Medios dispersivos.

Propagación de ondas electromagnéticas en medios materiales dispersivos.

Parte 1.

Bloque 2. Ondas electromagnéticas en medios materiales.

Autor: Alfredo Ballesteros Ainsa

Asignatura: Electrodínamica de Medios Contínuos

5° de Fısica,

Facultad de Fısica.

Universidad de Sevilla.

Introducción.

Las ecuaciones de Maxwell conducen a ecuaciones de ondas acopladas para las amplitudes de los campos eléctrico y magnético.
A estas soluciones, que describen la propagación en el espacio de campos variables en el tiempo se las conoce con el nombre de ondas electromagnéticas.
En el presente trabajo se describirá el comportamiento de un tipo especial de material, los medios dispersivos en frecuencias, bajo los campos eléctricos asociados a este tipo de perturbaciones, sin entrar en los campos magnéticos que son muy débiles: $\frac{E}{B} = c$.
La forma en que un medio reacciona a una de estas perturbaciones depende de su naturaleza:

- En un conductor, hay un movimiento neto de carga.

Introducción.

Las ecuaciones de Maxwell conducen a ecuaciones de ondas acopladas para las amplitudes de los campos eléctrico y magnético.
A estas soluciones, que describen la propagación en el espacio de campos variables en el tiempo se las conoce con el nombre de ondas electromagnéticas.
En el presente trabajo se describirá el comportamiento de un tipo especial de material, los medios dispersivos en frecuencias, bajo los campos eléctricos asociados a este tipo de perturbaciones, sin entrar en los campos magnéticos que son muy débiles: $\frac{E}{B} = c$.
La forma en que un medio reacciona a una de estas perturbaciones depende de su naturaleza:

- En un conductor, hay un movimiento neto de carga.
- En un aislante (dieléctrico), hay un desplazamiento del centro de "simetría " de las cargas positivas respecto del de las negativas.
  Se induce un momento dipolar $\vec{p}$, que atenúa el campo en su interior.

Introducción.

Para describir el comportamiento de tales medios se definen las magnitudes vectoriales,

- La polarizabilidad $\vec{P} = N\vec{p}$
  siendo N la densidad volumétrica de partículas.
- El desplazamiento electríco $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

En un medio homogéneo, lineal, isótropo y no dispersivo ambas se relacionan:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \chi_e \vec{E} \\ \vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} &= \epsilon \vec{E} \end{aligned}$$

siendo
χ_e la susceptibilidad eléctrica
ϵ la permitividad del medio
y por tanto:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$$

Introducción.

Debido a la polarización del medio, el campo medio no coincide con el de la onda:

$$E_m = E_{onda} + \frac{\nu}{\epsilon_0} P$$

siendo:

- $\nu = \frac{1}{3}$ para un dielćtrico
- $\nu = 0$ para un conductor

Introducción.

Según la forma en que $\vec{P}$ y $\vec{E}$ se relacionen, un medio puede ser:

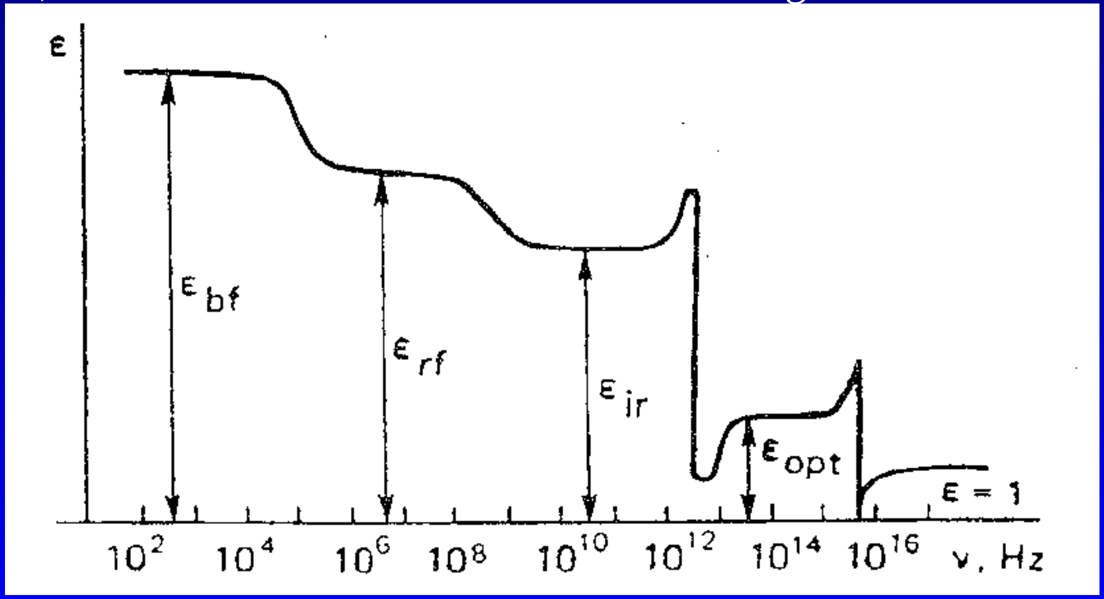
Tipo	relación	satisface
Lineal	$\vec{P} = c\,\vec{E}$	ppio. de superposición
Homogéneo	$\vec{P}(\vec{r},t) = \vec{P}_0$	
Isótropo	$\vec{P} \parallel \vec{E}$	independencia de la dirección
No dispersivo en ω	$\vec{P}(\vec{r},t_0) = c\,\vec{E}(\vec{r},t_0)$	respuesta instantánea
No dispersivo en λ	$\vec{P}(\vec{r}_0,t) = c\,\vec{E}(\vec{r}_0,t)$	relación local entre campos
Dispersivo en ω	$\vec{P}(\vec{r},\omega) = \epsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega)$	

Introducción.

El medio se polariza por distintos mecanismos, cada uno de los cuales tiene un tiempo característico:

Polarizabilidad	$\tau\ /\ s.$	$\nu\ /\ Hz.$	Tipo de radiación
Electrónica elástica	$10^{-16} - 10^{-17}$	$10^{15} - 10^{17}$	Óptica
Iónica elástica	$10^{-14} - 10^{-17}$	$10^{11} - 10^{15}$	Infrarrojo
Dipolar elástica	$10^{-14} - 10^{-17}$	$10^{11} - 10^{15}$	Infrarrojo
Térmica		$10^{4} - 10^{11}$	Radiofrecuencia

A baja frecuencia, ν, todos los mecanismos de polarización tienen tiempo de establecerse. Según se aumenta ν, los mecanismos más lentos se van descolgando.



Un modelo sencillo para la permitividad.

En el modelo de Lorenz, se hace una aproximación armónica del movimiento de los electrones. El dieléctrico se considera como un conjunto de osciladores de una única frecuencia propia ω_0. La dinámica vendrá dada por la ecuación del oscilador armónico amortiguado forzado:

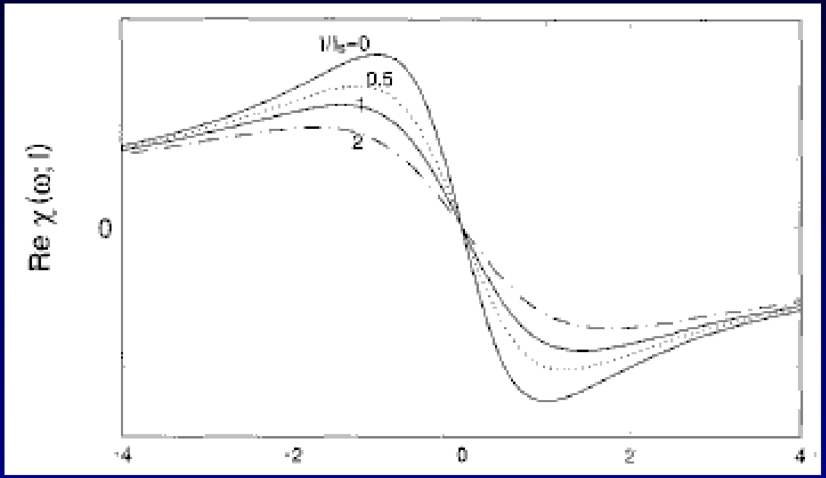
$$\ddot{\vec{P}} + \gamma\dot{\vec{P}} + \omega_0^2\vec{P} = \frac{e^2 N}{m}\vec{E}$$

Bajo excitación armónica de frecuencia ω, se puede hacer uso de fasores:

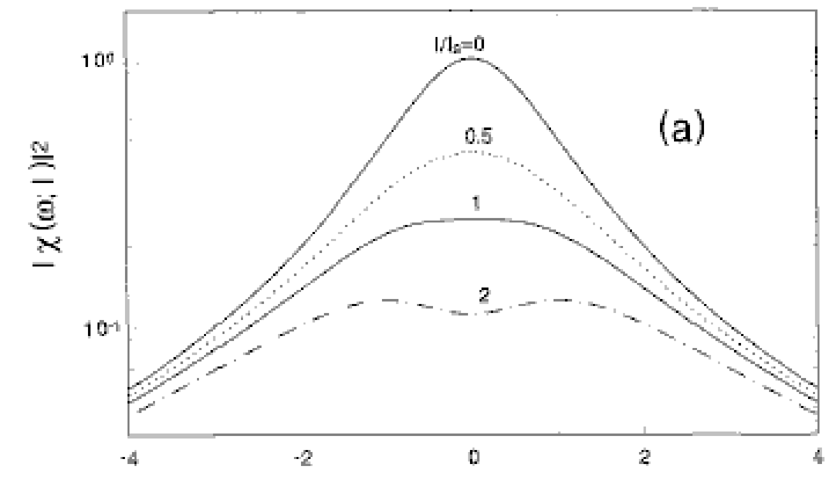
$$\begin{aligned} ((-j\omega)^2 + \gamma(-j\omega) + \omega_0^2)\vec{\mathcal{P}} &= m\chi\vec{\mathcal{P}} \\ \frac{e^2 N}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - j\gamma\omega)} &= \chi \\ \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e) &= \epsilon_0\left(1 + \frac{e^2 N}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - j\gamma\omega)}\right) \end{aligned}$$

Un modelo sencillo para la permitividad.

Comportamiento de $\Re\chi_e$ en función de la frecuencia ω.



Comportamiento de $\Im\chi_e$ en función de la frecuencia ω.



Un modelo sencillo para la permitividad.

En función de la frecuencia $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ y $\Delta\nu = \frac{\gamma}{2\pi}$
se obtiene una forma más compacta para la susceptibilidad:

$$\begin{aligned}
\chi &= \chi_0 \nu_0^2 \frac{1}{\left(\nu_0^2 - \nu^2 - j\nu\Delta\nu\right)} \\
\chi' = \Re\chi &= \chi_0 \nu_0^2 \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{\left(\nu_0^2 - \nu^2 - j\nu\Delta\nu\right)} \\
\chi'' = \Im\chi &= \chi_0 \nu_0^2 \frac{\nu^2 \Delta\nu}{\left(\nu_0^2 - \nu^2 - j\nu\Delta\nu\right)}
\end{aligned}$$

Un modelo sencillo para la permitividad.

- A bajas frecuencias $\nu << \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real

Un modelo sencillo para la permitividad.

- A bajas frecuencias $\nu << \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' = \chi_0$ coincide con la del vacio.

Un modelo sencillo para la permitividad.

- A bajas frecuencias $\nu << \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' = \chi_0$ coincide con la del vacio.
  - $\chi'' \approx 0$

Un modelo sencillo para la permitividad.

- A bajas frecuencias $\nu << \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' = \chi_0$ coincide con la del vacio.
  - $\chi'' \approx 0$
- A altas frecuencias $\nu >> \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real

Un modelo sencillo para la permitividad.

- A bajas frecuencias $\nu << \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' = \chi_0$ coincide con la del vacio.
  - $\chi'' \approx 0$
- A altas frecuencias $\nu >> \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' \approx 0$

Un modelo sencillo para la permitividad.

- A bajas frecuencias $\nu << \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' = \chi_0$ coincide con la del vacio.
  - $\chi'' \approx 0$
- A altas frecuencias $\nu >> \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' \approx 0$
  - $\chi'' \approx -\chi_0 \frac{\nu_0}{\Delta\nu}$ y es negativa

Un modelo sencillo para la permitividad.

- A bajas frecuencias $\nu << \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' = \chi_0$ coincide con la del vacio.
  - $\chi'' \approx 0$
- A altas frecuencias $\nu >> \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' \approx 0$
  - $\chi'' \approx -\chi_0 \frac{\nu_0}{\Delta\nu}$ y es negativa
- A frecuencias próximas a la de resonancia, $\nu \approx \nu_0$

$$\nu_0^2 - \nu^2 \approx 2\nu_0(\nu_0 - \nu)$$

$$\chi \approx \chi_0 \frac{\nu_0}{2\left(\nu_0 - \nu - j\frac{\Delta\nu}{2}\right)}$$

Un modelo sencillo para la permitividad.

