

# Causalidad y relaciones de Kramers-Kronig.

*Propagación de ondas electromagnéticas en medios materiales dispersivos.  
Parte 2.*

*Bloque 2. Ondas electromagnéticas en medios materiales.*

Autor: Alfredo Ballesteros Ainsa

Asignatura: Electrodinámica de Medios Contínuos

5° de Física,

Facultad de Física.

Universidad de Sevilla.

# Funciones respuesta de un sistema físico lineal.

En sistemas lineales, la respuesta  $r(t)$  a una serie de estímulos  $s(\tau)$ , cumple el **principio de superposición**.

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h(t; \tau) s(\tau)$$

Si la entrada es un impulso  $\delta(\tau - \tau_0)$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h(t; \tau) \delta(\tau - \tau_0) = h(t; \tau_0)$$

$h(t; \tau)$  se llama **función impulso-respuesta o de Green**

En sistemas invariantes en traslaciones,  $h(t; \tau) = h(t - \tau)$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h(t - \tau) s(\tau)$$

que es un **producto de convolución**.

# Funciones respuesta de un sistema físico lineal.

Para un estímulo armónico monocromático,  $s(t) = \mathcal{S}(\omega) \exp(-j\omega t)$

$$\mathcal{R}(\omega) = \mathcal{H}(\omega)\mathcal{S}(\omega)$$

Y  $\mathcal{H}(\omega)$  se llama **función de transferencia**.

La **función de transferencia** es la transformada de Fourier de la de **impulso-respuesta**.

En los sistemas lineales de distintas frecuencias no interfieren entre sí.

$r(t)$  y  $s(t)$  están relacionadas por una E.D.O. lineal de coeficientes constantes:

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n}{dt^n} r(t) = s(t)$$

Si  $s(t)$  es real, estímulo real,  $r(t)$  debe ser real, lo que implica

- $\bar{\mathcal{H}}(\bar{\omega}) = \mathcal{H}(-\omega)$
- Los coeficientes de la E.D.O. cumplen:
  - para  $n$  par  $a_n$  es real
  - para  $n$  impar  $a_n$  es imaginario

# Funciones respuesta de un sistema físico lineal.

Se exigirá también al sistema para que modele un sistema físico:

- **Causalidad**  $\Delta r = 0$  y  $R = 0$  si  $t < t_0$
- La respuesta transitoria a un estímulo elemental  $\Delta s(t, t_0) = s(t_0)\Delta t$  siendo  $\Delta t \ll \tau$  y  $\tau$  el tiempo de relajación del sistema,  $\Delta r(t, t_0; s) = R(t, t_0)s(t_0)\Delta t + cte$  está **acotada**,  
 $|R(t, t_0)| < \infty$   
 $|\int_0^\infty dt t R(t)| < \infty$
- La respuesta estacionaria depende sólo del lapso de tiempo transcurrido desde que se aplico el estímulo  $R(t, t_0) = R(t - t_0)$

La función respuesta es continua y analítica.

## Integración en el plano complejo

$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega u(\omega) \exp(-j\omega t)$  donde  $\omega$  es una variable real,  
se puede obtener si  $\lim_{|\omega| \rightarrow 0} u(\omega) \exp(-j\omega t) \rightarrow 0$

considerando  $\omega$  como compleja, e integrando sobre un contorno en el plano  $\mathbf{C}$

# Integración en el plano complejo

$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega u(\omega) \exp(-j\omega t)$  donde  $\omega$  es una variable real,  
se puede obtener si  $\lim_{|\omega| \rightarrow 0} u(\omega) \exp(-j\omega t) \rightarrow 0$

considerando  $\omega$  como compleja, e integrando sobre un contorno en el plano  $\mathbf{C}$

