

Velocidades de fase, grupo y señal.

Propagación de ondas electromagnéticas en medios materiales dispersivos.

Parte 3.

Bloque 2. Ondas electromagnéticas en medios materiales.

Autor: Alfredo Ballesteros Ainsa

Asignatura: Electrodinámica de Medios Continuos

5° de Física,

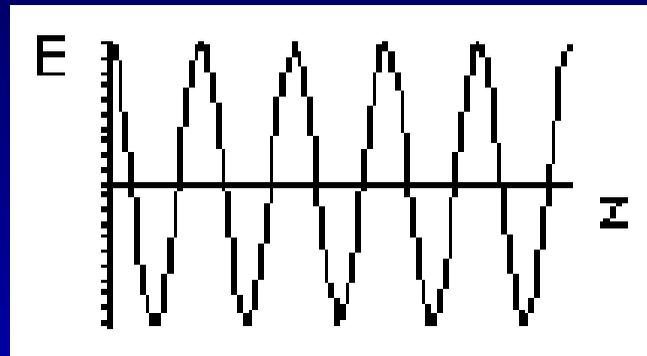
Facultad de Física.

Universidad de Sevilla.

La onda plana monocromática.

La **velocidad de fase** de una onda plana de longitud de onda constante, λ_0 , monocromática, frecuencia ω_0 constante y que se propaga en la dirección OZ, es aquella a la que se desplazan sus planos de fase constante:

$$v_{ph} = \frac{dz}{dt}$$



El pulso.

Las ondas reales

- tienen una duración temporal limitada.
- proceden de fuentes no monocromáticas.

El **pulso** es un modelo más aproximado a la realidad.

Matemáticamente se describe como superposición de ondas planas

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) \exp(j(kz - \omega t))$$
$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz u(z, 0) \exp(jkz)$$

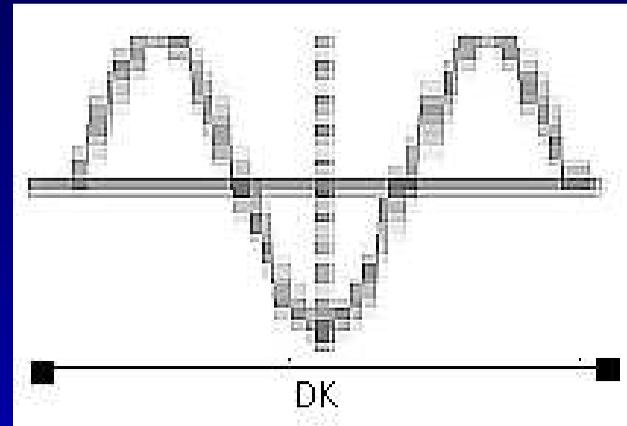
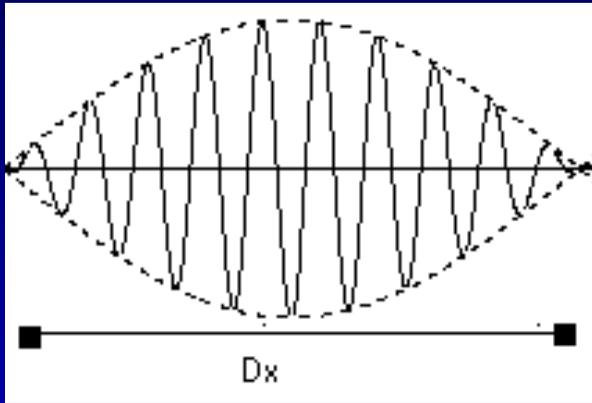
La onda plana monocromática anterior se recupera como caso particular

$$A(k) = \sqrt{2\pi} \delta(k - k_0)$$

El paquete de ondas.

El **paquete o grupo de ondas** se construye por superposición de ondas con k muy próximos:

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk A(k) \exp(j(kz - \omega t))$$



Evolución temporal de un paquete de ondas.

Se estudiará la propagación a través de un medio dispersivo, $\omega = \omega(k)$ de un paquete de ondas sin considerar atenuación por efectos disipativos. Las componentes tienen k muy próximos a un k_0 y en primer orden:

Evolución temporal de un paquete de ondas.

Se estudiará la propagación a través de un medio dispersivo, $\omega = \omega(k)$ de un paquete de ondas sin considerar atenuación por efectos disipativos. Las componentes tienen k muy próximos a un k_0 y en primer orden:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 + \dots$$

Evolución temporal de un paquete de ondas.

