurar o total de cada equipa, cada um dos parceiros leva a sua pontuação para a respectiva turma.
4) Depois de recolher os dados, os alunos da 4ª classe calculam a média obtida por ambas as turmas.

Ao longo do concurso, os alunos alteraram algumas estratégias, muitas vezes após discussão.

- Descobriram que era mais interessante para a média do grupo, fazer pares entre parceiros com níveis diferentes;
- Descobriram também que quanto mais misturaram parceiros das duas turmas, os valores médios entre ambas as turmas se aproximavam.

2. O conteúdo

Temos durante todo o tempo em que fizemos o concurso sempre utilizado o termo *tabuada*, tanto quando nos referimos a uma série de multiplicações, como quando nos referimos à grelha de duas entradas tendo os números de 1 até 10 nos dois eixos, preenchida pelos produtos destes mesmos números.

Nas perguntas, optamos pelo termo *tabuada* quando nos referimos a *uma só série de multiplicações*, e *grelha* quando nos referimos a *todas as séries de multiplicações* por números de 1 até 10.
Partindo do princípio que a percepção da grelha facilita a multiplicação e a divisão ainda consideramos que esta

mesma percepção não se alcance pelo mero decorar das tabuadas.
Com os exercícios que propomos aos alunos tentámos que eles conseguiam ver a grelha *(figura 15)* como um conjunto de valores. Ela apresenta:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	25	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

figura 15

- uma série de colunas e linhas de valores base, multiplicados pelos números de 1 até 10 (a interpretação 'clássica' na escola primária)
- vários grupos de números de classe de resto 0 depois de dividir por números de 1 até 10
- um sistema lógico em que os algarismos na posição de valor correspondente às unidades obedecem a sequências repetidas *(figura 16).*

simetria a partir dos quadrados per-

0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	**0**	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	**0**	0	1	2	3	4	5	6
2	1	0	**0**	0	1	2	3	4	5
3	2	1	0	**0**	0	1	2	3	4
4	3	2	1	0	**0**	0	1	2	3
5	4	3	2	1	0	**0**	0	1	2
6	5	4	3	2	1	0	**0**	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0	**0**	1
8	7	6	5	4	3	2	1	0	**0**

as sequências dos algarismos de

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	4	6	8	0	2	4	6	8	0
3	6	9	2	5	8	1	4	7	0
4	8	2	6	0	4	8	2	6	0
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0
6	2	8	4	0	6	2	8	4	0
7	4	1	8	5	2	9	6	3	0
8	6	4	2	0	8	6	4	2	0
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

figura 16

- um eixo diagonal de simetria. *(figura 16)*

O eixo diagonal central obedece obviamente à série dos quadrados perfeitos, que pudemos explorar com o geoplano, com pedrinhas ou tampas e visualizar com o material Cuisenaire. São os números 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2. Os eixos laterais terão como descrição $1^2 + 1, n^2 + n, ..., 9^2 + 9$

Os eixos perpendiculares sobre o eixo de simetria, tem séries de números aos quais se subtrai um número par ou impar cada vez maior.

com a máquina calculadora

Além de poder utilizar a máquina calculadora como meio auxiliar, podemos também utilizá-la para fazer investigações sobre os números e a numeração. Durante o curso explorou-se umas propostas de *Viva a matemática* além de muitas outras com pequenas máquinas simples, com o teclado clássico (*figura 17*) e uma tecla para percentagens. Passamos as aqui em revista:

- Tirar dum número tipo GpGpGp outro número para ficar com pGpGpG. Descobriu-se o papel do 9 nesta

figura 17

inversão.

- Exploramos o teclado: um par de algarismos - o par invertido, na horizontal e na vertical. Fizemos isso também com ternos.
- Dividir um número por outro seguido da tecla "=". A mesma operação mas com a tecla "%" em vez de "=".
- Fazer operações do género $100 + n =$ e $100 + n\,\%$ e registar o que acontece. Repetir com outros números.
- Introduzir um constante, teclando repetidamente + ou x. Registar o que acontece com o resultado.
- Dividir um número por um divisor. Introduzir uma vírgula dentro dum dos números ou introduzir 0 significativos antes ou depois dum dos números. Anotar as observações.

