

penalità

Ingegneria Biomedica  
Esame di Geometria e Algebra Lineare  
6 giugno 2006

voto

\_\_\_\_\_

(Cognome)

\_\_\_\_\_

(Nome)

\_\_\_\_\_

(Numero di matricola)

**tempo a disposizione: 2 ore**

**Esercizio 1.** [8pt.] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^z + 2ie^{2\bar{z}} = 0 \\ |z + \log 2| \leq 2\pi \end{cases}$$

**Esercizio 2.** [8pt.] Sia  $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -t \\ t & -1 & -1 \\ -t & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di  $t \in \mathbb{R}$ , si determinino  $\dim(\text{Ker}(f_t))$  e  $\dim(\text{Im}(f_t))$ .

(ii) Al variare di  $t \in \mathbb{R}$ , si determini la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(iii) Si determinino, se esistono, i valori di  $t \in \mathbb{R}$  per cui il vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  è autovettore per  $f_t$ .

**Esercizio 3.** [8pt.] Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare definita da  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + w \\ y \\ x - w \\ 2x + 2z - w \end{pmatrix}$

- (i) Si determinino gli autovalori di  $f$  specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
- (ii) Si determinino la forma di Jordan e una base di Jordan per  $f$ .

**Esercizio 4.** [8pt.] Sia  $V$  lo spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  generato dalle funzioni  $\{1, \sin x, \sin 2x\}$  e sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  il prodotto scalare definito da

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx.$$

- (i) Determinare la matrice associata a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  rispetto alla base  $\{1, \sin x, \sin 2x\}$ .
- (ii) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.
- (iii) Trovare, se esiste, un vettore isotropo non nullo.
- (iv) Trovare, se esiste, una base ortonormale.