Se estudiará la propagación a través de un medio dispersivo, $\omega = \omega(k)$ de un paquete de ondas sin considerar atenuación por efectos disipativos. Las componentes tienen k muy próximos a un k_0 y en primer orden:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 + \dots$$

$$u(z, t) = \exp \left(j \left(k_0 \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 - \omega_0 \right) t \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) \exp \left(jk \left(z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right) \right)$$

Evolución temporal de un paquete de ondas.

Se estudiará la propagación a través de un medio dispersivo, $\omega = \omega(k)$ de un paquete de ondas sin considerar atenuación por efectos disipativos. Las componentes tienen k muy próximos a un k_0 y en primer orden:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 + \dots$$

$$u(z, t) = \underbrace{\exp \left(j \left(k_0 \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 - \omega_0 \right) t \right)}_{\text{fase global}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) \exp \left(jk \left(z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right) \right)$$

Evolución temporal de un paquete de ondas.

Se estudiará la propagación a través de un medio dispersivo, $\omega = \omega(k)$ de un paquete de ondas sin considerar atenuación por efectos disipativos. Las componentes tienen k muy próximos a un k_0 y en primer orden:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 + \dots$$

$$u(z, t) = \exp \left(j \left(k_0 \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 - \omega_0 \right) t \right) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) \exp \left(jk \left(z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right) \right)}_{u \left(x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t, 0 \right)}$$

Evolución temporal de un paquete de ondas.

Se estudiará la propagación a través de un medio dispersivo, $\omega = \omega(k)$ de un paquete de ondas sin considerar atenuación por efectos disipativos. Las componentes tienen k muy próximos a un k_0 y en primer orden:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 + \dots$$

$$u(z, t) = \exp \left(j \left(k_0 \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 - \omega_0 \right) t \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) \exp \left(jk \left(z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right) \right)$$

El paquete viaja sin distorsión a la **velocidad de grupo**

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0$$

Si asociado a la propagación de la onda hay un transporte de energía, este se realiza a la velocidad de grupo.

Dispersión normal y anómala.

Partiendo de la relación de dispersión para la luz:

$$\omega(k) = c \frac{k}{n(k)}$$

con c la velocidad de la luz en el vacío, se obtiene la expresión para la velocidad de fase:

$$v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)}$$

- $v_{ph} < c$ siempre que $n(k) > 1$

y la velocidad de grupo:

$$v_g = \left(\frac{d\omega(k)}{dk} \right)_0 = \frac{c}{\left(n(k) + \omega \left(\frac{dn}{d\omega} \right) \right)}$$

La paradoja de la dispersión anómala.

- Para **dispersión normal**, $\left(\frac{dn}{d\omega}\right) > 0$ y $n > 1$
La velocidad de grupo $v_g < v_{ph} < c$
La energía se transporta a velocidad menor que la de fase y c .
- Para **dispersión anómala** $\left(\frac{dn}{d\omega}\right) < 0$ y grande
puede ser la velocidad de grupo $v_g > c$.

Según lo anterior, si la energía se transporta a la velocidad v_g , en dispersión anómala, se puede tener $v_g > c$, y una contradicción con el **principio de la relatividad especial**.

No es así:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 \quad (5)$$

es una aproximación incorrecta en dispersión anómala.

En esa zona $\frac{d\omega}{dk} \gg$

La velocidad de señal.

Un tren de ondas $u_i(z, t)$ con un frente bien definido incide normalmente desde el vacío sobre un medio de índice de refracción $n(\omega)$

La amplitud para $z > 0$ es:

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{2}{1 + n(\omega)} A(\omega) \exp(j(k(\omega)z - \omega t))$$
$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz u_i(z = 0^-, t) \exp(j\omega t)$$

En $t = 0$ alcanza la interfase, $z = 0$, por causalidad $u_i(0, t) = 0 \forall t < 0$

- Para $\Im\omega > 0$, $A(\omega)$ es analítica.
- Para $\Im\omega < 0$, la forma de u_i determina las singularidades de $A(\omega)$

La velocidad de señal.

En el modelo de dieléctrico de Lorentz, $n^2(\omega) = \epsilon_r(\omega)$

$$n^2 = 1 + \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\gamma\omega} \right)$$

Ceros	$\omega_a = \omega_1 - j\frac{\gamma}{2}$	$\omega_b = -\omega_1 - j\frac{\gamma}{2}$
Polos	$\omega_c = \omega_2 - j\frac{\gamma}{2}$	$\omega_d = -\omega_2 - j\frac{\gamma}{2}$

donde

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \omega_p^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

y el índice de refracción:

$$n = \left(\frac{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)}{(\omega - \omega_c)(\omega - \omega_d)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Se elige la rama de forma que $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} n(\omega) = 1$

La velocidad de señal.