Estes são só alguns exemplos.

O trabalho com a calculadora promete se desenvolver rapidamente. O João Pedro Ponte escreve num editorial da revista Educação e Matemática [9] o seguinte comentário: "*O* *uso das calculadoras não anuncia o fim do cálculo, mas implica que o cálculo seja encarado de uma outra maneira. Estimula novas formas de trabalhar, favorecendo uma atitude mais prática e experimental na matemática.*"

com conceitos básicos

Penso que será sempre preciso ter algum cuidado na forma como utilizamos jogos na escola. Não são meios para embelezar a cátedra, sem a fazer desaparecer. Isto é, o jogo, se recorremos a ele, tem que ser útil para as crianças, não para o professor. O texto de apoio 6 apresenta uma série de possibilidades para explorar conceitos básicos com crianças numa fase muito inicial quando nos chegam à primeira classe. Exploraram-se vários destes jogos durante o curso: As naves espaciais, o cão e o coelho, o monstro das bolachas.

Outros podem ser útil para enriquecer o canto de experiências , como a *corrida de obstáculos* para introduzir uma noção real de números positivos e negativos. Este conceito pode também ser trabalhado já no 1º ciclo através do lo-

	0	1	2	3	4	5	6
0	00	01	02	03	04	05	06
1	10	11	12	13	14	15	16
2	20	21	22	23	24	25	26
3	30	31	32	33	34	35	36
4	40	41	42	43	44	45	46
5	50	51	52	53	54	55	56
6	60	61	62	63	64	65	66

figura 18

gowriter para quem esteve ligado ao projecto Minerva, ou ou através do winlogo ou do hyperlogo (Cnotinfor).

Com os dados, lançámo-nos na investigação, procurando quais são os números que saem mais vezes, lançando 1, 2 ou

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109

figura 19

3 dados ao mesmo tempo. Depois de fazer estimativas, e muito lançamentos, constatamos a diferença entre trabalhar com 1 dado ou com mais dados.

Com os dominós descobrimos a simetria duma tabela de duas entradas *(figura 18)*, discutindo o número de peças dum jogo completo. Na tabela apareceram 49 combinações e não temos nem 49, nem obviamente a metade de 49 peças...

Na primeira classe, pode se trabalhar *a casa dos números*, descobrindo para cada um dos 109 primeiros números o seu lugar *(fig. 19)*. Ajuda, depois, para descobrir as lógicas nas colunas e as lógicas nas linhas. Podemos também descobrir os padrões que crescem quando contamos de 2 em 2, de 3 em 3, de 4 em 4 etc.

Investigamos seriações com as matrículas dos carros portugueses e belgas, procurou-se saber se temos mais possibilidades de ganhar no totoloto ou na lotaria, e fez-se uma excursão ao mundo dos conjuntos infinitos:

$N = \{0,1,2,3,...,n,...\}$; $P = \{0,2,4,6,...,p,...\}$; $I = \{1,3,5,7,...,i,...\}$

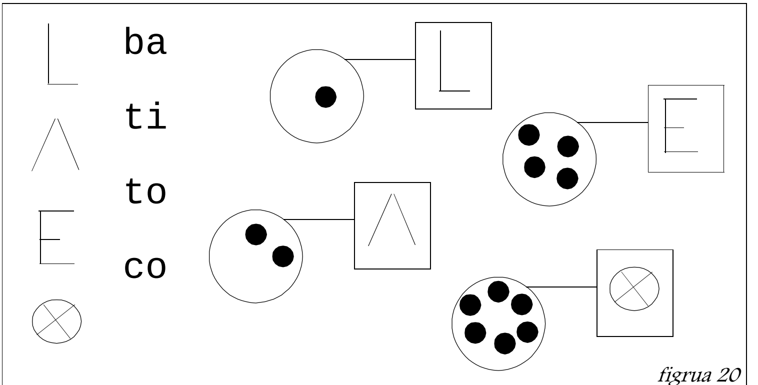
$C = \{(0,0),(0,1),(0,2),...,(1,0),(1,1),(1,2),...,(2,0),(2,1),(2,2),...,(c_1,c_2)...\}$

