

penalità

Ingegneria Biomedica
Esame di Geometria e Algebra Lineare
25 settembre 2006

voto

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

tempo a disposizione: 2 ore

Esercizio 1. [8pt.] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{z^2} = e^z \\ 2 \leq |z^2 - z| \leq 7 \end{cases}$$

Esercizio 2. [8pt.] Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_1 + x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 + tx_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si determinino $\dim(\text{Ker}(f_t))$ e $\dim(\text{Im}(f_t))$.

(ii) Al variare di $t, s \in \mathbb{R}$, si determini la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ -t \end{pmatrix}$$

(iii) Si determinino, se esistono, i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore per f_t .

Esercizio 3. [8pt.] Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
- (ii) Si determinino la forma di Jordan e una base di Jordan per f .

Esercizio 4. [8pt.]

Sia V lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ generato dalle funzioni $\{e^x, e^{-x}, x\}$, e sia

$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da $\langle f, g \rangle = (fg)'(0)$.

- (i) Determinare la matrice di tale prodotto rispetto alla base $\langle e^x, e^{-x}, x \rangle$.
- (ii) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.
- (iii) Trovare, se esiste, un vettore isotropo non nullo.