Para  $t < 0$  se cierra el contorno por arriba

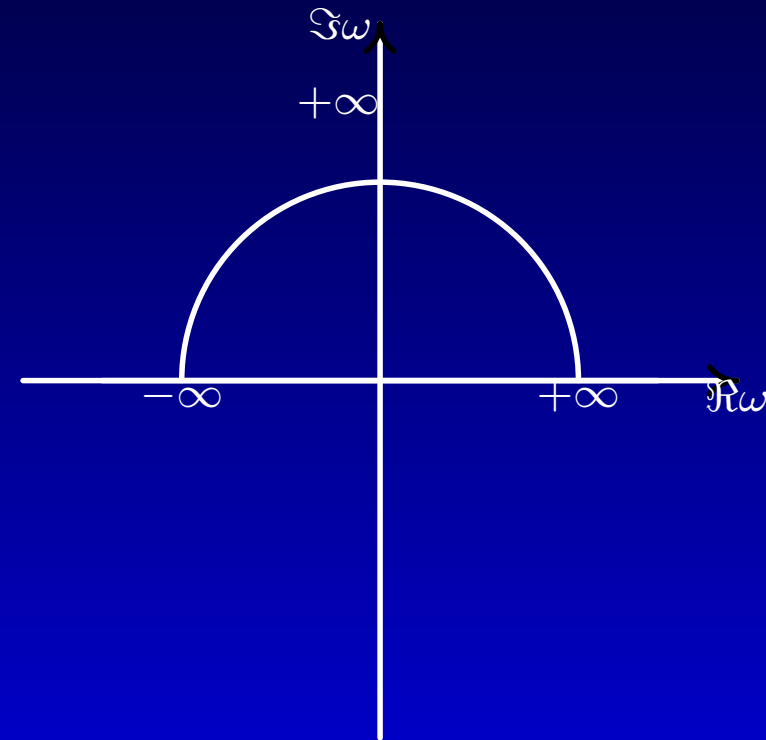
$\Im\omega > 0$

con una semicircunferencia  $\Gamma_1$

$$\oint d\omega u(\omega) \exp(-j\omega t) = 2\pi i \sum Res$$

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} d\omega u(\omega) \exp(-j\omega t) \rightarrow 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega u(\omega) \exp(-j\omega t) = 2\pi i \sum Res$$



# Integración en el plano complejo

$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega u(\omega) \exp(-j\omega t)$  donde  $\omega$  es una variable real,  
se puede obtener si  $\lim_{|\omega| \rightarrow 0} u(\omega) \exp(-j\omega t) \rightarrow 0$

considerando  $\omega$  como compleja, e integrando sobre un contorno en el plano  $\mathbf{C}$

Para  $t > 0$  se cierra el contorno por debajo

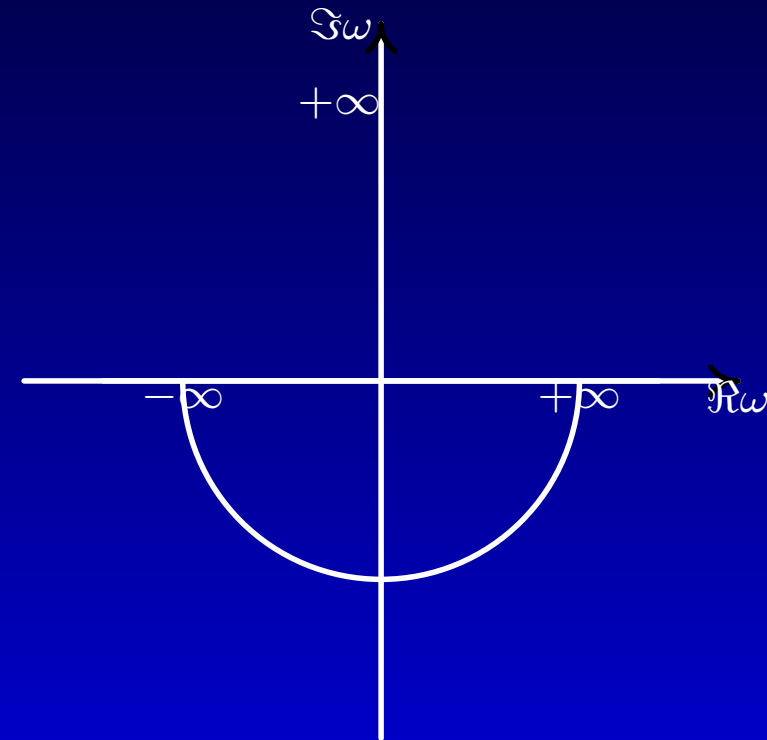
$$\Im\omega < 0$$

con una semicircunferencia  $\Gamma_2$

$$\oint d\omega u(\omega) \exp(-j\omega t) = -2\pi i \sum Res$$

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} d\omega u(\omega) \exp(-j\omega t) \rightarrow 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega u(\omega) \exp(-j\omega t) = -2\pi i \sum Res$$



# Integración en el plano complejo

Para  $\omega$  real,  $F(\omega) = \int d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega}$  tiene un polo sobre el eje real.

Se definen:

$$F_+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F(\omega + i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega + i\epsilon}$$

$$F_- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F(\omega - i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega - i\epsilon}$$

y el valor principal de Cauchy:

$$\wp \int d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int^{\omega - \epsilon} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} + \int_{\omega + \epsilon} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} \right)$$



# Integración en el plano complejo

Si  $f(\omega')$  es analítica en las proximidades del eje real,  
se puede deformar el contorno con un menisco de radio  $\epsilon$

# Integración en el plano complejo

Si  $f(\omega')$  es analítica en las proximidades del eje real,  
se puede deformar el contorno con un menisco de radio  $\epsilon$

$$\begin{aligned} F_+ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int^{\omega-\epsilon} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} + \int_{\omega+\epsilon} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} \right) + \\ &\quad + i \int_{-\pi}^0 d\theta f(\omega + \epsilon \exp(i\theta)) \\ F_+ &= \wp \int d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} + i\pi f(\omega) \end{aligned}$$