A pergunta é simples. Será que todos estes conjuntos tem o mesmo número de elementos?

Trabalhamos, piscando um olho a Cantor[(10).]

Cada uma destas propostas podem se tornar verdadeiras investigações sobre aspectos da matemática. Para concluir este capítulo, retomamos a linguagem simbólica, para depois acabar com um pequeno trabalho de 3ª classe que se quis construir um jogo para o canto da língua.

4.4. Jogos de investigação



figrua 20

inventar simbologia

Como referido na introdução deste capítulo, os números e as contagens não nos chegaram tudo preparado. Foram ao longo dos tempos, e em cada cultura de forma diferente, influenciados por necessidades das pessoas. Crianças fazem também estas invenções, como se estivessem a recriar de certa forma algumas das situações do passado. Na sala procuram estabelecer uma relação entre contagens e símbolos. Quando apanhamos uma situação destas, podemos construir um código secreto, só válido em grupo restrito. Nomeamos os símbolos de base e fazemos derivados (*figura 20*). Isto pode ser uma base de trabalho para investigar um pouco a nossa própria base decimal:

⇒ Quantos símbolos utilizamos na nossa base?

⇒ Quantos nomes temos ao todo? Quantos nomes são derivados dum outro?

Até as pessoas adultas ficaram surpreendidos que utilizamos tão pouca palavras diferentes para identificar milhões de milhares de valores.

Mas abrem-se outros caminhos de investigação: numa

	A	L	A	I	N
B	C	N	C	K	P
I	J	U	J	R	W
H	I	T	I	Q	V
E	F	Q	F	N	S
L	M	X	M	U	Z

	S	E	R	G	E
D	W	I	V	K	I
U	L	Z	N	B	Z
B	U	G	T	I	G
Y	K	D	J	E	D

figura 21

turma com crianças de 11-12 anos, resolvemos um ano fazer todas as contas da cooperativa da turma numa base 16 que inventámos especialmente para o efeito.

A partir duma proposta duma criança que estabelece correspondência entre as letras do alfabeto e os números, abrem se discussões como escrever 27 (Z $\Rightarrow$ 26), 28, 29, ... 53. Podemos construir tabelas de 2 entradas a partir daí *(fig. 21)*.

o jogo do scrabble

(dum relatório)

Um outro exemplo duma investigação que recorre a conceitos matemáticos, é o que nos aconteceu o dia que propus aos alunos de construir um *scrabble* em português, para trabalhar o vocabulário e a ortografia no atelier de língua. O tabuleiro estava pronto mas faltavam as letras. Perguntei como podíamos fazer para termos 100 letras ao total.
O Paulo pergunta quantas letras há no alfabeto. Logo propõe, como são mais ou menos 25, 4 de cada letra para o jogo: 4 x 25 da 100. O Rui sinte que não deve ser tão fácil. Após discussão constatamos que utilizamos mais a's que x's, para ficar só com este exemplo. O David propõe contar letras. Pegamos num paragrafo do livro que estou a ler para a turma.