- A bajas frecuencias $\nu << \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' = \chi_0$ coincide con la del vacio.
  - $\chi'' \approx 0$
- A altas frecuencias $\nu >> \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' \approx 0$
  - $\chi'' \approx -\chi_0 \frac{\nu_0}{\Delta\nu}$ y es negativa
- A frecuencias próximas a la de resonancia, $\nu \approx \nu_0$

$$\nu_0^2 - \nu^2 \approx 2\nu_0(\nu_0 - \nu)$$
$$\chi \approx \chi_0 \frac{\nu_0}{2\left(\nu_0 - \nu - j\frac{\Delta\nu}{2}\right)}$$

  - $\chi' = 2\frac{\nu_0}{\Delta\nu}$ y es negativa

Un modelo sencillo para la permitividad.

- A bajas frecuencias $\nu << \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' = \chi_0$ coincide con la del vacio.
  - $\chi'' \approx 0$
- A altas frecuencias $\nu >> \nu_0$ la susceptibilidad del medio es real
  - $\chi' \approx 0$
  - $\chi'' \approx -\chi_0 \frac{\nu_0}{\Delta\nu}$ y es negativa
- A frecuencias próximas a la de resonancia, $\nu \approx \nu_0$

$$\nu_0^2 - \nu^2 \approx 2\nu_0(\nu_0 - \nu)$$

$$\chi \approx \chi_0 \frac{\nu_0}{2\left(\nu_0 - \nu - j\frac{\Delta\nu}{2}\right)}$$

  - $\chi' = 2\frac{\nu_0}{\Delta\nu}$ y es negativa

Permitividad a baja frecuencia: medios conductores.

La conductividad de un metal se puede considerar como una contribución resonante a $\omega = 0$ a la permitividad.
Partiendo de la ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{ohm} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = -j\omega(\epsilon + j\frac{\sigma}{\omega})\vec{\mathcal{E}}$$

En el modelo de Drude de un medio conductor, con densidad volumétrica de electrones libres, $N f_0$ por molécula, que se pueden mover bajo un campo eléctrico:

$$\epsilon = \epsilon_0 + j\frac{Ne^2 f_0}{m}\frac{1}{\omega(\gamma_0 - j\omega)}$$

que tiene una singularidad para $\omega = 0$.

Permitividad a baja frecuencia: medios conductores.

El comportamiento de la conductividad de los metales con la frecuencia,

- A frecuencias inferiores a la de microondas, es real, y se puede considerar independiente. La corriente está en fase con el campo.
- A frecuencias superiores, infrarrojo, es compleja, y tiene la forma:

$$\sigma = \frac{Ne^2 f_0}{m} \frac{1}{\omega(\gamma_0 - j\omega)}$$

Permitividad a alta frecuencia: plasmas.

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

siendo NZ la densidad volumétrica de electrones y ω_p la frecuencia de plasma:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2 Z}{m}$$

La relación de dispersión

$$ck = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

tiene la forma conocida de las guías de onda, con ω_p es una frecuencia de corte,
para frecuencias inferiores a ω_0 los campos decaen exponencialmente y no se propagan.
Los metales reflejan ondas en el rango óptico y transmiten luz UVA.

Atenuación.

Mediante un vector de onda complejo:

$$\vec{k} = \vec{\beta} + j\frac{\vec{\alpha}}{2}$$

se puede expresar la atenuación, pérdida de intensidad, de una onda plana

- α es la constante de atenuación
- β es la constante de fase

Para la dispersión:

- $\Re\epsilon(\omega)$
  - crece con ω si la dispersión es normal.
  - disminuye con ω si la dispersión es anómala.
- $\Im\epsilon(\omega) = 0$ salvo si ω es una frecuencia de absorción.

Referencias.

- Jackson, J.D.
  “Classical Electrodynamics”.
- Saleh, B.E.A. Teich, M.C.
  “Fundamentals of photonics”.
- Stratton, J.A.
  “Electromagnetic Theory”.
- Reitz,J.R. Milford,F.J. “Fundamentos de la teoría electromagnética”.
- Pavlov, P.V. Jojlov,A.F.
  “Física del estado sólido”.