Dado que $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} n(\omega) = 1$ y está acotado

$$u(z, t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega A(\omega) \exp(j(\frac{\omega}{c}(z - ct)))$$

se puede integrar pasando al plano \mathbf{C}

- Para $z > ct$ se cierra el contorno en el semiplano $\Im\omega > 0$
 $n(\omega)$ y $A(\omega)$ son analíticas y $u(z, t) = 0$
- Para $z < ct$ se cierra el contorno en el semiplano $\Im\omega < 0$

$u(z, t) = 0$ si $z > ct$, la velocidad de señal no puede superar la de la luz en el vacío c

La velocidad de señal.

Si se aplica el **método de la fase estacionaria** a:

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{2}{1 + n(\omega)} A(\omega) \exp(j(k(\omega)z - \omega t))$$
$$\phi(\omega) = k(\omega)z - \omega t$$

En los puntos de fase estacionaria $\omega = \omega_s$:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_{\omega = \omega_s} = 0$$
$$c \frac{dk}{d\omega} = c \frac{t}{x}$$

se puede hacer una discusión cualitativa obteniendo los puntos de corte.

Los precursores de la señal.

Para el modelo de Lorenz sin amortiguación, $\gamma = 0$,

- v_g es imaginaria si $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$
- $v_g < c$ para los demás valores de ω

Se fija un punto $x = x_0$ y se estudia la evolución de la señal en t .

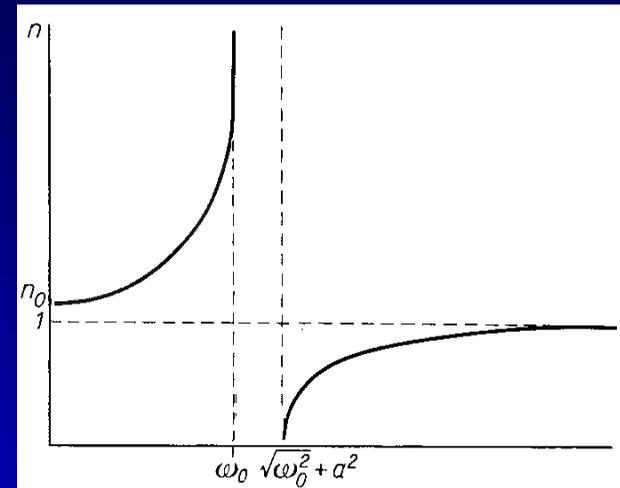
Los precursores de la señal.

Para el modelo de Lorenz sin amortiguación, $\gamma = 0$,

- v_g es imaginaria si $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$
- $v_g < c$ para los demás valores de ω

Se fija un punto $x = x_0$ y se estudia la evolución de la señal en t.

Gráfica de $\frac{c}{v_p h}$ frente ω



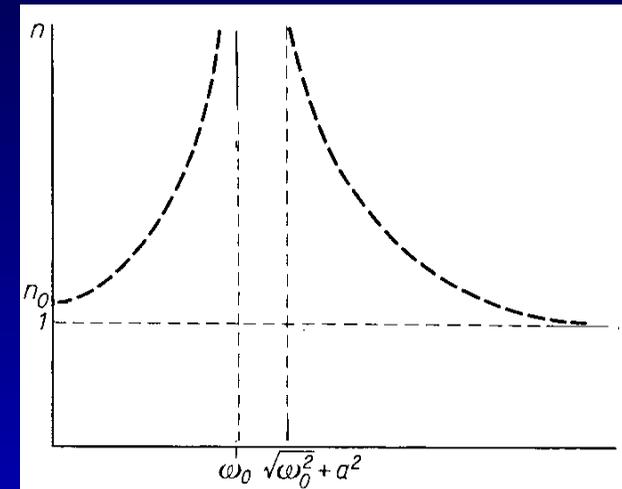
Los precursores de la señal.

Para el modelo de Lorenz sin amortiguación, $\gamma = 0$,

- v_g es imaginaria si $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$
- $v_g < c$ para los demás valores de ω

Se fija un punto $x = x_0$ y se estudia la evolución de la señal en t.