Numa grande cidade onde as ruas eram tão compridas que parecia não terem fim e os prédios tão altos que as antenas da televisão nos telhados quase tocavam nas nuvens e onde automóveis, camionetas, autocarros, motas e bicicletas corriam em longas, longas filas, e onde as pessoas formigavam apressadamente para cá e para lá, vivia num bairro pobre, num sexto andar, porta 5, o pequeno Miguel com a mãe.
A mãe passava oito horas por dia numa fábrica de gabardinas a pregar botões.
Nessas horas, Miguel ficava sozinho em casa ou descia a rua para tomar parte nas brincadeiras dos meninos. Mas como era franzino e se cansava depressa, sentava se então na borda do passeio a desenhar, com um pedacito de giz, figuras sobre o pavimento. Ansiava por um amigo que com gostasse de conversar, de contar histórias e de escutar histórias e também não quisesse andar todo o

tempo em corridas, a soltar gritos e a dar tiros com pistolas de plástico. Mas como ninguém se mostrasse disposto a juntar-se-lhe, ele regressava ao seu andarzinho, sentava-se à janela e olhava para numerosas janelas do prédio em frente.

Dividimos as letras entre 6 grupos. Cada grupo procura a sua estratégia para contar as letras que lhes foram administradas.

Aparece então no quadro:

a: 127	e: 91	i: 50	o: 82	u: 20	d: 27
b: 10	c: 14	f: 7	h: 10	g: 16	n: 29
j: 1	l: 14	m: 36	p: 24	q: 6	r: 46
s: 48	t: 36	x: 1	ç: 0	z: 2	v: 14

Estimamos o total: A maioria aponta para entre 400 e 600 letras. Após contagem verificamos que a final o texto tem 711 letras.
Discutimos: Já sabemos que neste texto de 711 letras temos 127 a's, 91 e's, 50 i's, etc. Como é que vamos reduzir isto

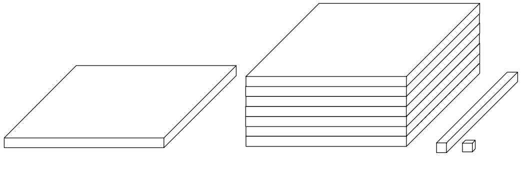


figura 22

para 100 letras. Um dos alunos propõe tirar letras: de 711 para 100, tiramos 611. Fazemos a mesma coisa para as letras uma a uma. Estamos no bom caminho. Só que a subtracção só dá números negativos. Fazemos uma representação com o material M.A.B. *(figura 22)*. Constatamos que num monte temos pouco mais de 7 vezes do que temos no outro. Com outras palavras: temos que ter 7 x menos letras que no texto. De repente, uma aluna diz que temos que dividir por 7.

Encontram-se ainda outras maneiras: ver quantos grupinhos de 7 conseguimos fazer para cada letra.

Os seis grupos voltam ao trabalho. Reduzindo, discutindo e reavaliando, chegamos ao seguinte acordo: a 19, b 1, j 1, s 6, e 13, c 2, l 2, t 5, i 7, f 1, m 1, x 1, o 11, h 1, p 3, ç 1, u 3, g 3, q 1, z 1, d 4, n 4, r 7, v 2.

Conseguimos construir o jogo pretendido.

Tivemos que recorrer a vários materiais de apoio para o fazer.

A seguir pegaremos em outras investigações e em outros projectos:

* o compromisso com os correspondentes,
* com a faculdade de ciências, experimentar o material lego-logo,
* com a cooperativa,
* com os colegas para organizar a festa do Magusto,
* sem nos esquecer de
  todos os projectos que queremos começar e que muitas vezes precisam de trabalho prévio de matemática para podermos trabalhar dados de recolhas de informação e de pequenos inquéritos.

E, da mesma forma como as investigações não paravam de surgir nesta 4ª classe, aqui também, só se pode deixar uma proposta: Ao trabalho!

Notas

1. (página 16) Esta balança foi apresentada como elemento de sistematização num seminário sobre avaliação dirigido por Patrice Lorrot, ARIANE, promovido pela cooperativa SEIES.

2. (página 18) Jean-Marie Barbier, *Elaboration de projets d'action et planification*, P.U.F. 1991. JM Barbier trabalhou para o Institut National pour la Formation des Adultes e exercita no Conservatoire national des Arts et Métiers as funções de professor e de director do Centre de Recherche sur la Formation.