# Integración en el plano complejo

Si  $f(\omega')$  es analítica en las proximidades del eje real,  
se puede deformar el contorno con un menisco de radio  $\epsilon$

$$\begin{aligned} F_- &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int^{\omega-\epsilon} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} + \int_{\omega+\epsilon} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} \right) + \\ &\quad + i \int_{\pi}^0 d\theta f(\omega + \epsilon \exp(i\theta)) \\ F_- &= \oint d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} - i\pi f(\omega) \end{aligned} \quad (1)$$



# Integración en el plano complejo

La fórmula de Plemelj

$$\int d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega \mp i\epsilon} = \wp \int d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} \pm i\pi f(\omega)$$

y puesto que  $f(\omega')$  es arbitraria, la fórmula de Dirac

$$\frac{1}{\omega' - \omega \mp i\epsilon} = \wp \frac{1}{\omega' - \omega} \pm i\pi\delta(\omega - \omega')$$

# Funciones multivaluadas.

Cuando para 1 valor de  $z$  hay varios  $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$  es una **función multivaluada**.

En concreto,  $\sqrt{z}$  es una función bivaluada, haciendo  $z = \exp(i\theta)$  se puede expresar como dos, que se llaman **ramas**

$$\omega_1 = \sqrt{r} \exp(j \frac{\theta}{2})$$
$$\omega_2 = \sqrt{r} \exp(j \frac{\theta + 2\pi}{2})$$

A lo largo de las dos **ramas** se cumplen las **condiciones de Cauchy-Riemann** salvo en el punto  $z = 0$  donde hay una singularidad inevitable que se llama **punto de ramificación**. Si se redefine  $f(z)$  sobre un corte en el plano  $\mathbb{C}$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \exp(j \frac{\theta}{2}) \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

se obtiene una función univaluada y analítica, siempre que no se atravesase el corte, donde la función es discontinua.

# Causalidad.

En un medio lineal isótropo uniforme dispersivo en frecuencias y no en longitudes de onda en el dominio de la frecuencia se tiene la relación de proporcionalidad:

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, \omega)$$

donde

$$\begin{aligned}\vec{P}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \vec{P}(\vec{r}, \omega) \exp(-j\omega t) \\ \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \vec{P}(\vec{r}, t') \exp(-j\omega t')\end{aligned}$$

desarrollando:

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \epsilon_0 \chi(\omega) \exp(-j\omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \vec{E}(\vec{r}, t') \exp(-j\omega t')$$

se convierte en un producto de convolución en el dominio del tiempo:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mathcal{G}(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau)$$

# Causalidad.

$\mathcal{G}(\tau)$  es el kernel de la susceptibilidad eléctrica  $X(\omega) = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 = \epsilon_r - 1$

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (\epsilon_r(\omega) - 1) \exp(-j\omega t)$$

Aplicando las propiedades de las funciones respuesta de sistemas lineales causales a  $\epsilon_r$

- $\bar{\epsilon}_r(\bar{\omega}) = \epsilon_r(-\omega) =$
- $\epsilon_r(\omega)$  es analítica para  $\Im\omega > 0$ 
  - En un dieléctrico  $\epsilon_r(\omega)$  es analítica para  $\omega$  real
  - En un conductor  $\epsilon_r(\omega)$  tiene un polo para un  $\omega$  real

se deducirá una relación entre las partes real e imaginaria de la función respuesta.

## Las relaciones de Kramers-Kronig.

Puesto que  $\epsilon(\omega)$  es analítica para  $\Im\omega > 0$  se puede usar el teorema de Cauchy:

$$\begin{aligned}\epsilon(z) &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \oint d\omega' \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - z} \\ \epsilon(z) &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - z}\end{aligned}$$

puesto que  $z$  debe de estar en el semiplano superior,  $z = \omega + i\epsilon$  y se deforma el contorno por debajo de  $\omega' = \omega$

$$\begin{aligned}\epsilon(\omega) &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega - i\epsilon} \\ \epsilon(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi i} \wp \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\end{aligned}$$



# Las relaciones de Kramers-Kronig.

y separando las partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned}\Re\epsilon(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\Im\epsilon(\omega')}{\omega' - \omega} \\ \Im\epsilon(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\Re\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\end{aligned}$$

Por las propiedades de paridad de  $\epsilon(\omega)$

$$\begin{aligned}\Re\epsilon(\omega) &= 1 + \frac{2}{\pi} \wp \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \Im\epsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \\ \Im\epsilon(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\Re\epsilon(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2}\end{aligned}$$

que son las **ecuaciones de Kramers-Kronig**.

# Referencias.

- Jackson, J.D.  
“Classical Electrodynamics”.
- Saleh, B.E.A. Teich, M.C.  
“Fundamentals of photonics”.
- Stratton, J.A.  
“Electromagnetic Theory”.
- Pavlov, P.V. Jojlov, A.F.  
“Física del estado sólido”.
- Wild, H.  
“Mathematical methods for Physics”.
- Born, M. Wolf, E.  
“Principles of Optics”.