Gráfica de $\frac{c}{v_g}$ frente ω



Los precursores de la señal.

Para el modelo de Lorenz sin amortiguación, $\gamma = 0$,

- v_g es imaginaria si $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$
- $v_g < c$ para los demás valores de ω

Se fija un punto $x = x_0$ y se estudia la evolución de la señal en t .

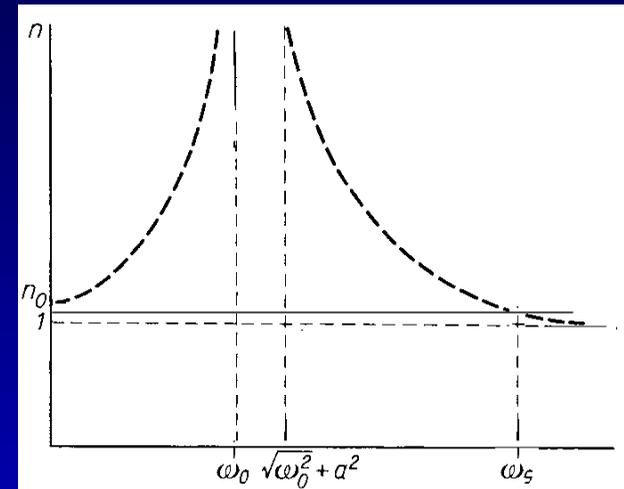
Primer precursor de la señal o de Sommerfeld.

Punto de fase estacionaria cumple

$$\left(c \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_s} = c \frac{t}{x}$$

- Pequeña amplitud.
- Alta frecuencia.

ω_s disminuye según pasa el tiempo



Los precursores de la señal.

Para el modelo de Lorenz sin amortiguación, $\gamma = 0$,

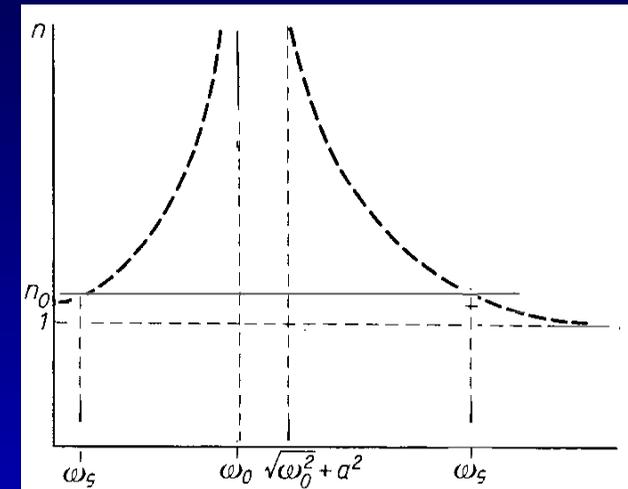
- v_g es imaginaria si $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$
- $v_g < c$ para los demás valores de ω

Se fija un punto $x = x_0$ y se estudia la evolución de la señal en t .

Segundo precursor de la señal o de Brillouin.

Para instante posterior t_1 hay 2 puntos de fase estacionaria, de los cuales $\omega_s = 0$ es la principal contribución

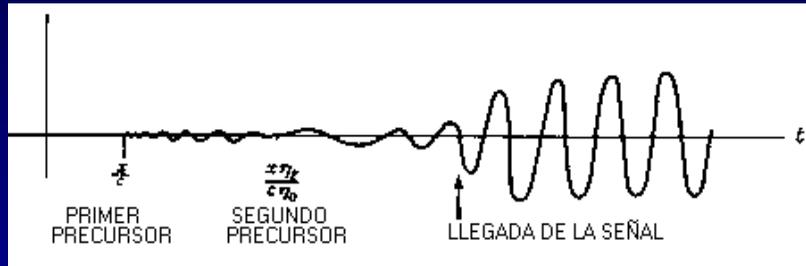
- Mayor amplitud y $\phi''(s) = 0$
- Periodo más grande.



Los precursores de la señal.

Tras la llegada del segundo precursor la señal evoluciona hacia el estacionario.
Como velocidad de la señal se puede elegir:

- La velocidad de los primeros precursores que es c
- La velocidad de grupo v_g del tono fundamental de la señal incidente.



Referencias.

- Wild, H.
“Mathematical methods for Physics”.
- Jackson, J.D.
“Classical Electrodynamics”.
- Stratton, J.A.
“Electromagnetic Theory”.
- Born, M. Wolf, E.
“Principles of Optics”.