3. (página 34) Sobretudo a obra de Oury e Vasquez, *Da classe cooperativa a pedagogia institucional*, mas também as publicações do Movimento da Escola Moderna, Rua do Açucar 22 a, Lisboa

4. (página 37) Ver *infra*, página 74

5. (página 41) O espaço cultural intermédio, um conceito que me foi lembrado, numa formação de formadores numa análise de práticas das pessoas participantes.

6. (página 48) Ver *infra*, página 82

7. (página 57) Exercício publicado no livro *Jogos pedagógicos*, da equipa de formadores da SEIES, na colecção "Formar Pedagogicamente", IEFP, Centro Nacional de Formação de Formadores.

8. (página 66-67) Isaac Asimov, Exploring the earth and the Cosmos, 1982

9. página 77) João Pedro Ponte in *Educação e Matemática*, nº 11, 3º trimestro de 1989, Associação de Professores de Matemática

10. (página 80) Miguel de Guzmán dedica um capítulo ao trabalho de Cantor num livro de fácil acesso, *Aventuras Matemáticas*.

Bibliografia

Abrogio G. Manno, A filosofia da matemática, Edições 70

Dirk Struik, História Concisa das matemáticas, Gradiva 1989Manfred Eigen, O jogo, Gradiva 1989

Fernando Nunes, Pascal Paulus, O Lego-logo e a construcção de conceitos matemáticos, Actas da semana LOGO 1991, Bragança

Lurdes Serrazina, José Manuel Matos, O geoplano na sala de aulas, APM, 1988

Margarida Faria, Pascal Paulus, O computador na sala, Análise psicológica, ISPA

Miguel de Guzmán, Aventuras matemáticas, Gradiva, 1990

Miguel de Guzmán, Contos com contas, Gradiva, 1991

Michel Fustier, La resolution de problèmes, Editions ESF, Paris 1989

Nigel Langdon, Charles Snape, Viva a matemática, Gradiva junior, 1993

Omer Mogensen, Tot waar door, de Sikkel, 1979

Pascal Paulus, Medir Volumes e Capacidades, Escola Moderna, II/2/2

Paul Le Bohec, A matemática natural na instrução primária, Estampa, 1978

Pierre Berloquin, 100 jogos lógicos, Gradiva, 1991

Rudy Rucker, A quarta dimensão, Gradiva, 1991

Volker Hole, Como ensinar matemática, Livros Horizonte, 1980

Textos de apoio

Os textos de apoio numerados e referidos neste documento foram distribuidos durante a formação "*Pensar Matemática*". A minha vontade era Inclui-los aqui, para poderem servir como material de reflexão. Fica para já mencionado onde podem ser encontrados, sabendo que todos os textos estão disponíveis no Instituto Irene Lisboa, Rua das Gaivotas 6, Lisboa

1. Miguel de Guzmán, Notas da introdução às *Aventuras Matemáticas,* pp 22 e 23, ver bibliografia

2. Fernand Oury, *O regimento de caixotes do lixo*, "Da classe cooperativa a pedagogia institucional, pp 72 à 79, ver bibliografia

3. Fernando Nunes, Pascal Paulus, O lego-logo e a construcção de conceitos matemáticos, Actas Semana Logo Bragança, Projecto Minerva

4. Pascal Paulus, Uma história de baldes, água, arroz e areia, ver Bibliografia

5. Pascal Paulus, Explorar o material Cuisenaire, Inst. Irene Lisboa

6. Construcción juegos didáticos, Centro de Recursos Voz do Operário, Inst. Irene Lisboa

7. Introdução ao programa de matemática 1º ciclo, DGEBS, 1991

8. Exercício "Ganhar tempo", ver bibliografia

9. Grelha de transformação, Instituto Irene Lisboa.